УДК 512.5+512.6

О. М. Тертична (Київський нац. економ. ун-т ім. Вадима Гетьмана)

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СКІНЧЕННИХ НАПІВГРУП $\mathbf{S(I,J)}$

In this paper we study a property of matrix representations for a natural class of semigroups generated by idempotents.

У цій статті вивчається одна властивість матричних зображень для природного класу скінченних напівгруп, породжених ідемпотентами.

Нехай I — скінченна множина, яка не містить елемента 0, і J — підмножина в $I\times I$ без діагональних елементів (тобто без елементів вигляду (i,i)). Позначимо через $S(I,J)$ напівгрупу з твірними елементами e_i, де $i\in I\cup 0$, і наступними визначальними співвідношеннями:

1) $e_0=0$ ($e_0e_i=e_ie_0=0$ для $i\in I\cup 0$);
2) $e_i^2=e_i$ для довільного $i\in I$;
3) $e_ie_j=0$ для довільної пари $(i,j)\in J$.

Напівгрупа такого типу називається *напівгрупою, породженою ідемпотентами з частковим нульовим множенням.* Множину всіх таких напівгруп позначимо через $\mathcal{I}$.

Матричні зображення напівгруп $S(I,J)$ досліджувалися в ряді робіт (див., зокрема, [1], [2] і [3]). У цій роботі продовжується вивчення зображень таких напівгруп.

1. Формулювання основного результату. У цій статті ми розглядаємо скінченновимірні матричні зображення напівгруп $S\in\mathcal{I}$ над довільним полем k.

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $S=S(I,J)\in\mathcal{I}$ над полем k — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) набір матриць розміру $n\times n$ $M=\{M(e_i)\mid i\in I\cup 0\}$ з елементами із k, такий, що виконуються наступні умови:

1) $M(e_0)=0$;
2) $[M(e_i)]^2=M(e_i)$ для довільного $i\in I$;
3) $M(e_i)M(e_j)=0$ для довільної пари $(i,j)\in J$.

Говорячи про матричне зображення M напівгрупи $S(I,J)$, ми будемо вказувати лише матриці $M(e_i)$ для $i\neq 0$.

Еквівалентність матричних зображень $M=\{M(e_i)\mid i\in I\}$ і $N=\{N(e_i)\mid i\in I\}$ напівгрупи $S(I,J)$ означає існування оборотної матриці C, такої, що $M(e_i)=C^{-1}N(e_i)C$ для всіх $i\in I$.

Кожній напівгрупі $S=S(I,J)\in\mathcal{I}$ (або, що те ж саме, парі (I,J)) поставимо у відповідність такий орієнтований граф $\Lambda=(\Lambda_0,\Lambda_1)$ з множиною вершин Λ_0 і множиною стрілок Λ_1: $\Lambda_0=\mathcal{E}(I)=\{e_i\,|\,i\in I\}$, а Λ_1 складається зі стрілок $e_i\to e_j$, де (i,j) пробігає множину J. Позначимо цей граф через $\Lambda=\Lambda(I,J)=\Lambda(S)$.

Проте далі важливішу роль буде грати орієнтований граф $\overline{\Lambda}=\overline{\Lambda}(I,J)=\overline{\Lambda}(S)$ з множиною вершин $\overline{\Lambda}_0$ та множиною стрілок $\overline{\Lambda}_1$, який визначається в такий спосіб: $\overline{\Lambda}_0=\Lambda_0$, а $e_i\to e_j$ належить $\overline{\Lambda}_1$ тоді і лише тоді, коли $e_i\to e_j$

не належить Λ_1 і при цьому $i \neq j$. Іншими словами, орієнтований граф $\overline{\Lambda}$ є доповненням графа Λ до повного орієнтованого графа без петель (тобто такого орієнтованого графа, який не має стрілок вигляду $a \to a$ і має в точності одну стрілку $a \to b$ для довільних вершин a і $b \neq a$).

Очевидно, що напівгрупа $S \in \mathcal{I}$ однозначно відтворюється по кожному із вказаних орієнтованих графів.

