

УДК 512.53+512.64

Бондаренко В. М., Костишин Е. М.

(Інститут математики НАН України, Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ НАПІВГРУПИ T_2

In this paper we describe the modular matrix representations of the semigroup T_2 of all transformations of a set of 2 elements.

У цій роботі описано модулярні матричні зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів.

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. У класичному випадку (коли характеристика p поля K не ділить порядок скінченної групи), група має скінченний зображувальний тип; у цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним і всі вони вичерпуються прямими доданками регулярного зображення. У модулярному випадку (коли характеристика p ділить порядок групи), група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силівська p -підгрупа є циклічною. У модулярному випадку більшість скінченних груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності. Точні означення ручних та диких задач див. в [1]. Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описані в роботі [2].

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Найбільше робіт присвячено вивченню незвідних зображень напівгруп (зокрема, вивченню класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними [3, 4], тощо). Серед інших випадків виділимо відомі результати з теорії зображень алгебр, які легко переформулювати в термінах зображень напівгруп (наприклад, опис зображень алгебри $\langle a, b \mid ab = ba = 0 \rangle$ [5, 6] чи алгебри $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0 \rangle$ [7, 8]) і деякі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу: випадок скінченної цілком простої напівгрупи [9] та деякі немодулярні випадки напівгруп всіх перетворень скінченної множини [10, 11]. У цій статті ми вивчаємо модулярні матричні зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів.

1. Попередні відомості. Напівгрупа T_2 всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ складається із чотирьох елементів e, a, b, c : $e(1) = 1, e(2) = 2; a(1) = 2, a(2) = 1; b(1) = 2, b(2) = 2; c(1) = 1, c(2) = 1$. Враховуючи, що елемент e є одиницею напівгрупи і до того ж $a^2 = e, b^2 = b, ab = b, ba = c, c^2 = c, ac = c, bc = c, ca = b, cb = b$, легко бачити (підставивши скрізь ba замість c), що e, a, b утворюють систему твірних із визначальними співвідношеннями

- 1) $ea = ae = a, eb = be = b$;
- 2) $a^2 = e, b^2 = b$;
- 3) $ab = b$.

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $T = T_2$ над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний

гомоморфізм $X : T \rightarrow M_n(K)$ напівгрупи T в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (див. наступний параграф); ми будемо розглядати лише такі зображення (якщо не сказано протилежне). Тоді зображення $X : T_2 \rightarrow M_n(K)$ напівгрупи $T = T_2$ однозначно задається парою матриць

$$R = \{A = X(a), B = X(b)\},$$

що задовольняють наступні рівності: $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$.

Еквівалентність матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 означає існування оборотної матриці C такої, що $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ (або, що те ж саме, $A'C = CA$ і $B'C = CB$, що практично більш зручніше, бо маємо лінійні відносно C рівності). На мові елементарних перетворень це означає, що від зображення R до зображення R' можна перейти, зробивши спочатку деякі елементарні перетворення з рядками матриць A і B , а потім обернені перетворення зі стовпцями цих матриць (кожного разу потрібно робити одні і ті ж елементарні перетворення в обох матрицях).

Пряма сума матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 — це матричне зображення $R \oplus R' = \{A \oplus A', B \oplus B'\}$, де

$$A \oplus A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \quad B \oplus B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $T = T_2$ (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напівгрупи $T = T_2$ називається модулярним, якщо характеристика поля K , над яким воно розглядається, дорівнює 2 (бо напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, породжену елементом a порядку 2).

2. Зауваження про матричні зображення напівгруп з одиницею.

Вище ми говорили, що у випадку, коли напівгрупа має одиничний елемент, практично можна вважати, що матричне зображення зіставляє йому одиничну матрицю.

Більш точно, має місце наступний факт.

Якщо $X : S \rightarrow M_n(K)$ — матричне зображення деякої напівгрупи S (див. вище відповідні позначення) і S містить одиничний елемент e , то зображення X еквівалентне прямій сумі зображень X_1 і X_2 , таких що $X_1(e)$ — одинична матриця і $X_2(s) = 0$ для довільного $s \in S$. Іншими словами, якщо в означенні матричного зображення напівгрупи з одиницею ми додатково будемо вимагати, щоб одиничному елементу відповідала одинична матриця, то ми втрачимо лише одне нерозкладне зображення, а саме зображення, всі матриці якого є нульовими порядку 1.

