

УДК 517.9

О. А. Резуненко (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ У СИСТЕМАХ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

The article devoted substantiate method userednennja for two dimension autonomous systems in impulse active in case, when point subject impulse active twice after period .

Дану статтю присвячено обґрунтуванню методу усереднення для двовимірних автономних систем з імпульсною дією у випадку, коли точка піддається імпульсній дії двічі за період.

Для практичного застосування важливим є вивчення диференціальних рівнянь з імпульсною дією, які зв'язані з потребами теорії керування, радіотехніки, біології, медицини.

В [1, 2] за допомогою асимптотичного методу Крилова-Боголюбова [3] розглянуто траєкторії матеріальної точки, яка рухається за законом

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad x \neq x_0, \quad (1)$$

і піддається імпульсній дії при проходженні положення $x = x_0$. В [4] обґрунтовується законність застосування даного методу для розглядуваних рухів.

Розглянемо коливну систему (1) з імпульсною дією

$$\Delta \dot{x} |_{x=x_0} = (\dot{x}_+ - \dot{x}_-)|_{x=x_0} = \begin{cases} \varepsilon I^0(\dot{x}_-), & x = x_0, \quad \dot{x}_- > 0, \\ \varepsilon I_0(\dot{x}_-), & x = x_0, \quad \dot{x}_- < 0, \end{cases} \quad (2)$$

де \dot{x}_- , \dot{x}_+ – швидкості точки до і після дії миттєвого імпульсу відповідно, ε – малий додатний параметр. Систему (1), (2) можна інтерпретувати як рух осцилятора (1), на який кожен раз при проходженні положення $x = x_0$ діє миттєвий імпульс, який збільшує швидкість осцилятора на величину $\varepsilon I^0(\dot{x}_-)$ при $\dot{x} > 0$ і зменшує швидкість осцилятора на величину $\varepsilon I_0(\dot{x}_-)$ при $\dot{x} < 0$.

Припустимо, що система (1), (2) має періодичний розв'язок, який в момент $t = 0$ приймає значення $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) > 0$, а в момент $t = t^*$ – значення $x(t^*) = x_0$, $\dot{x}(t^*) < 0$.

Позначимо через ν частоту коливань даного розв'язку. Моменти τ_k імпульсної дії для кожного такого розв'язку визначаються відношеннями $\nu \tau_{2k} = 2k\pi$, $\nu \tau_{2k+1} = \nu t^* + 2k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$ а скачки швидкості $\Delta \dot{x}$ в ці моменти – рівностями

$$\Delta \dot{x} = \begin{cases} \varepsilon I^0, & \dot{x}_- > 0, \\ \varepsilon I_0, & \dot{x}_- < 0. \end{cases}$$

З періодичності розв'язку випливає, що величини I^0, I_0 є сталими при всіх $\nu \tau_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Таким чином, періодичний розв'язок системи (1), (2) задовольняє рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \nu t \neq 2k\pi, \quad \nu t \neq \nu t^* + 2k\pi, \quad (3)$$

і умову

$$\Delta \dot{x} = \begin{cases} \varepsilon I^0, & \nu t = 2k\pi, \\ \varepsilon I_0, & \nu t = \nu t^* + 2k\pi, \end{cases} \quad (4)$$

де k ціле. З іншого боку, нехай система (3), (4) має для деяких ν і t_0 періодичні розв'язки з періодом 2π відносно νt . Очевидно, ці розв'язки є розв'язками системи (1), (2), якщо

$$\begin{aligned} x(0) = x_0, \quad I^0 = I(\dot{x}_-), \quad x\left(\frac{2k\pi}{\nu} - 0\right) = x_0, \quad \dot{x}_- = \dot{x}\left(\frac{2k\pi}{\nu} - 0\right) > 0, \quad \dot{x}_+(0) > 0, \\ x(t^*) = x_0, \quad I_0 = I(\dot{x}_-), \quad x\left(t^* + \frac{2k\pi}{\nu}\right) = x_0, \quad \dot{x}_- = \dot{x}\left(t^* + \frac{2k\pi}{\nu}\right) < 0, \quad \dot{x}_+(t^*) < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, щоб знайти періодичні розв'язки системи (1), (2), нам потрібно знайти такі періодичні розв'язки системи (3), (4) періоду 2π відносно νt і вибрати параметри ν і t_0, t^* , які б задовольняли співвідношення (5). Періодичний розв'язок системи (3) шукатимемо за умови, що частота періодичних розв'язків системи (1), (2) близька до частоти власних коливань системи (1), тобто $\nu \approx \omega$.

