

УДК 517.946

**В. В. Маринець, О. Ю. Питьовка** (Ужгородський національний університет, Мукачівський державний університет)

### ОДИН ПІДХІД ПОБУДОВИ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО - ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Modification of two-sides method for boundary-value problem of approaching integration of differential equations of hyperbolic type is built.

Будується одна модифікація двостороннього методу прискореної збіжності наближеного інтегрування крайової задачі для диференціально - функціональних рівнянь гіперболічного типу.

У роботах [1, 2] досліджуються крайові задачі для квазілінійних рівнянь другого порядку гіперболічного типу, коли область відшукування розв'язку розглядуваної задачі обмежена "вільними" кривими та характеристиками заданого диференціального рівняння [3].

У даній роботі узагальнюються одержані результати в [1, 2] і дається один підхід побудови двостороннього методу прискореної збіжності наближеного інтегрування досліджуваної задачі.

Нехай  $y = g_i(x)$  ( $x = k_i(y)$ ),  $i = 1, 2$  — задані "вільні" криві, причому  $g'_1(x) < 0$ ,  $x \in (x_1, x_0)$ ,  $g_1(x_k) = y_k$ ,  $k = 0, 1$ ,  $g'_2(x) > 0$ ,  $x \in (x_0, x_2)$ ,  $g_2(x_0) = y_0$ ,  $g_2(x_2) = y_1$ ,  $x_1 < x_0 < x_2$ ,  $y_0 < y_1 < y_2$ . Розглянемо область  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , де  $D_1 = \{(x, y) \mid x \in (x_1, x_0), y \in (g_1(x), y_1)\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) \mid x \in [x_0, x_2], y \in (g_2(x), y_1)\}$ ,  $D_3 = \{(x, y) \mid x \in (x_1, x_0), y \in [y_1, y_2]\}$ .

Позначимо:  $L_2u(x, y) := u_{xy}(x, y) + a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y)$ ,  $f[u(x, y)] := f(x, y, u(x, y), u(x, \theta(x, y)))$ ,  $\theta(x, y) := y - \tau(x, y)$ , де  $\tau(x, y) \geq 0$  — задана неперервна функція, яка визначає початкову множину  $\bar{E} = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$ ,  $\bar{E}_1 = \{(x, \bar{y}) \mid x \in [x_1, x_0], y - \tau(x, y) \leq \bar{y} \leq g_1(x), (x, y) \in \bar{D}_1 \cup \bar{D}_3\}$ ,  $\bar{E}_2 = \{(x, \bar{y}) \mid x \in [x_0, x_2], y - \tau(x, y) \leq \bar{y} \leq g_2(x), (x, y) \in \bar{D}_2\}$ .

**Постановка задачі:** в просторі функцій  $C^*(\bar{D}) := C^{(1,1)}(D) \cap C^{(0,1)}(\bar{D})$  знайти розв'язок рівняння

$$L_2u(x, y) = f[u(x, y)], \quad (1)$$

який задовольняє умови

$$u(x, g_1(x)) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, g_1(x)) = \psi(x), \quad x \in [x_1, x_0], \quad (2)$$

$$\psi(x) \in C[x_1, x_0], \quad \varphi_1(x) \in C'[x_1, x_0],$$

$$u(x, g_2(x)) = \varphi_2(x), \quad x \in [x_0, x_2], \quad \varphi_2(x) \in C'[x_0, x_2], \quad (3)$$

$$u(x_1, y) = \varphi(y), \quad y \in [y_1, y_2], \quad \varphi(y) \in C'[y_1, y_2], \quad (4)$$

причому виконуються умови узгодженості

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0), \quad \varphi_1(x_1) = \varphi(y_1), \quad \varphi'(y_1) = \psi(x_1), \quad (5)$$

а

$$u(x, y) |_{\bar{E}} = \Phi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{E}, \quad (6)$$

де  $\Phi(x, y) \in C'(\bar{E})$  — задана функція. Очевидно

$$\Phi(x, g_1(x)) = \varphi_1(x), \quad \Phi_y(x, g_1(x)) = \psi(x), \quad x \in [x_1, x_0], \quad (7)$$

$$\Phi(x, g_2(x)) = \varphi_2(x), \quad x \in [x_0, x_2].$$

Розв'язок задачі (1) — (7)  $u(x, y) = u_s(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , де  $u_1(x, y)$  — розв'язок задачі Коші (1), (2), (6) при  $(x, y) \in \bar{D}_1$ ,  $u_2(x, y)$  — розв'язок задачі Дарбу (1), (3), (5), (6) при  $(x, y) \in \bar{D}_2$  і  $u_2(x_0, y) = u_1(x_0, y)$ ,  $y \in [y_0, y_1]$ , а  $u_3(x, y)$  — розв'язок задачі Гурса (1), (4), (5) при  $(x, y) \in \bar{D}_3$  і  $u_3(x, y_1) = u_1(x, y_1)$ ,  $x \in [x_1, x_0]$ .