Дійсно, оскільки матриця $Q = X_1(e)$ ідемпотентна, то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що існує оборотна матриця C така, що $Q = CQ_0C^{-1}$, де

$$Q_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут і надалі E позначає одиничну матрицю (довільного порядку $m \geq 0$).

Розглянемо матричне зображення $\widehat{X} : s \rightarrow C^{-1}X(s)C$ (еквівалентне зображенню X), яке зіставляє одиничному елементу e матрицю Q_0 . Із рівностей $\widehat{X}(e)\widehat{X}(s) = \widehat{X}(s)\widehat{X}(e) = \widehat{X}(s)$ (для довільного $s \in S$) і $\widehat{X}(e) = Q_0$, випливає, що в матриці

$$\widehat{X}(s) = \begin{pmatrix} \widehat{X}(s)_{11} & \widehat{X}(s)_{12} \\ \widehat{X}(s)_{21} & \widehat{X}(s)_{22} \end{pmatrix}$$

(розбитої на горизонтальні та вертикальні смуги таким же чином, як і матриця Q_0) блоки $\widehat{X}(s)_{12}$, $\widehat{X}(s)_{21}$, $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими, звідки маємо, що зображення $\widehat{X}(s)$ є прямою сумою зображення $X_1 : s \rightarrow \widehat{X}(s)_{11}$, яке зіставляє одиничному елементу e одиничну матрицю $\widehat{X}(e)_{11}$, та зображення $X_2 : s \rightarrow \widehat{X}(s)_{22}$, для якого всі матриці $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими.

3. Канонічна форма матричних зображень напівгрупи T_2 над полем характеристики 2. Мета цього параграфу — установити канонічну форму модулярних зображень напівгрупи T_2 .

Теорема 1. *Будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \rightarrow A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{array} \right),$$

$$b \rightarrow B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Щоб довести цю теорему ми сформулюємо її в дещо іншій формі, яка узгоджується з нашим методом доведення (вказані в обох теоремах канонічні зображення відрізняються лише порядком розташування горизонтальних та вертикальних смуг блокових матриць); щоб було ясно, які діагональні блоки мають завідомо однаковий розмір, ми індексуємо одиничні матриці (в першому випадку на це вказували горизонтальні та вертикальні поділи).

Теорема 2. *Будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \rightarrow A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$b \rightarrow B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де E_1, \dots, E_5 — деякі одиничні матриці.

Підкреслимо, що деякі (але не всі) одиничні матриці, вказані в теоремах, можуть мати нульовий порядок.

Зауваження 1. Як сказано вище, ми розглядаємо лише такі матричні зображення напівгрупи T_2 , які зіставляють одиничному елементу напівгрупи одиничну матрицю. Якщо цього не вимагати, тоді в умовах теорем 1 та 2 в кожній матриці треба додати (згідно параграфу 2) додаткову нульову горизонтальну та нульову вертикальну смуги.

Переходимо до доведення теореми 2.

Нехай $R = \{A, B\}$ — зображення напівгрупи T_2 над полем K . Нагадаємо, що $A^2 = E, AB = B, B^2 = B$ і поле K має характеристику 2. Очевидно, що без обмеження загальності можна вважати, що матриця B має жорданову нормальну форму, тобто

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю A у блоковому вигляді, що відповідає вигляду B :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Використаємо спочатку співвідношення $AB = B$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $A_{11} = E$, $A_{21} = 0$, а тоді

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Залишилося ще одне співвідношення $A^2 = E$, тобто

$$\begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E & A_{12} + A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо

$$A_{12} = A_{12}A_{22} \quad (1)$$

$$A_{22}^2 = E \quad (2)$$

Отже, наше матричне зображення $R = \{A, B\}$ складається із матриць

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

і до того ж блоки A_{12} та A_{22} задовольняють рівності (1) і (2).