Представимо ν у вигляді

$$\nu^2 = \omega^2 + \varepsilon \bar{\Delta}, \quad (6)$$

де $\bar{\Delta}$ – деяка стала, яку потрібно визначити. Систему (3), (4) запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon [\bar{\Delta} x + f(x, \dot{x})], \quad \nu t \neq 2k\pi, \quad \nu t \neq \nu t^* + 2k\pi, \quad (7)$$

$$\Delta \dot{x} = \begin{cases} \varepsilon I^0, & \nu t = 2k\pi, \\ \varepsilon I_0, & \nu t = \nu t^* + 2k\pi. \end{cases} \quad (8)$$

Використовуючи формалізм узагальнених функцій, від системи (7), (8) перейдемо до рівняння

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon [\bar{\Delta} x + f(x, \dot{x})] + \varepsilon I^0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2k\pi}{\nu}\right) + \varepsilon I_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - t^* - \frac{2k\pi}{\nu}\right),$$

а від нього, враховуючи властивості дельта-функції – до рівняння

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon [\bar{\Delta} x + f(x, \dot{x})] + \varepsilon \frac{I^0 \nu}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\nu t\right) + \varepsilon \frac{I_0 \nu}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\nu(t - t^*)\right). \quad (9)$$

У системі (9) виконаємо заміну змінних

$$x = \varepsilon \frac{I^0}{\pi \nu} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu t}{k^2 - 1}\right) + \varepsilon \frac{I_0}{\pi \nu} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu(t - t^*)}{k^2 - 1}\right) + z. \quad (10)$$

Тоді, відносно z отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \nu^2 z = \varepsilon [\bar{\Delta} z + f(z + \varepsilon I^0 \varphi(\nu t) + \varepsilon I_0 \varphi(\nu(t - t^*)), \dot{z} + \varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t) + \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu(t - t^*))) + \\ + \varepsilon \bar{\Delta} I^0 \varphi(\nu t) + \varepsilon \bar{\Delta} I_0 \varphi(\nu(t - t^*))] + \frac{\varepsilon I^0 \nu}{\pi} \cos \nu t + \frac{\varepsilon I_0 \nu}{\pi} \cos \nu(t - t^*), \end{aligned} \quad (11)$$

у якому введено наступні позначення

$$\varphi(\nu t) = \frac{1}{\pi \nu} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu t}{k^2 - 1}\right), \quad \varphi(\nu(t - t^*)) = \frac{1}{\pi \nu} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu(t - t^*)}{k^2 - 1}\right).$$

Співвідношення (5) відносно змінної z матимуть вигляд

$$\begin{aligned} z(0) &= x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(0) - \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*), \quad I^0 = I(\dot{z}(0)) - \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu t^*), \quad z(0) > \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*), \\ z(t^*) &= x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(\nu t^*) - \varepsilon I_0 \varphi(0), \quad I_0 = I(\dot{z}(t^*)) + \varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t^*), \quad z(t^*) < -\varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t^*). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким чином, нам потрібно знайти періодичні розв'язки $z(t)$ рівняння (11) періоду 2π відносно νt , які задовольняли б умови (12). Щоб знайти ці умови, виконаємо в (11), (12) заміну змінних

$$z = a \cos \psi, \quad \dot{z} = -a\nu \sin \psi, \quad \psi = \nu t + \theta, \quad (13)$$

де $a = a(t)$, $\theta = \theta(t)$.

Остаточно прийдемо до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\nu} [\bar{\Delta} a \cos \psi + f(a \cos \psi + \varepsilon I^0 \varphi(\nu t) + \varepsilon I_0 \varphi(\nu(t-t^*)), -a\nu \sin \psi + \\ &+ \varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t)) + \varepsilon I_0 \varphi(\nu(t-t^*)) + \varepsilon \bar{\Delta} I^0 \varphi(\nu t) + \varepsilon \bar{\Delta} I_0 \varphi(\nu(t-t^*))] \sin \psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon I^0}{\pi} \cos \nu t \sin \psi - \frac{\varepsilon I_0}{\pi} \cos \nu(t-t^*) \sin \psi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a\nu} [\bar{\Delta} a \cos \psi + f(a \cos \psi + \varepsilon I^0 \varphi(\nu t) + \varepsilon I_0 \varphi(\nu(t-t^*)), -a\nu \sin \psi + \\ &+ \varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t)) + \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu(t-t^*)) + \varepsilon \bar{\Delta} I^0 \varphi(\nu t) + \varepsilon \bar{\Delta} I_0 \varphi(\nu(t-t^*))] \cos \psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon I_0}{a\pi} \cos \nu(t-t^*) \cos \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