Вважаємо, що  $a_1(x, y) \in C^{(1,0)}(D)$ ,  $a_2(x, y) \in C^{(0,1)}(D)$ , а  $f[u(x, y)] \in C(\bar{B})$ ,  $f: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{B} \subset \mathbb{R}^4$ .

Неважко показати, що якщо

$$a_{1x}(x, y) = a_{2y}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (8)$$

то задачу (1) — (7) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y), & (x, y) \in \bar{E}_1, \\ \omega_{1,1}(x, y) + T_1 F[u_1(\xi, \eta)], & (x, y) \in \bar{D}_1, \end{cases}$$

$$\omega_{1,i}(x, y) := \varphi_i(x) \exp\left(\int_y^{g_i(x)} a_1(x, \eta) d\eta\right) +$$

$$+ \int_{g_i(x)}^y K(x, y; k_1(\eta), \eta) [\psi(k_1(\eta)) + a_1(k_1(\eta), \eta) \varphi_1(k_1(\eta))] d\eta, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$K(x, y; \xi, \eta) := \exp\left(\int_x^\xi a_2(\tau, \eta) d\tau + \int_y^\tau a_1(x, \tau) d\tau\right),$$

$$F[u_s(x, y)] := f[u_s(x, y)] + (a_{2y}(x, y) + a_1(x, y)a_2(x, y))u_s(x, y), \quad s = 1, 2, 3,$$

$$T_1 F[u_1(\xi, \eta)] := \int_{g_1(x)}^y \int_{k_1(\eta)}^x K(x, y; \xi, \eta) F[u_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \bar{D}_1,$$

$$u_2(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y), & (x, y) \in \bar{E}_2; \\ \omega_{2,2}(x, y) + T_2 F[u_2(\xi, \eta)], & (x, y) \in \bar{D}_2, \end{cases}$$

$$\omega_{2,2}(x, y) := \omega_{1,2}(x, y) + T_{1,1} F[u_1(\xi, \eta)], \quad (10)$$

$$T_{1,1} F[u_1(\xi, \eta)] := \int_{g_2(x)}^y \int_{k_1(\eta)}^{x_0} K(x, y; \xi, \eta) F[u_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta,$$

$$T_2 F[u_2(\xi, \eta)] := \int_{g_2(x)}^y \int_{x_0}^x K(x, y; \xi, \eta) F[u_2(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \bar{D}_2,$$

$$\begin{aligned}
 u_3(x, y) &= \begin{cases} \Phi(x, y), & (x, y) \in \bar{E}_1; \\ \omega_{3,3}(x, y) + T_3 F[u_3(\xi, \eta)], & (x, y) \in \bar{D}_3, \end{cases} \\
 \omega_{3,3}(x, y) &:= \int_{y_1}^y K(x, y; x_1, \eta) [\varphi'(\eta) + a_1(x_1, \eta)\varphi(\eta)] d\eta + \\
 &+ \omega_{1,1}(x, y_1) \exp\left(\int_y^{y_1} a_1(x, \eta) d\eta\right) + T_{1,2} F[u_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\
 T_{1,2} F[u_1(\xi, \eta)] &:= \int_{g_1(x)}^{y_1} \int_{k_1(\eta)}^x K(x, y; \xi, \eta) F[u_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\
 T_3 F[u_3(\xi, \eta)] &:= \int_{y_1}^y \int_{x_1}^x K(x, y; \xi, \eta) F[u_3(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \bar{D}_3.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Згідно постановки задачі  $u_1(x_0, y) = u_2(x_0, y)$  і  $u_1(x, y_1) = u_3(x, y_1)$  при  $(x, y) \in \bar{D}$ , а отже  $u_{1y}(x_0, y) = u_{2y}(x_0, y)$ ,  $u_{1x}(x, y_1) = u_{3x}(x, y_1)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$ .