У статті [1] було доведено, що напівгрупа $S = S(I, J)$ скінченна тоді і лише тоді, коли граф $\overline{\Lambda}(S)$ ациклічний (тобто не містить орієнтованих циклів).

Матрицю $A \in Mat_{n\times n}(k)$ назвемо *майже невиродженою*, якщо x^2 не ділить її мінімальний многочлен $m_A(x)$.

Лема 1. *Квадратна матриця P є майже невиродженою тоді і лише тоді, коли вона подібна прямій сумі невиродженої матриці A і нульової матриці B (матриця A або B може бути нульової розмірності).*

Доведення. Доведемо спочатку достатність. Нехай існує оборотна матриця

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right),$$

така, що виконується матрична рівність

$$P = X^{-1}QX = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right),$$

де A — невироджена матриця, а $B = 0$ (розбиття матриці X узгоджене з розбиттям матриці Q). Доведемо, що матриця P майже невироджена.

Як відомо (будемо користуватися елементарними фактами із лінійної алгебри без додаткових посилань), для невиродженої матриці A розмірності $d \geq 1$ виконується $m_A(0) \neq 0$ (тобто, якщо $m_A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{s-1}x^{s-1} + x^s$, то вільний член α_0 не дорівнює нулю). Мінімальним многочленом нульової матриці B є $m_B(x) = x$. Оскільки подібні матриці мають однакові мінімальні многочлени, а мінімальний многочлен прямої суми матриць дорівнює найменшому спільному кратному їх мінімальних многочленів (зокрема, у нашому випадку $m_A(x)$ та $m_B(x)$ не мають спільних лінійних множників), то

$$m_P(x) = m_Q(x) = m_A(x)m_B(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{s-1}x^{s-1} + x^s)x =$$
$$= \alpha_0 x + \alpha_1 x^2 + \ldots + \alpha_{s-1}x^s + x^{s+1}.$$

Звідси (за нерівністю $\alpha_0 \neq 0$) випливає, що x^2 не ділить $m_P(x)$. Отже, згідно означення матриця P є майже невиродженою.

Тепер доведемо необхідність твердження цієї леми. Нехай матриця $P \in Mat_{n\times n}(k)$ майже невироджена. Відомо, що довільна матриця подібна прямій сумі невиродженої та нільпотентної матриць, тоді існує така невироджена матриця

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right),$$

що виконується матрична рівність

$$P = X^{-1}QX = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right),$$

де A — невироджена, а B — нільпотентна матриця. Доведемо, що $B = 0$.

Як вже згадувалось вище, мінімальний многочлен невиродженої матриці A має вигляд $m_A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{s-1}x^{s-1} + x^s$, де $\alpha_0 \neq 0$. Із теореми про канонічну форму Жордана випливає, що нільпотентна матриця B подібна прямій сумі клітин Жордана з єдиним власним значенням 0. Тому мінімальний многочлен для B має вигляд $m_B(x) = x^p$, де p ($1 \leq p \leq n$) дорівнює найбільшому розміру клітини Жордана з власним числом 0.

Таким чином, для матриці P мінімальним многочленом є

$$m_P(x) = m_Q(x) = m_A(x)m_B(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{s-1}x^{s-1} + x^s)x^p =$$

$$= \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p+1} + \ldots + \alpha_{s-1}x^{p+s-1} + x^{p+s}.$$

А оскільки P майже невироджена (тобто $x^2 \nmid m_P(x)$), то отримаємо, що $p < 2$ (а саме, $p = 1$). Отже, $m_B(x) = x$, звідки випливає, що $B = 0$.

Лема 1 доведена.

Із установленої у роботах [2] і [3] нормальної форми матричних зображень скінченних напівгруп $S(I,J) \in \mathfrak{I}$ випливає таке твердження.

Теорема 1. *Якщо $S = S(I,J)$ — скінченна напівгрупа із $\mathfrak{I}$ і $M = \{M(e_i) \mid i \in I\}$ — її довільне фіксоване матричне зображення над полем k, то матриця $P = \sum_{i \in I} M(e_i)$ є майже невиродженою.*

У цій статті ми доведемо цей факт безпосередньо.