При цьому умови (12) для змінних a, θ матимуть вигляд

$$\begin{aligned} a_0 \cos \theta_0 &= x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(0) - \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*), \quad I^0 = I(-a_0 \nu \sin \theta_0 - \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu t^*)), \\ &\quad -a_0 \nu \sin \theta_0 > \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu t^*), \\ a^* \cos(\nu t^* + \theta_0) &= x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(\nu t^*) - \varepsilon I_0 \varphi(0), \quad I_0 = I(-a^* \nu \sin(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t^*)), \\ &\quad -a^* \nu \sin(\nu t^* + \theta_0) < -\varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t^*). \end{aligned} \quad (15)$$

Припустимо, що функція $f(x, \dot{x})$ в області

$$\nu^2 \alpha^2 \leq \nu^2 x^2 + y^2 \leq \beta^2 \nu^2,$$

задовольняє умову Ліпшиця відносно x, \dot{x} . Тоді система (14) є при малих ε T -системою $T = \frac{2\pi}{\nu}$ [5] в проміжку

$$0 < \alpha \leq a \leq \beta. \quad (16)$$

Згідно [5] будь-яка внутрішня точка смуги (16) має Δ -сталу і ця стала визначається з точністю до величин другого порядку малості з системи

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{\varepsilon}{\nu} A(a_0) - \frac{\varepsilon I^0}{2\pi} \sin \theta_0 - \frac{\varepsilon I_0}{2\pi} \sin(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon^2 \dots, \\ \Delta_2 &= -\frac{\varepsilon \bar{\Delta}}{2\nu} - \frac{\varepsilon}{a_0 \nu} B(a_0) - \frac{\varepsilon I^0}{2a_0 \pi} \cos \theta_0 - \frac{\varepsilon I_0}{2a_0 \pi} \cos(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\nu \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ B(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\nu \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (17)$$

При цьому, розв'язок системи (14) є періодичним з періодом 2π відносно νt , якщо a_0 і θ_0 задовольняють умови

$$-\frac{\varepsilon}{\nu} A(a_0) - \frac{\varepsilon I^0}{2\pi} \sin \theta_0 - \frac{\varepsilon I_0}{2\pi} \sin(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon^2 \dots = 0, \quad (18)$$

$$-\frac{\varepsilon \bar{\Delta}}{2\nu} - \frac{\varepsilon}{a_0 \nu} B(a_0) - \frac{\varepsilon I^0}{2a_0 \pi} \cos \theta_0 - \frac{\varepsilon I_0}{2a_0 \pi} \cos(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon^2 \dots = 0. \quad (19)$$

Більш того, вказаний періодичний розв'язок є границею послідовності

$$\begin{aligned} a_n(t) &= a_0 - \frac{\varepsilon}{\nu} \int_0^t [F_1(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon) - \overline{F_1(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon)}] dt, \\ \theta_n(t) &= \theta_0 - \frac{\varepsilon}{\nu} \int_0^t [F_2(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon) - \overline{F_2(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon)}] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

де $-\frac{\varepsilon}{\nu} F_1(t, a, \theta)$ і $-\frac{\varepsilon}{\nu} F_2(t, a, \theta)$ правими частинами, відповідно, першого і другого рівнянь системи (14),

$$\overline{F(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\nu}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Зокрема, при $n = 1$ з (20) знаходимо з точністю до величин порядку ε^2

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 - \frac{\varepsilon \bar{\Delta}}{\nu^2} a_0 \frac{\cos 2\theta_0 - \cos 2(\nu t + \theta_0)}{4} - \frac{\varepsilon}{\nu^2} \int_{\theta_0}^{\nu t + \theta_0} f(a \cos \psi, -a\nu \sin \psi) \sin \psi d\psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon I^0}{\pi \nu} \frac{\cos \theta_0 - \cos(2\nu t + \theta_0)}{4} - \frac{\varepsilon I_0}{\pi \nu} \frac{\cos(\nu t^* - \theta_0) - \cos(2\nu t + \theta_0 - \nu t^*)}{4}, \\ \theta(t) &= \theta_0 - \frac{\varepsilon \bar{\Delta}}{\nu^2} a_0 \frac{\sin 2(\nu t + \theta_0) - \sin 2\theta_0}{4} - \frac{\varepsilon}{a_0 \nu^2} \int_{\theta_0}^{\nu t + \theta_0} f(a \cos \psi, -a\nu \sin \psi) \cos \psi d\psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon I^0}{a_0 \pi \nu} \frac{\sin(2\nu t + \theta_0) - \sin \theta_0}{4} - \frac{\varepsilon I_0}{a_0 \pi \nu} \frac{\sin(2\nu t + \theta_0 - \nu t^*) + \sin(\nu t^* - \theta_0)}{4}. \end{aligned} \quad (21)$$