Поскільки  $(x, y_1 - \tau(x, y_1)) \in \bar{D}_1 \cup E_1$ , тобто  $u_3(x, y_1 - \tau(x, y_1)) = u_1(x, y_1 - \tau(x, y_1))$ , то із (9) – (11) легко перекопатись у справедливості в області  $\bar{D}$  рівностей

$$\begin{aligned}
 u_{3y}(x, y_1) - u_{1y}(x, y_1) &= 0, \quad x \in [x_1, x_0], \\
 u_{2x}(x_0, y) - u_{1x}(x_0, y) &= [\varphi'_2(x_0) - \varphi'_1(x_0) +
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$+ (g'_1(x_0) - g'_2(x_0))\psi(x_0)] \exp\left(\int_y^{y_0} a_1(x_0, \eta) d\eta\right), \quad y \in [y_0, y_1].$$

Таким чином справедлива наступна

**Лема 1.** *Нехай  $f[u(x, y)] \in C(\bar{B})$ ,  $a_1(x, y) \in C^{(1.0)}(\bar{D})$ ,  $a_2(x, y) \in C^{(0.1)}(\bar{D})$  і виконується умова (8), а*

$$\varphi'_2(x_0) - \varphi'_1(x_0) + (g'_1(x_0) - g'_2(x_0))\psi(x_0) = 0.
 \tag{13}$$

Тоді, якщо задача (1) – (7) має розв'язок, то він належатиме просторові  $C^*(\bar{D})$  (буде регулярним). У супротивному випадку має місце рівність (12) і  $u(x, y) \in C^{(1.1)}(D \setminus I) \cap C^{(0.1)}(\bar{D})$ ,  $I = \{(x, y) \mid x = x_0, y \in [y_0, y_1]\}$  (розв'язок буде іррегулярним).

**Означення 1.** *Будемо говорити, що  $F[u(x, y)] \in C_1(\bar{B})$ , якщо функція  $F[u(x, y)]$  задовольняє наступні умови [4]:*

- 1)  $F[u(x, y)] \in C(\bar{B})$ ,
- 2) в просторі функцій  $C(\bar{B}_1)$ ,  $\bar{B}_1 \subset \mathbb{R}^6$ ,  $\text{Пр}_{xOy} \bar{B}_1 = \bar{D}$ , існує така функція  $H(x, y, u(x, y), u(x, \theta(x, y)); v(x, y), v(x, \theta(x, y))) := H[u(x, y), v(x, y)]$ , що
  - а)  $H[u(x, y); u(x, y)] \equiv F[u(x, y)]$ ,
  - б) для довільної з простору  $C(\bar{D})$  пари функцій  $u(x, y), v(x, y) \in \bar{B}_1$ , які задовольняють умову  $u(x, y) \geq v(x, y)$ ,  $(x, y) \in \bar{D}$ , в області  $\bar{B}_1$  виконуються нерівність

$$H[u(x, y); v(x, y)] \geq H[v(x, y); u(x, y)], \quad (x, y) \in \bar{D},
 \tag{14}$$

3) функція  $H[u(x, y); v(x, y)]$  в області  $\overline{B}_1$  задовольняє умову Ліпшица, тобто, для всяких з простору  $C(\overline{D})$  функцій  $u_i(x, y), v_i(x, y) \in \overline{B}_1, i = 1, 2$ , виконується умова

$$\begin{aligned} |H[u_1(x, y); v_1(x, y)] - H[u_2(x, y); v_2(x, y)]| &\leq L(|u_1(x, y) - u_2(x, y)| + \\ &+ |u_1(x, \theta(x, y)) - u_2(x, \theta(x, y))| + |v_1(x, y) - v_2(x, y)| + \\ &+ |v_1(x, \theta(x, y)) - v_2(x, \theta(x, y))|) \end{aligned}$$

де  $L$  — стала Ліпшица.

Очевидно, якщо функція  $F[u(x, y)] \in C(\overline{B})$  і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, в області  $\overline{B}$ , то вона завжди належить просторові  $C_1(\overline{B})$ .

Встановимо достатні умови існування та єдиності регулярного (ірегулярного) розв'язку задачі (1) — (7) в області  $\overline{D}$ .

Нехай  $Z_{p,s}(x, y), V_{p,s}(x, y) \in C(\overline{D})$  належать області  $\overline{B}_1, s = 1, 2, 3, p \in \mathbb{N}$ .