2. Доведення теореми. Доведення теореми 1 будемо проводити за індукцією по n, де $n = |I|$.

База індукції. Нехай $n = 1$, тоді існує лише одна напівгрупа $S = S(I,J)$ із $\mathfrak{I}$, і вона має вигляд $S = \langle 0, e_1 \mid e_1^2 = e_1 \rangle$. Її орієнтований граф $\overline{\Lambda}(S)$ складається лише з однієї вершини e_1 і не має стрілок. Довільне матричне зображення M напівгрупи $S(I,J)$ складається з однієї матриці $M = \{M(e_1)\}$, при цьому виконується співвідношення $[M(e_1)]^2 = M(e_1)$. Із теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що матриця $M(e_1)$ подібна матриці

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \tag{1}$$

де E — одинична матриця. Тобто існує оборотна матриця

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array} \right),$$

така, що виконується матрична рівність

$$M(e_1) = X^{-1}A_0X = \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array} \right).$$

Таким чином, матриця $P = M(e_1)$ подібна прямій сумі невиродженої (одиничної) та нульової матриць, а, отже, за лемою 1 P є майже невиродженою, що й доводить базу індукції.

Припущення індукції. Нехай n — довільне натуральне число. Припустимо, що для будь-якої скінченної напівгрупи $S(I,J)$, яка породжена ідемпотентами

$e_0, e_1, \ldots, e_n$ і має (ациклічний) граф $\overline{\Lambda}(S)$ (із n вершин), виконується твердження теореми.

Крок індукції. Доведемо, що теорема виконується для $|I| = n+1$. Нехай $S = S(I, J) \in \mathfrak{I}$ — довільна скінченна напівгрупа, породжена ідемпотентами $e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}$, з (ациклічним) орієнтованим графом $\overline{\Lambda}(S)$. Покажемо, що для довільного фіксованого зображення $M = \{M(e_i) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ напівгрупи $S(I, J)$ над полем k матриця $P = \sum\limits_{i=1}^{n+1} M(e_i)$ є майже невиродженою.

За означенням матричного зображення напівгрупи $S(I, J)$ із $\mathfrak{I}$ маємо такі співвідношення: $[M(e_i)]^2 = M(e_i)$ для всіх $i = 1, \ldots, n+1$ і $M(e_i)M(e_j) = 0$ для всіх пар $(i, j) \in J$. Покладемо $A_1 = M(e_1), \ldots, A_{n+1} = M(e_{n+1})$, тоді $P = \sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i$.

Спочатку знаходимо в графі $\overline{\Lambda}(S)$ таку вершину, з якої не виходить жодної стрілки (у силу ациклічності графа $\overline{\Lambda}(S)$ хоча б одна така вершина завжди існує). Нехай вершина e_l $(1 \le l \le n+1)$ задовольняє цю умову.

Далі розглянемо піднапівгрупу S' напівгрупи S, яка породжена твірними $e'_0, e'_1, \ldots, e'_n$, де $e'_0 = e_0,\ e'_1 = e_1, \ldots,\ e'_{l-1} = e_{l-1},\ e'_l = e_{l+1}, \ldots,\ e'_n = e_{n+1}$. Очевидно, що граф $\overline{\Lambda}(S')$ співпадає з графом $\overline{\Lambda}(S) \setminus e_l$, а набір матриць $T = \{T(e'_1), \ldots, T(e'_n)\}$, де $T(e'_1) = A_1, \ldots, T(e'_{l-1}) = A_{l-1},\ T(e'_l) = A_{l+1}, \ldots,\ T(e'_n) = A_{n+1}$, є матричним зображенням напівгрупи S'.