Оскільки $\bar{\Delta}$ - є неперервною функцією від a_0 , θ_0 , параметрів I^0 , I_0 , $\bar{\Delta}$, ε і задовольняє умову Ліпшиця відносно a_0 , θ_0 , I^0 , I_0 , $\bar{\Delta}$, ε , то розв'язок рівняння (19) завжди може бути представлений у вигляді

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(a_0, \theta_0, I^0, I_0, \varepsilon), \quad (22)$$

причому функція $\bar{\Delta}$ неперервна по сукупності всіх своїх змінних в області їх зміни і задовольняє в цій області умову Ліпшиця відносно a_0 , θ_0 , I^0 , I_0 , ε . З (19) видно, що з точністю до величин порядку ε маємо

$$\bar{\Delta}(a_0, \theta_0, I^0, I_0, \varepsilon) = \bar{\Delta}(a_0, \theta_0, I^0, I_0, 0) = -2 \frac{B(a_0)}{a_0} - \frac{\omega I^0}{a_0 \pi} \cos \theta_0 - \frac{\omega I_0}{a_0 \pi} \cos(\nu t^* + \theta_0). \quad (23)$$

З точністю до ε з (18) отримаємо співвідношення для початкових значень періодичних розв'язків системи (14) які визначаються рівністю

$$A(a_0) + \frac{\omega I^0}{2\pi} \sin \theta_0 + \frac{\omega I_0}{2\pi} \sin(\nu t^* + \theta_0) = 0. \quad (24)$$

Очевидно періодичними розв'язками системи (1),(2) є лише ті значення періодичних розв'язків системи (14), початкові значення яких задовольняють співвідношення (15). Тому для відшукування цих значень достатньо розв'язати систему співвідношень (15), (18).

Оскільки a_0 береться із відрізка (16), то з (15) випливає, що

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(0) - \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*)}{a_0}, \quad \sin \theta_0 = -\sqrt{1 - \left(\frac{x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(0) - \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*)}{a_0} \right)^2}, \\ \cos(\nu t^* + \theta_0) &= \frac{x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(\nu t^*) - \varepsilon I_0 \varphi(0)}{a_0}, \quad \sin(\nu t^* + \theta_0) = \sqrt{1 - \left(\frac{x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(\nu t^*) - \varepsilon I_0 \varphi(0)}{a_0} \right)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

то при малих ε з урахуванням (25), нерівності з (15) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \nu \sqrt{a_0^2 - (x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(0) - \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*))^2} &> \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu t^*), \\ -\nu \sqrt{a_0^2 - (x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(\nu t^*) - \varepsilon I_0 \varphi(0))^2} &< -\varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t^*). \end{aligned}$$

Підставимо (25) в співвідношення яке залишилося з (15), вважаючи що $|x_0| < a$, отримаємо замість (15) співвідношення (25) і рівняння

$$\begin{aligned} I^0 &= I(\nu \sqrt{a_0^2 - (x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(0) - \varepsilon I_0 \varphi(\nu t^*))^2}) - \varepsilon I_0 \dot{\varphi}(\nu t^*), \\ I_0 &= I(-\nu \sqrt{a_0^2 - (x_0 - \varepsilon I^0 \varphi(\nu t^*) - \varepsilon I_0 \varphi(0))^2}) + \varepsilon I^0 \dot{\varphi}(\nu t^*). \end{aligned} \quad (26)$$

Нехай функція $I(\dot{x})$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $0 \leq \dot{x} \leq \nu\beta$, тоді при малих ε одержуємо

$$\begin{aligned} I^0 &= I^0(a_0, \varepsilon), \\ I_0 &= I_0(a_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

причому функції $I^0(a_0, \varepsilon)$, $I_0(a_0, \varepsilon)$ також задовольняють умову Ліпшиця по a_0 , ε . З (26) видно, що з точністю до величини порядку ε

$$\begin{aligned} I^0(a_0, \varepsilon) &= I^0(a_0, 0) = I(\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2}), \\ I_0(a_0, \varepsilon) &= I_0(a_0, 0) = I(-\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2}). \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, систему співвідношень (15), (18), (22) ми звели до системи (18), (22), (25), (27).