Введемо позначення:

$$W_{p,s}(x, y) := Z_{p,s}(x, y) - V_{p,s}(x, y),$$

$$f_s^p(x, y) := H[Z_{p,s}(x, y); V_{p,s}(x, y)], f_{p,s}(x, y) := H[V_{p,s}(x, y); Z_{p,s}(x, y)],$$

$$\alpha_{p,s}^*(x, y) := Z_{p,s}(x, y) - \omega_{s,s}^p(x, y) - T_s f_s^p(\xi, \eta), \quad (15)$$

$$\beta_{p,s}^*(x, y) := V_{p,s}(x, y) - \omega_{s,s,p}(x, y) - T_s f_{p,s}(\xi, \eta),$$

$$s = 1, 2, 3, p = 0, 1, 2, \dots, (x, y) \in \overline{D}_s,$$

$$\omega_{1,1}^p(x, y) = \omega_{1,1,p}(x, y) = \omega_{1,1}(x, y), \forall p = 0, 1, 2, \dots, (x, y) \in \overline{D}_1,$$

$$\omega_{2,2}^p(x, y) := \omega_{1,2}(x, y) + T_{1,1} f_1^p(\xi, \eta),$$

$$\omega_{2,2,p}(x, y) := \omega_{1,2}(x, y) + T_{1,1} f_{p,1}(\xi, \eta), (x, y) \in \overline{D}_2,$$

$$\omega_{3,3}^p(x, y) := \omega_{1,1}(x, y_1) \exp\left(\int_y^{y_1} a_1(x, \eta) d\eta\right) +$$

$$+ \int_{y_1}^y K(x, y; x_1, \eta) [\varphi'(\eta) + a_1(x_1, \eta) \varphi(\eta)] d\eta + T_{1,2} f_1^p(\xi, \eta),$$

$$\omega_{3,3,p}(x, y) := \omega_{1,1}(x, y_1) \exp\left(\int_y^{y_1} a_1(x, \eta) d\eta\right) +$$

$$+ \int_{y_1}^y K(x, y; x_1, \eta) [\varphi'(\eta) + a_1(x_1, y) \varphi(\eta)] d\eta + T_{1,2} f_{p,1}(\xi, \eta), (x, y) \in \overline{D}_3,$$

$$\overline{Z}_{p,s}(x, y) := Z_{p,s}(x, y) - d_{p,s}(x, y) W_{p,s}(x, y),$$

$$\overline{V}_{p,s}(x, y) := V_{p,s}(x, y) + q_{p,s}(x, y) W_{p,s}(x, y), (x, y) \in \overline{D}_s,$$

$$F_s^p(x, y) := H[\overline{Z}_{p,s}(x, y); \overline{V}_{p,s}(x, y)], F_{p,s}(x, y) := H[\overline{V}_{p,s}(x, y); \overline{Z}_{p,s}(x, y)]$$

$d_{p,s}(x, y), q_{p,s}(x, y) \in C(\overline{D}_s)$  — довільні функції, які задовольняють умови

$$\begin{aligned} 0 \leq d_{p,s}(x, y) \leq 0,5; \quad 0 \leq q_{p,s}(x, y) \leq 0,5, \\ (x, y) \in \overline{D}_s, \text{ для всіх } p \in \mathbb{N}, s = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (16)$$

Побудуємо послідовності функцій  $\{Z_{p,s}(x, y)\}$  та  $\{V_{p,s}(x, y)\}$  згідно формул [5]

$$Z_{p+1,s}(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y), & (x, y) \in \overline{E}_s, \\ \Omega_{s,s}^p(x, y) + T_s F_s^p(\xi, \eta), & (x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (17)$$

$$V_{p+1,s}(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y), & (x, y) \in \overline{E}_s, \quad \overline{E}_3 \equiv \overline{E}_1, \\ \Omega_{s,s,p}(x, y) + T_s F_{p,s}(\xi, \eta), & (x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$\Omega_{s,s}^p(x, y) = \omega_{s,s}^p(x, y) \Big|_{f_s^p(x,y)=F_s^p(x,y)},$$

$$\Omega_{s,s,p}(x, y) = \omega_{s,s,p}(x, y) \Big|_{f_{p,s}(x,y)=F_{p,s}(x,y)},$$

де за нульове наближення  $Z_{0,s}(x, y), V_{0,s}(x, y) \in \overline{B}_1$  вибираємо довільні функції з простору  $C(\overline{D}_s)$ , які задовольняють умови

$$W_{0,s}(x, y) \geq 0, \quad \alpha_{0,s}^*(x, y) \geq 0, \quad \beta_{0,s}^*(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in \overline{D}_s, \quad (18)$$

$$Z_{0,s}(x, y) \Big|_{\overline{E}_s} = V_{0,s}(x, y) \Big|_{\overline{E}_s} = \Phi(x, y), \quad s = 1, 2, 3.$$

Надалі функції  $Z_{0,s}(x, y)$  та  $V_{0,s}(x, y)$ , які задовольняють умови (18) і належать  $\overline{B}_1$ , будемо називатимемо функціями порівняння задачі (1) — (7).