Дізнаємося тепер, які перетворення подібності ми можемо виконувати з A і B , щоб не змінювався їх загальний вигляд (тобто щоб не псувалися уже зроблені одиничні та нульові блоки). Якщо таке перетворення здійснює перехід від зображення R до зображення $\bar{R} = \{\bar{A}, \bar{B}\}$ такого ж самого вигляду, тобто

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} E & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то воно задається за допомогою оборотної матриці X , такої що

$$\bar{A} = XAX^{-1}, \quad \bar{B} = XBX^{-1}$$

або (в еквівалентній формі) $\bar{A}X = XA$, $\bar{B}X = XB$. Очевидно, що при цьому матриці \bar{B} і B рівні (це випливає із їх подібності).

Використаємо спочатку співвідношення $\bar{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де блоки X_{ij} матриці X задані у відповідності з блоками матриць A та B . Звідси маємо

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $X_{12} = 0, X_{21} = 0$, а значить

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Перейдемо тепер до співвідношення $\bar{A}X = XA$:

$$\begin{pmatrix} E & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \bar{A}_{12}X_{22} \\ 0 & \bar{A}_{22}X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11}A_{12} \\ 0 & X_{22}A_{22} \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо, що

$$\bar{A}_{12}X_{22} = X_{11}A_{12}, \quad \bar{A}_{22}X_{22} = X_{22}A_{22},$$

або (в еквівалентній формі)

$$\bar{A}_{12} = X_{11}A_{12}X_{22}^{-1} \quad (4)$$

$$\bar{A}_{22} = X_{22}A_{22}X_{22}^{-1}. \quad (5)$$

Отже, ми довели, що матричні зображення $R = \{A, B\}$ та $\bar{R} = \{\bar{A}, \bar{B}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли виконані рівності (4) і (5). Якщо ж говорити на мові елементарних перетворень, то із цих рівностей і вигляду матриці X випливає, що допустимими перетвореннями для блоків A_{12} та A_{22} зображення R (тобто які індукуються перетвореннями подібності з рядками та стовпцями матриць A та B , які не псують їхнього вигляду) є лише наступні перетворення а), б) та їх композиції:

а) з рядками матриці A_{12} можна робити довільне елементарне перетворення;

б) з рядками матриці A_{22} можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому зі стовпцями матриць A_{12} і A_{22} треба зробити обернене елементарне перетворення.

Отже, задача про опис з точністю до еквівалентності матричних зображень вигляду (3) напівгрупи T_2 , а значить і взагалі всіх її матричних зображень, еквівалентна задачі про опис пар матриць A_{12} і A_{22} з точністю до еквівалентності, яка задана рівностями (4) та (5) або ж перетвореннями а) та б).

Розглянемо цю задачу про матриці A_{12} і A_{22} .

Оскільки $A_{22}^2 = A_{22}$ (див. рівність (2)), то перетвореннями вигляду а) і б) (або ж, що те саме, використовуючи рівність (5)) приведемо матрицю A_{22} до наступного вигляду

$$A_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad (6)$$

який легко отримати із жорданової нормальної форми (однаковою) перестановкою рядків і стовпців. Тоді, розбивши матрицю A_{12} на три вертикальні смуги у відповідності з розбиттям матриці A_{22} і скориставшись рівністю (1), маємо:

$$A_{12} = (0 \quad C \quad D), \quad (7)$$

де C і D — деякі матриці¹.

Будемо тепер робити такі допустимі перетворення, які не змінюють загально-го вигляду матриць A_{12} і A_{22} , і подивимося, які перетворення з матрицями C і D при цьому індукуються.

