УДК 519.8

**А. Ю. Брила** (Ужгородський нац. ун-т)

# ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ПАРЕТІВСЬКОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ

The method of finding of attainable optimum solutions of linear problem of lexicographic-pareto multicriteria optimization with alternative criteria by reduce it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічно-паретівської багатокритеріальної оптимізації з альтернативними критеріями шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

**Вступ** Прикладні задачі лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями виникають у різних сферах людської діяльності, в яких рішення приймається на основі багатьох критеріїв, що розбито на групи. В межах кожної із груп критерії вважаються рівноважливими, а групи упорядковано за важливістю у субординації строгого ранжирування.

Для розв'язання задачі лексикографічно-паретівської оптимізації в [1] запропоновано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі лексикографічної оптимізації. У [2] запропоновано метод розв'язання лексикографічно-паретівської задачі шляхом зведення її до однокритеріальної задачі лінійного програмування з використанням відповідної лінійної згортки критеріїв. У даній статті результати отримані у [2] застосовуються для розв'язання задач лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями та задач лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв.

**1. Задача лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями.** Розглянемо лінійну задачу лексикографічно-паретівської максимізації ( [1])

$$\max{}^{LP} c\,(x)\,,\ x \in X, \tag{1}$$

де $c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x))$ – векторна згортка критеріїв $c_k(x),\ k=1, 2, ..., q$ у субординації строгого ранжирування $Rg\,(1, 2, ..., q)$, а кожен з критеріїв $c_k\,(x) = (c_{k1}\,(x)\,, c_{k2}\,(x)\,, ..., c_{kq_k}\,(x))\,,\ k \in \{1, 2, ..., q\}$, в свою чергу, є векторною згорткою критеріїв $c_{ki},\ i = 1, 2, ..., q_k$ у субординації рівної важливості $Rv$. Множина допустимих розв'язків $X$ задається системою лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Будемо вважати, що $c_{ki}\,(x) \ge 0,\ x \in X,\ k = 1, 2, ..., q,\ i = 1, 2, ..., q_k$.

Якщо розв'язок лінійної багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної задачі лінійного програмування, з цільовою функцією, яка є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають, що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Нехай

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{ki} c_{ki}(x),$$

де $\bar{\alpha}_{ki} > 0, i = 1, 2, ..., q_k, k = 1, 2, ..., q,\ \sum\limits_{i=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{ki} = 1, k = 1, 2, ..., q.$

У [1] показано, що задача (1) може бути зведена до задачі

$$\max{}^L f(x), x \in X, \tag{2}$$

де $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$. Вибравши додатні коефіцієнти $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_q$ згідно [2–6], задачу (2) можна звести до задачі лінійного програмування

$$\max\ \bar{B}(x) = \sum_{k=1}^{q} \bar{\beta}_k f_k(x), \quad x \in X. \tag{3}$$

На основі задач (1)-(3) розглянемо задачу, в якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki},\ m_{ki} \in R,\ k \in \{1, 2, ..., q\}, i \in \{1, 2, ..., q_k\}.$$

Такий критерій назвемо допустимим, а дану задачу назвемо задачею лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними критеріями.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$B(x) = \sum_{k=1}^{q} \bar{\beta}_k \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} c_{ki}(x) \tag{4}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{6}$$

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki} y_{ki},\ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{7}$$

$$\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ki} y_{ki},\ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{q_k} y_{ki} = 1, \tag{9}$$

$$y_{ki} \in \{0, 1\},\ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k. \tag{10}$$

Нехай $\left(\widehat{x}, \widehat{y}\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (4)-(10).

**Теорема 1.** *Вектор* $\widehat{x}$ *є розв'язком задачі лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативими критеріями, в якій вибір знійснюється на основі допустимого критерію якнайвищого рангу.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\beta}_k,\ k = 1, 2, ..., q$ та коефіцієнтів $\bar{\alpha}_{ki},\ k = 1, 2, ..., q,\ i = 1, 2, ..., q_k$.

Очевидно, якщо оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору $d$, $d \geq 1$ допустимих критеріїв, то обмеження (9) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{q_k} y_{ki} = d.$$

**2. Задача лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв.** На основі задач (1)-(3) побудуємо задачу, у якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки одну групу критеріїв якнайвищого рангу, тобто тільки один векторний критерій $c_k\left(x\right),\ k \in \{1, 2, ..., q\}$, який є векторною згорткою критеріїв $c_{ki}$, $i = 1, 2, ..., q_k$ у субординації рівної важливості $Rv$ і

$$c_{ki}\left(x\right) \geq m_{ki},\ i = 1, 2, ..., q_k. \tag{11}$$

Такий векторний критерій будемо вважати допустимим, а саму задачу назвемо задачею лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$B\left(x\right) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \sum_{i=1}^{q_k} \bar{\alpha}_{ki} c_{ki}\left(x\right) \tag{12}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{13}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{14}$$

$$c_{ki}\left(x\right) \geq m_{ki}y_k,\ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{15}$$

$$\beta_k = \bar{\beta}_k y_k,\ k = 1, 2, ..., q, \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = 1, \tag{17}$$

$$y_k \in \{0, 1\}\,,\ k = 1, 2, ..., q. \tag{18}$$

Нехай $\left(\widehat{x}', \widehat{y}'\right) \in R^{n+q}$ є оптимальним розв'язком задачі (12)-(18).

**Теорема 2.** *Вектор* $\widehat{x}'$ *є розв'язком задачі лексикографічно-паретівської оптимізації з альтернативними групами критеріїв, у якій вибір здійснюється на основі допустимого векторного критерію якнайвищого рангу.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\beta}_k,\ k = 1, 2, ..., q$ та коефіцієнтів $\bar{\alpha}_{ki},\ k = 1, 2, ..., q,\ i = 1, 2, ..., q_k$.

Якщо необхідно знайти оптимальний розв'язок, враховуючи $d$, $d \geq 1$ векторних критеріїв якнайвищого рангу, то обмеження (17) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = d.$$


1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. Брила А.Ю. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічно-паретівської та парето-лексикографічних задач оптимізації за зваженою сумою різноважливих критеріїв/ А.Ю. Брила // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 13–17.
3. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ.– 2008.– № 5.– С. 135-138.
4. Подиновский В.В. Методы многокритериальной оптимизации / В.В. Подиновский // Эффективные планы. – М.:Наука, 1971.– Вып. 1.– 73 с.
5. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М.:Наука, 1975. – 192 с.
6. Подиновский В.В. О построении множества эффективных стратегий в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности критериями/ В.В. Подиновский // ЖВМ и МФ.–1978.– № 4.– С. 908-915.


Одержано ..2011