Із (15) та (17) при  $(x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3$  впливає справедливість формул:

$$Z_{p,s}(x, y) - Z_{p+1,s}(x, y) = \alpha_{p,s}(x, y) := Z_{p,s}(x, y) - \Omega_{s,s}^p(x, y) - T_s F_s^p(\xi, \eta), \quad (19)$$

$$V_{p,s}(x, y) - V_{p+1,s}(x, y) = \beta_{p,s}(x, y) := V_{p,s}(x, y) - \Omega_{s,s,p}(x, y) - T_s F_{p,s}(\xi, \eta),$$

$$W_{p+1,s}(x, y) = \Omega_{s,s}^p(x, y) - \Omega_{s,s,p}(x, y) + T_s (F_s^p(\xi, \eta) - F_{p,s}(\xi, \eta)), \quad (20)$$

$$\alpha_{p+1,s}(x, y) = \Omega_{s,s}^p(x, y) - \Omega_{s,s}^{p+1}(x, y) + T_s (F_s^p(\xi, \eta) - F_s^{p+1}(\xi, \eta)), \quad (21)$$

$$\beta_{p+1,s}(x, y) = \Omega_{s,s,p}(x, y) - \Omega_{s,s,p+1}(x, y) + T_s (F_{p,s}(\xi, \eta) - F_{p+1,s}(\xi, \eta)).$$

В силу (16), (18) маємо

$$V_{0,s}(x, y) \leq \overline{V}_{0,s}(x, y) \leq \overline{Z}_{0,s}(x, y) \leq Z_{0,s}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3,$$

а отже, на підставі (14)  $F_s^0(x, y) - F_{0,s}(x, y) \geq 0$  для всіх  $(x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3$ , якщо тільки  $Z_{0,s}(x, y), V_{0,s}(x, y) \in \overline{B}_1$ . Відмітимо, якщо  $\alpha_{0,s}^*(x, y) \geq 0, \beta_{0,s}^*(x, y) \leq 0$ , то і  $\alpha_{0,s}(x, y) \geq 0, \beta_{0,s}(x, y) \leq 0$  при  $(x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3$ . Але тоді із (19), (20) при  $p = 0$  одержуємо  $Z_{0,s}(x, y) - Z_{1,s}(x, y) \geq 0, V_{0,s}(x, y) - V_{1,s}(x, y) \leq 0, W_{1,s}(x, y) \geq 0$ , тобто

$$V_{0,s}(x, y) \leq V_{1,s}(x, y) \leq Z_{1,s}(x, y) \leq Z_{0,s}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3,$$

а отже,  $Z_{1,s}(x, y), V_{1,s}(x, y) \in \overline{B}_1$ .

Вибираємо функції  $d_{0,s}(x, y), q_{0,s}(x, y)$ , які задовольняють умови (16), таким чином, щоб при  $(x, y) \in \overline{D}_s$  виконувались умови [6]

$$Z_{0,s}(x, y) - Z_{1,s}(x, y) - d_{0,s}(x, y)W_{0,s}(x, y) \geq 0,$$

$$V_{0,s}(x, y) - V_{1,s}(x, y) + q_{0,s}(x, y)W_{0,s}(x, y) \leq 0.$$

Тоді в силу (14)  $F_s^0(x, y) - F_s^1(x, y) \geq 0, F_{0,s}(x, y) - F_{1,s}(x, y) \leq 0, (x, y) \in \overline{D}_s$ .

Але в такому разі із (21) при  $p = 0$  маємо  $\alpha_{1,s}(x, y) \geq 0, \beta_{1,s}(x, y) \leq 0, (x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3$ .

Приймаючи функції  $Z_{1,s}(x, y), V_{1,s}(x, y)$  за вихідні і повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконаємось, що якщо функції  $d_{p,s}(x, y), q_{p,s}(x, y), (x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3, p \in \mathbb{N}$  на кожному кроці ітерації (17) вибирати таким чином, щоб виконувались умови

$$Z_{p,s}(x, y) - Z_{p+1,s}(x, y) - d_{p,s}(x, y)W_{p,s}(x, y) \geq 0,$$

$$V_{p,s}(x, y) - V_{p+1,s}(x, y) + q_{p,s}(x, y)W_{p,s}(x, y) \leq 0, \quad (22)$$

$$(x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3, p \in \mathbb{N},$$

то в області  $\overline{B}_1$  мають місце нерівності

$$V_{p,s}(x, y) \leq V_{p+1,s}(x, y) \leq Z_{p+1,s}(x, y) \leq Z_{p,s}(x, y), \quad (23)$$

$$\alpha_{p,s}(x, y) \geq 0, \beta_{p,s}(x, y) \leq 0, (x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3, \text{ для всіх } p \in \mathbb{N}$$

Зауважимо, що для всіх  $p \in \mathbb{N}$   $\alpha_{p,s}(x, y) \geq \alpha_{p,s}^*(x, y) \geq 0, \beta_{p,s}(x, y) \leq \beta_{p,s}^*(x, y) \leq 0, (x, y) \in \overline{D}_s$ .

