

УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА БЛИЗЬКОСТІ ЩІЛЬНОСТЕЙ РОЗПОДІЛІВ ДВОХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains estimate of approximation density of two sums random variables.

Робота містить оцінку близькості щільностей розподілів двох сум випадкових величин.

У розділі "Граничні теореми теорії ймовірностей" вивчаються як питання швидкості збіжності до граничних законів розподілу, так і досліджуються різноманітні характеристики, з допомогою яких отримуються результати. Дуже поширеним методом дослідження швидкості збіжності у граничних теоремах є використання псевдомоментів різного виду, що було запропоноване ще В. М. Золотарьовим [1]. У даній роботі здійснюється загальна оцінка близькості щільностей розподілів двох сум незалежних випадкових величин. При цьому умови, що накладені на одну з послідовностей випадкових величин, дають змогу досліджувати швидкість збіжності до стійкого закону в локальній граничній теоремі. Також є можливість отримати результати, що виражаються через конкретні псевдомоменти, зокрема, використані в [2]. У дослідженні використовуються деякі ідеї з [3].

Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ і $\eta_1, \dots, \eta_n, \dots$ – дві послідовності незалежних випадкових величин відповідно з функціями розподілу $F_i(x)$ і $G_i(x)$; характеристичними функціями $f_i(t)$ і $g_i(t)$; $p_n(x)$ і $q_n(x)$ – відповідно щільності випадкових величин $\sum_{i=1}^n \xi_i$ і $\sum_{i=1}^n \eta_i$, а $H_i(x) = F_i(x) - G_i(x)$.

Розглянемо наступні умови: існує число $\alpha \in (0, 2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що

$$|g_k(t)| \leq e^{-\lambda|t|^\alpha}; \quad (1)$$

$$\mu_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dH_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, m), \quad (2)$$

$$\text{де } \begin{cases} 1, & \alpha \leq 1, \\ 2, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Введемо псевдомоменти

$$\chi_i = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha |H_i(x)| dx;$$

$$\chi_{i0} = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^\alpha) |H_i(x)| dx;$$

$$\nu_{i0} = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^{\alpha+1}) |dH_i(x)|;$$

$$\chi = \max(\chi_1, \dots, \chi_n), \quad \chi_0 = \max(\chi_{10}, \dots, \chi_{n0}), \quad \nu_0 = \max(\nu_{10}, \dots, \nu_{n0}).$$

Лема 1. Нехай виконується умова (2). Тоді для будь-якого дійсного t виконується нерівність

$$\omega_i(t) = |f_i(t) - g_i(t)| \leq \leq \min \left\{ \nu_{i0} \min \left(1, \frac{2^{1-\delta}}{m(m+1)^\delta} |t|^{\alpha+1} \right), \chi_{i0} \min \left(|t|, \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta} |t|^{\alpha+1} \right), \chi_i \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta} |t|^{\alpha+1} \right\}, \quad (3)$$

де $\delta = \alpha + 1 - m$.

Лема 2. Нехай для всіх t виконується умова (1), а також існує стала θ_k така, що

$$\omega_k(t) = |f_k(t) - g_k(t)| \leq \theta_k \min(R|t|^{\alpha+1}, |t|^s), \quad \text{де } s \in [0, \alpha + 1], R > 0, k \in N.$$

Позначимо $\theta = \max_{1 \leq k \leq n} \theta_k$ і розглянемо

$$c \in \left(0, \min \left\{ e^{-\lambda}, e^{-\frac{2}{\alpha}}, \max \left\{ x : \frac{\lambda}{2} - R\sqrt{x} (-\lambda^{-1} \ln x)^{\frac{1}{\alpha}} > 0, \lambda - e^\lambda R x > 0 \right\} \right\} \right).$$

Якщо $\theta \leq c$, то при $|t| \leq T_1 = (-\lambda^{-1} \ln \theta)^{\frac{1}{\alpha}}$ справедлива нерівність

$$|f_i(t)| \leq e^{-c_1 |t|^\alpha}, \quad (4)$$

де $c_1 = \frac{\lambda}{2} - R\sqrt{c} (-\lambda^{-1} \ln c)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$.

А при $|t| > T_1$

$$|f_i(t)| \leq 2\theta |t|^s. \quad (5)$$

Якщо ж $\theta > c$ і $|t| \leq T_2 = \frac{c}{\theta}$, тоді

$$|f_i(t)| \leq e^{-c_2 |t|^\alpha}, \quad (6)$$

де $c_2 = \lambda - e^\lambda R c > 0$.

Детальне доведення лем 1 і 2 наведено у [2].