За припущенням індукції для матричного зображення T напівгрупи S' матриця $P' = \sum\limits_{i=1}^{n} T(e'_i) = A_1 + \ldots + A_{l-1} + A_{l+1} + \ldots + A_{n+1} = P - A_l$ є майже невиродженою. Тоді з леми 1 випливає, що існує оборотна матриця

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right),$$

така, що виконується матрична рівність

$$P' = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right), \tag{2}$$

де P_0 — невироджена матриця. При цьому матриця A_l набуде такого вигляду:

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right). \tag{3}$$

Оскільки в графі $\overline{\Lambda}(S)$ з вершини e_l не виходить жодної стрілки (в силу вибору цієї вершини), то $A_l A_j = 0$ для всіх $j \in I \setminus l$. Зокрема, виконується співвідношення $A_l \left(\sum_{j \in I \setminus l} A_j\right) = 0$ (або, що те ж саме, $A_l P' = 0$). Звідси, враховуючи рівності (2) і (3), випливає:

$$\left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Домноживши цю рівність зліва на X і справа на X^{-1}, отримаємо (після перемноження матриць) рівність

$$\left(\begin{array}{c|c} B_1 P_0 & 0 \\ \hline B_3 P_0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

з якої (оскільки матриця P_0 невироджена) випливає, що $B_1 = B_3 = 0$. Таким чином, матриця A_l із (3) тепер має вигляд:

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right). \tag{4}$$

Легко переконатися, що з рівності $A_l^2 = A_l$ випливає $B_4^2 = B_4$; а (як було зазначено вище) ідемпотентна матриця подібна матриці A_0 (див. (1)). Отже, існує оборотна матриця

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix},$$

така, що виконується матрична рівність

$$B_4 = Y^{-1} A_0 Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Розглянемо далі таку матрицю:

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right).$$

Вона невироджена, оскільки невиродженою є матриця Y. Тоді, враховуючи рівність (5), отримаємо (як рівність блокових матриць) наступне:

$$Z \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) Z^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 Y^{-1} \\ \hline 0 & Y B_4 Y^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 Y^{-1} \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right),$$

звідки (враховуючи вигляд мариць A_0 і Z та замінивши $B_2 Y^{-1}$ на C) випливає

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & B_4 \end{array}\right) = Z^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & C \\ \hline 0 & A_0 \end{array}\right) Z =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & C_2 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right). \tag{6}$$

До того ж

$$Z \left(\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) Z^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

звідки випливає

$$\left(\begin{array}{c|c} P_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} P_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} E & 0 & 0 \\ \hline 0 & Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{array}\right). \tag{7}$$

Підставивши рівність (6) в (4), одержимо наступний вигляд для матриці A_l:

$$A_l = X^{-1}Z^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & C_2 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX = (ZX)^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & C_2 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX; \qquad (8)$$

а після підстановки рівності (7) в (2), матриця P' набуде такого вигляду:

$$P' = X^{-1}Z^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} P_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX = (ZX)^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} P_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ZX, \qquad (9)$$

де матриця X вже буде мати наступний вигляд:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & X_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} X_1 & X_2^{11} & X_2^{12} \\ \hline X_3^{11} & X_4^{11} & X_4^{12} \\ X_3^{21} & X_4^{21} & X_4^{22} \end{array}\right).$$

Зі співвідношення $A_l^2 = A_l$ маємо $C_2 = 0$. Отже, враховуючи (8) і (9), (якщо попередньо покласти $V = ZX$) матриці A_l і P' остаточно будуть мати вигляд

$$A_l = V^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & C_1 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) V, \quad P' = V^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} P_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) V, \qquad (10)$$

де матриця V невироджена, оскільки такими є X і Z.

Оскільки матриця P' дорівнює $P - A_l$ (див. вище), то з (10) випливає, що

$$P = P' + A_l = V^{-1}\left(\begin{array}{c|cc} P_0 & C_1 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) V.$$

Таким чином, матриця $P = \sum\limits_{i=1}^{n+1} M(e_i)$ подібна прямій сумі невиродженої матриці

$$\left(\begin{array}{c|c} P_0 & C_1 \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$$

та нульової матриці, а, отже, за лемою 1 P є майже невиродженою, що й доводить крок індукції.

Отже, згідно з методом математичної індукції теорема 1 доведена.

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Бондаренку за увагу до роботи та цінні поради.

1. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 23–44.
2. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15–22.
3. *Тертична О. М.* Матричні зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням: дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06 – К., 2009. – 167 с.

Одержано 14.09.2011