**Лема 2.** Якщо  $F[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$  і в області  $\overline{B}_1$  існують функції порівняння  $Z_{0,s}(x, y)$  та  $V_{0,s}(x, y) \in C(\overline{D}_s), s = 1, 2, 3$ , тоді множина функцій  $d_{p,s}(x, y), q_{p,s}(x, y), (x, y) \in \overline{D}_s$ , які задовольняють нерівності (16), (22), не порожня.

Дійсно, покладемо на кожному кроці ітерації (17)

$$d_{p,s}(x, y) = \begin{cases} \alpha_{p,s}^*(x, y)\rho_{p,s}^{-1}(x, y), & W_{p,s}(x, y) \neq 0, \\ 0, & W_{p,s}(x, y) = 0, (x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$q_{p,s}(x, y) = \begin{cases} -\beta_{p,s}^*(x, y)\rho_{p,s}^{-1}(x, y), & W_{p,s}(x, y) \neq 0, \\ 0, & W_{p,s}(x, y) = 0, (x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$\rho_{p,s}(x, y) = \alpha_{p,s}^*(x, y) - \beta_{p,s}^*(x, y) + W_{p,s}(x, y), p \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, таким чином вибрані функції  $d_{p,s}(x, y), q_{p,s}(x, y)$  задовольняють умови (16), а в силу (19)

$$Z_{p,s}(x, y) - Z_{p+1,s}(x, y) - d_{p,s}(x, y)W_{p,s}(x, y) \geq \alpha_{p,s}(x, y)(1 - W_{p,s}(x, y)\rho_{p,s}^{-1}(x, y)) \geq 0,$$

$$V_{p,s}(x, y) - V_{p+1,s}(x, y) + q_{p,s}(x, y)W_{p,s}(x, y) \leq \beta_{p,s}(x, y)(1 - W_{p,s}(x, y)\rho_{p,s}^{-1}(x, y)) \leq 0,$$

$$\text{для всіх } (x, y) \in \overline{D}_s, s = 1, 2, 3, p \in \mathbb{N}.$$

Отже, справедлива наступна

**Теорема 1.** Нехай  $F[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$ , коефіцієнти  $a_i(x, y)$  задовольняють умову (8), а в області  $\overline{B}_1$  існують функції порівняння задачі (1) – (7)  $Z_{0,s}(x, y)$ ,  $V_{0,s}(x, y) \in C(\overline{D}_s)$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Тоді для послідовностей функцій  $\{Z_{p,s}(x, y)\}$  та  $\{V_{p,s}(x, y)\}$ , які побудовані згідно закону (17), де  $d_{p,s}(x, y)$ ,  $q_{p,s}(x, y) \in \overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , задовольняють умови (16), (22), в області  $\overline{B}_1$  справедливі нерівності (23).

Покажемо, що побудовані таким чином послідовності функцій  $\{Z_{p,s}(x, y)\}$  та  $\{V_{p,s}(x, y)\}$  збігаються рівномірно в області  $\overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9) – (11). В силу виконання в області  $\overline{B}_1$  нерівностей (23), для цього достатньо показати, що  $\lim_{p \rightarrow \infty} W_{p,s}(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Нехай

$$\max_s \left\{ \sup_{\overline{D}_s} W_{0,s}(x, y), \sup_{\overline{D}_s} W_{0,s}(x, \theta(x, y)) \right\} \leq d, \quad Q = \sup_{\overline{D}} (1, y - y_0 + x - x_1),$$

$$\max_{p,s} \sup_{\overline{D}_s} (1 - d_{p,s}(x, y) - q_{p,s}(x, y)) \leq q, \quad \sup_{\overline{D} \times \overline{D}} K(x, y; \xi, \eta) \leq 0, 25K.$$

Тоді із (20) методом математичної індукції переконуємось у справедливості оцінок

$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} W_{p,s}(x, y) \leq \frac{[LKQq(y - y_0 + x - x_1)]^p}{p!} d, \quad (24)$$

а отже,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} Z_{p,s}(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} V_{p,s}(x, y) = u_s(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3.$$