Теорема 1. Нехай $n \geq 2$ і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_k(t)| dt = A < +\infty. \quad (7)$$

Тоді

$$\sup_x |p_n(x) - q_n(x)| \leq C \frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{A}{2\pi} \prod_{k=1}^{n-1} b_k,$$

$$\text{де } b_k = \sup_{|t| > T_l} |f_k(t)|, \quad l = \begin{cases} 1, & \theta \leq c, \\ 2, & \theta > c. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $n \geq 2$. Із умови (7) випливає, що існує щільність $p_n(x)$:

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^n f_k(t) dt, \quad q_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^n g_k(t) dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |p_n(x) - q_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq T_l} \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T_l} \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) \right| dt + \int_{|t| > T_l} \left| \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| dt = \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Використаємо нерівність

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| \prod_{j=1}^{k-1} |b_j| \prod_{j=k+1}^n |a_j|,$$

у якій покладемо $a_k = f_k(t)$, $b_k = g_k(t)$. Тоді при $|t| \leq T_l$ з урахуванням (4) і (6)

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |f_k(t) - g_k(t)| \prod_{j=1}^{k-1} |g_j(t)| \prod_{j=k+1}^n |f_j(t)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \omega_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} e^{-\lambda|t|^\alpha} \prod_{j=k+1}^n e^{-c_m|t|^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \theta_k R |t|^{\alpha+1} e^{-\lambda|t|^\alpha(k-1)} e^{-c_m|t|^\alpha(n-k+1)} \leq \\ &\leq \theta R n |t|^{\alpha+1} e^{-c_m|t|^\alpha(n-1)}. \end{aligned}$$

Оцінимо кожний із одержаних інтегралів окремо.

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq T_l} \left| \prod_{k=1}^n f_k(t) - \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq T_l} \theta R n |t|^{\alpha+1} e^{-t^2 \sigma^2(n-1)c_l} dt \leq \\ &\leq \frac{n\theta R}{\pi} \int_0^{T_l} |t|^{\alpha+1} e^{-c_l|t|^\alpha(n-1)} dt \leq \frac{\theta R}{\pi \alpha c_l^{1+\frac{2}{\alpha}} n^{\frac{2}{\alpha}}} \int_0^\infty z^{\frac{2}{\alpha}} e^{-z} dz \leq \frac{\theta}{n^{\frac{2}{\alpha}}} C_3. \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T_l} \prod_{k=1}^n |f_k(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \sup_{|t| > T_l} \prod_{k=1}^{n-1} |f_k(t)| \int_{|t| > T_l} f_n(t) dt \leq \frac{A}{2\pi} \prod_{k=1}^{n-1} b_k. \quad (9)$$

Інтеграл I_3 оцінюватимемо окремо у двох випадках: $\theta \leq c$ і $\theta > c$.

Нехай $\theta \leq c$ ($l = 1$).

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T_1} \left| \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T_1} e^{-\lambda n |t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi} \int_{T_1}^\infty e^{-\lambda n |t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda n T_1^\alpha}^\infty e^{-z} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}} (\lambda n T_1^{\alpha_1})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\lambda n T_1^{\alpha_1}} = \frac{T_1^{1-\alpha}}{\pi \lambda n} e^{-\lambda n (-\frac{1}{\lambda} \ln \theta)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{(-\frac{1}{\lambda} \ln \theta)^{1-\alpha}}{\pi \lambda n} \theta^n \leq \frac{\theta c_4}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нехай $\theta > c$ ($l = 2$). Тоді

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| > T_2} \left| \prod_{k=1}^n g_k(t) \right| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{T_2}^\infty e^{-\lambda n |t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda n T_2^\alpha}^\infty e^{-z} \frac{z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi\alpha (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_{\lambda n T_2^\alpha}^{\infty} e^{-z} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz \leq \frac{1}{\pi\alpha (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}} (\lambda n T_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{2}{\alpha}-1} dz = \\
&= \frac{1}{\pi\alpha (\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}+1} \left(\frac{c}{\theta}\right)} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{2}{\alpha}-1} dz \leq \frac{\theta c_5}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Із (8)–(11) випливає твердження теореми.

Наслідок 1. *Нехай $n \geq 2$ і виконуються умови (8) і (11). Тоді*

$$\sup_x |p_n(x) - q_n(x)| \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \min\{\nu_0, \chi, \chi_0\} + \frac{A}{2\pi} \prod_{k=1}^{n-1} b_k.$$

Доведення безпосередньо випливає із того факту, що при $s = 0$ в умові леми 2 можна покласти $\theta_k = \nu_{0k}$, при $s = 1 - \theta_k = \chi_{0k}$, а при $s = \alpha + 1 - \theta_k = \chi_k$.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука. – 1986. – 416 с.
2. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів двох сум для різно розподілених випадкових величин // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 4–8.
3. *Боярищева Т. В.* Оцінка швидкості збіжності в локальній граничній теоремі для щільності у випадку різно розподілених випадкових величин // VIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука: Тези доповідей. – Київ, 2000. – С. 413.

Одержано 29.04.2011