Підставимо (27) в (25), виразимо θ_0 через a_0 а потім (27) і (25) – в (22), виразимо $\bar{\Delta}$ через a_0 . Поступаючи аналогічно, з урахуванням (6), (28), отримаємо вираз

$$A(a_0) - \frac{I(\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2})\omega}{2\pi a_0} \sqrt{a_0^2 - x_0^2} + \frac{I(-\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2})\omega}{2\pi a_0} \sqrt{a_0^2 - x_0^2} + \varepsilon \dots \quad (29)$$

Оскільки ліві частини (27) неперервні відносно a_0 , ε , то вираз (29) має при малих ε розв'язок, якщо функція

$$D(a_0) = A(a_0) - \frac{I(\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2})\omega}{2\pi a_0} \sqrt{a_0^2 - x_0^2} + \frac{I(-\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2})\omega}{2\pi a_0} \sqrt{a_0^2 - x_0^2}, \quad (30)$$

прийме на інтервалі $\alpha < a_0 < \beta$ значення різних знаків [6]. Крім того, розв'язок системи (29) неперервний по ε з точністю до величин порядку $\delta(\varepsilon)$, де $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, і визначаються розв'язками рівняння

$$D(a_0) = 0. \quad (31)$$

Отже, для забезпечення існування періодичних розв'язків системи (1), (2), достатньо, щоб рівняння (31) мало розв'язок, який належав би відрізку $|x_0| < \alpha < a_0 \leq \beta$ разом із деяким своїм ρ -околом, і щоб цей розв'язок не був точкою екстремуму функції $D(a_0)$.

Враховуючи формули (6), (23), (25), (28) отримаємо значення для частоти періодичного розв'язку

$$\nu = \omega + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \bar{\Delta}}{\omega} + \varepsilon^2 + \dots = \omega - \varepsilon \left(\frac{B(a_0)}{a_0 \omega} - \frac{I(\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2}) x_0}{2\pi a_0^2} - \frac{I(-\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2}) x_0}{2\pi a_0^2} \right). \quad (32)$$

Отже, згідно замін (10), (13), періодичні розв'язки системи (1), (2), з точністю до величин порядку $\delta(\varepsilon)$ визначаються виразом

$$x(t) = \varepsilon \frac{I(\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2})}{\pi \omega} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu(t+s)}{k^2-1} \right) + \varepsilon \frac{I(-\omega \sqrt{a_0^2 - x_0^2})}{\pi \omega} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\nu(t-t^*+s)}{k^2-1} \right) + a(t+s) \cos(\nu(t+s) + \theta(t+s)), \quad (33)$$

де $a(t)$, $\theta(t)$ – вигляду (21), ν – приймає значення (32), a_0 – є коренем рівняння (31), s – довільна стала. Таким чином доведено таку теорему.

Теорема. Нехай в системі (1), (2) функції $f(x, \dot{x})$ і $I(\dot{x})$ визначені, неперервні, і задовольняють умову Ліпшица відносно своїх змінних в області

$$\alpha^2 \leq x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} \leq \beta^2, \quad \text{де } |x_0| < \alpha \leq \beta, \quad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Крім того, нехай рівняння (31) має розв'язок $a = a_0$, який належить відрізку $\alpha \leq a_0 \leq \beta$ разом з деяким своїм ρ -околом, і такий що не є точкою екстремуму.

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$ система рівнянь (1),(2) має одну параметричну сімю періодичних розв'язків

$$x(t) = x(\omega_1(t+s), \varepsilon) = a(\omega_1(t+s), \varepsilon) \cos \varphi(\omega_1(t+s)),$$

що задовольняє нерівності

$$|a(t) - a_0| + |\omega_1 - \omega - \varepsilon \Delta(a_0)| \leq \eta(\varepsilon),$$

в якій s – довільна стала, $\eta(\varepsilon)$ – стала, що прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

1. *Самойленко А. М.* Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами, в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, УМЖ. – 1961. – Т.13, №3.
2. *Самойленко А. М.* Исследование дифференциальных уравнений с "нерегулярной" правой частью, III. Konferenz uber nichtlineare Schwingungen, Akademie – Verlag, Berlin, 1965.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958. – 218с.
4. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, УМЖ. – 1962. – Т.11, №3.
5. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, I, УМЖ. – 1965. – Т.17, №4. – С.82 – 93.
6. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, II, УМЖ. – 1966. – Т.18, №2. – С.50 – 59.

Одержано 25.10.2011