Перейшовши у формулах (17) до границі, коли  $p \rightarrow \infty$  переконуємось, що граничні функції  $u_s(x, y)$  є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (9) – (11) при  $(x, y) \in \overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

**Теорема 2.** Нехай  $F[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$ , коефіцієнти  $a_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  задовольняють умову (8) і в області  $\overline{B}_1$  існують функції порівняння задачі (1) – (7)  $Z_{0,s}(x, y)$ ,  $V_{0,s}(x, y) \in C(\overline{D}_s)$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Тоді послідовності функцій  $\{Z_{p,s}(x, y)\}$  та  $\{V_{p,s}(x, y)\}$ , побудовані згідно закону (17), де  $d_{p,s}(x, y)$ ,  $q_{p,s}(x, y) \in C(\overline{D}_s)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , задовольняють умови (16), (22):

а) збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9) – (11) при  $(x, y) \in \overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ ;

б) мають місце оцінки (24);

в) в області  $\overline{B}_1$  виконуються нерівності

$$V_{p,s}(x, y) \leq V_{p+1,s}(x, y) \leq u_s(x, y) \leq Z_{p+1,s}(x, y) \leq Z_{p,s}(x, y), \quad (25)$$

$$(x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3,$$

для всіх  $p \in \mathbb{N}$ , де  $u_s(x, y)$  – єдиний розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9) – (11) при  $(x, y) \in \overline{D}_s$ ,

г) збіжність ітераційного методу (17), (16), (22) не повільніша збіжності двостороннього методу Пікара (коли  $d_{p,s}(x, y) = q_{p,s}(x, y) \equiv 0$ ).

**Доведення.** Єдиність розв'язку інтегральних рівнянь (9) – (11) при  $(x, y) \in \overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , доводиться методом від супротивного.

Доведемо справедливості нерівностей (25). З цією метою припустимо, що в деякій точці  $(x, y) \in \overline{D}_s$  для деякого номера  $p$ , наприклад,  $u_s(x, y) > Z_{p,s}(x, y)$ .

Тоді в силу (23) для всіх  $n \in \mathbb{N}$  в розглядуваній точці  $(x, y) \in \overline{D}_s$

$$u_s(x, y) > Z_{p,s}(x, y) \geq Z_{p+1,s}(x, y),$$

а отже, в даній точці послідовність функцій  $\{Z_{p+n,s}(x, y)\}$  при  $n \rightarrow \infty$  не збігається до розв'язку  $u_s(x, y)$ , що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності (25).

Нехай  $Z_{p,s}(x, y)$ ,  $V_{p,s}(x, y) \in \overline{B}_1$  – двосторонні наближення до розв'язків відповідних інтегральних рівнянь (9) – (11) при  $(x, y) \in \overline{D}_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , побудовані за деяким методом і вони задовольняють умови  $W_{p,s}(x, y) \geq 0$ ,  $\alpha_{p,s}^*(x, y) \geq 0$ ,  $\beta_{p,s}^*(x, y) \leq 0$ .

Позначимо через  $Z_{p+1,s}^*(x, y)$ ,  $V_{p+1,s}^*(x, y)$  наступні наближення, побудовані згідно двостороннього методу Пікара. Тоді при  $(x, y) \in \overline{D}_s$ , в силу (14), (16), маємо

$$Z_{p+1,s}^*(x, y) - Z_{p+1,s}(x, y) = \omega_{s,s}^p(x, y) - \Omega_{s,s}^p(x, y) + T_s(f_s^p(\xi, \eta) - F_s^p(\xi, \eta)) \geq 0,$$

$$V_{p+1,s}^*(x, y) - V_{p+1,s}(x, y) = \omega_{s,s,p}(x, y) - \Omega_{s,s,p}(x, y) + T_s(f_{p,s}(\xi, \eta) - F_{p,s}(\xi, \eta)) \leq 0,$$

тобто збіжність методу (17), (16), (22) не повільніша збіжності двостороннього методу Пікара.

Зауважимо, що в залежності від вибору функцій  $d_{p,s}(x, y)$  та  $q_{p,s}(x, y)$  в алгоритмі (17), (16), (22) ми отримуємо різні модифікації двостороннього методу.

**Наслідок 1.** Нехай коефіцієнти рівняння (1)  $a_1(x, y) \in C^{(1,0)}(D)$ ,  $a_2(x, y) \in C^{(0,1)}(D)$  задовольняють умову (8) і виконуються вимоги теореми 2.

Тоді розв'язок крайової задачі (1) – (7) в області  $\overline{D}$  існує і він єдиний, причому при виконанні умови (13) він буде регулярним, в супротивному випадку – іррегулярним.