По-перше, з рядками матриць C і D можна робити одне і те ж довільне елементарне перетворення (див. допустиме для A_{12} і A_{22} перетворення а)). По-друге, якщо перетворення вигляду б) зробити з рядками другої горизонтальної смуги матриці A_{22} та стовпцями другої вертикальної смуги матриць A_{12} і A_{22} , то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться лише матриця C , а саме з її стовпцями буде здійснено відповідне елементарне перетворення (що входить в б)). По-третє, якщо одне і те ж перетворення вигляду б) зробити одночасно з рядками першої та третьої горизонтальних смуг матриці A_{22} та стовпцями першої і третьої вертикальних смуг матриць A_{12} і A_{22} , то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться лише матриця D , а саме з її стовпцями буде здійснено відповідне елементарне перетворення (що входить в б)). І нарешті, по-четверте, якщо до j -го стовпця третьої вертикальної смуги додати i -ий стовець другої вертикальної смуги, помножений на деякий елемент поля K одночасно в матрицях A_{12} і A_{22} , а із рядками матриці A_{22} зробити обернене елементарне перетворення (вказане перетворення з рядками та стовпцями є перетворенням вигляду б)), то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться очевидно зрозумілим чином лише матриця D .

Таким чином, допустимими для матриць C і D є довільні одночасні елементарні перетворення з їх рядками, незалежні елементарні перетворення з їх стовпцями та додавання стовпців матриці C до стовпців матриці D з деякими множниками із K ; зрозуміло, що допустимими є і їх композиції.

Для нас неважливо є чи немає інших допустимих перетворень, але, розглядаючи матриці A_{22} , A_{12} вигляду (6), (7) та матриці \bar{A}_{22} , \bar{A}_{12} такого ж вигляду, разом з перетвореннями (4), (5) (аналогічно, як для матричних зображень R і \bar{R}), можна показати, що інших допустимих перетворень для матриць C і D немає.

Із (3), (6) і (7) випливає, що наше зображення R приведено до наступного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & C & D \\ 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

За лемою 1 роботи [12] матриці C і D (які утворюють зображення лінійно впорядкованої множини із двох елементів) можна привести за допомогою вказаних допустимих перетворень до наступного вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹Формально матриці A_{12} і A_{22} треба було б позначити іншими символами, наприклад A'_{12} і A'_{22} , але для зручності і по прийнятій в теорії матричних задач традиції ми залишили старі позначення.

Підставляючи ці матриці у (8) та індексуючи одиничні матриці таким чином, щоб матриці завідомо однакового порядку мали один і той же індекс, маємо:

$$A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 доведена.

4. Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем характеристики 2. Із теореми 1 випливає повний опис модулярних нерозкладних зображень напівгрупи T_2 .

Теорема 3. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

- 1) $a \rightarrow 1, \quad b \rightarrow 0;$
- 2) $a \rightarrow 1, \quad b \rightarrow 1;$
- 3) $a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- 4) $a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- 5) $a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Дійсно, із теореми 1 випливає, що будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне прямій сумі зображень вигляду 1)–5). До того ж, зображення 1)–5) попарно нееквівалентні (у випадку зображень однакової розмірності це випливає із того, що матриці, які зіставлені елементу b , мають різні ранги).

Залишилося впевнитися в тому, що всі зображення 1)–5) нерозкладні. Якби існувало розкладне зображення R вигляду 1)–5), то згідно тільки що сказаного

воно було б еквівалентним прямій сумі R_0 деяких зображень вигляду 1)–5) меншої розмірності. Якщо врахувати, що еквівалентні зображення мають подібні матриці, що відповідають елементу b , то можливі лише такі випадки:

а) зображення R вигляду 3) еквівалентне прямій сумі R_0 двох зображень вигляду 1);

б) зображення R вигляду 4) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 1) та 2);

в) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 двох зображень вигляду 1) та зображення вигляду 2);

г) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 1) та 4);

д) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 2) та 3).

Але це неможливо, бо, як легко побачити, у кожному з перерахованих випадків матриці $R(a)$ та $R_0(a)$ не є подібними.

Зауваження 2. Як сказано вище, ми розглядаємо лише такі матричні зображення напівгрупи T_2 , які зіставляють одиничному елементу напівгрупи одиничну матрицю. Якщо цього не вимагати, тоді в останній теоремі треба (згідно параграфу 2 чи зауваженню 1) додати наступне зображення:

$$0) \quad a \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 0.$$

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: “Мир”, 1972. – 285 с.
4. Okninski, J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
5. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М. Применение модулей над диадой для классификации конечных p -групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p , и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
7. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
8. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – Р. 19–34.
9. Познизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
10. Познизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
11. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – Р. 429–434.
12. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.

Одержано 29.03.2011