**Наслідок 2.** Нехай  $\varphi_i(x) = \varphi(y) = \psi(x) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $F[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$ , причому  $F[u(x, y)] \equiv H[u(x, y); 0]$ .

Тоді, якщо  $F[0] \leq (\geq) 0$  в області  $\overline{B}$ , то розв'язок задачі (1) – (7) при  $(x, y) \in \overline{D}_s$  задовольняє нерівність  $u(x, y) \leq (\geq) 0$ .

Розглянемо поряд із рівнянням (1) рівняння вигляду

$$L_2 Z(x, y) = f_1(x, y, Z(x, y), Z(x, \theta(x, y))) := f_1[Z(x, y)], \quad (26)$$

$$f_1 : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \overline{B} \in \mathbb{R}^4.$$

Надалі будемо вважати, що праві частини рівнянь (1), (26) задовольняють наступні умови:

$$1) f[u(x, y)] \in C_1(\overline{B}),$$



- 2) функція  $f_1[Z(x, y)] \in C(\overline{B})$  і в області  $\overline{B}$  має обмежені частинні похідні першого порядку по  $Z(x, y)$  і  $Z(x, \theta(x, y))$ , які задовольняють умови

$$\frac{\partial f[Z(x, y)]}{\partial Z(x, y)} + a_{2y}(x, y) + a_1(x, y)a_2(x, y) \geq 0, \quad \frac{\partial f[Z(x, y)]}{\partial Z(x, \theta(x, y))} \geq 0, \quad (27)$$

- 3) для всякої з простору  $C^*(\overline{D})$  функції  $V(x, y) \in \overline{B}$

$$f_1[V(x, y)] \geq (\leq) f[V(x, y)] \quad (28)$$

**Теорема 3.** *Нехай коефіцієнти  $a_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  задовольняють умову (8), а праві частини рівнянь (1), (26)  $f[u(x, y)]$  та  $f_1[Z(x, y)]$  задовольняють вище наведені умови 1)-3) і в області  $\overline{B}_1$  існують функції порівняння задач (1) – (7), (26), (2) – (7).*

*Тоді для розв'язків цих задач при  $(x, y) \in \overline{D}$  виконуються нерівності*

$$u(x, y) \geq (\leq) Z(x, y) \quad (29)$$

**Доведення.** Згідно теореми 2 і наслідку 1 розв'язки задач (1) – (7), (26), (2) – (7) існують і вони є єдині (регулярні або іррегулярні), а отже, позначивши  $W(x, y) := Z(x, y) - u(x, y)$  і використавши теорему Лагранжа про скінчені прирости, матимемо

$$\begin{aligned} W_{xy}(x, y) + a_1(x, y)W_x(x, y) + a_2(x, y)W_y(x, y) = \\ = b_1(x, y)W(x, y) + b_2(x, y)W(x, \theta(x, y)) + f_1[u(x, y)] - f[u(x, y)], \end{aligned}$$

де  $b_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  – частинні похідні першого порядку від функції  $f_1[Z(x, y)]$  відповідно по  $Z(x, y)$  та  $Z(x, \theta(x, y))$  при деяких їх фіксованих значеннях, що належать  $\overline{B}$ ,  $(x, y) \in \overline{D}$ .

Очевидно, функція  $W(x, y)$  задовольняє однорідні умови (2) – (6), а

$$\begin{aligned} F[W(x, y)] \equiv [b_1(x, y) + a_{2y}(x, y) + a_1(x, y)a_2(x, y)W(x, y) + \\ + b_2(x, y)W(x, \theta(x, y)) + f_1[u(x, y)] - f[u(x, y)]], \end{aligned}$$

тобто в силу (27), (28)  $F[0] \geq (\leq) 0$ . На підставі наслідку 2  $W(x, y) \geq (\leq) 0$  при  $(x, y) \in \overline{D}$ , тобто справедливі нерівності (29).

1. *Маринець В.В., Маринець Т.Й., Добридень А.В.* Про одну неklasичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу // Праці Міжнародного симпозиуму "Питання оптимізації обчислень" – Київ: Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАНУ, 2009. – Т.2. – С.79–84.
2. *Маринець В.В., Питювка О.Ю.* Про одну крайову задачу для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун-ту. Сер. матем і інформ. – 2010. – Вип.20. – С.79–89.
3. *Коллатц Л.* Функціональний аналіз и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448с.
4. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.
5. *Маринець В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журнал – 1995. – Т.47, №12. – С.1667–1675.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутіцкый Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Одержано 05.09.2011