УДК 681.14

Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський (Ужгородський нац. ун-т)

ВЛАСТИВОСТІ КЛАСУ ДВОПОРОГОВИХ БУЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ТА ОЦІНКИ ЧИСЛА ЙОГО ЕЛЕМЕНТІВ

In this paper we study the properties of bithreshold neurons. The necessary and sufficient condition of the realizability of Boolean functions on bithreshold neurons are given in the paper. Finally, we estimate lower and upper bounds for the number of bithreshold function of the algebra of logic.

В роботі розглядаються питання пов'язані з двопороговими нейронними елементами. Наводяться критерії реалізовності бульових функцій на одному двопороговому елементі. Встановлюються оцінки числа порогових та двопорогових функцій алгебри логіки.

Вступ

Нейронні елементи (НЕ) та нейромережі, побудовані з них знаходять застосування при розв'язуванні широкого кола практичних задач [1]. У зв'язку з обмеженими можливостями класичних порогових елементів інтенсивно вивчалися їх різноманітні узагальнення [2]. Двопорогові нейронні елементи (ДНЕ) з дійсними вагами та порогами (bithreshold neuron) розглядалися у [3-6]. Їх використання виправдане з огляду на те, що апаратна чи програмна реалізація ДНЕ є майже такою ж ефективною, як відповідна реалізація звичайних НЕ, а клас класичних порогових бульових функцій вже при $n \geq 2$ є власною підмножиною множини функцій, реалізовних на ДНЕ. У зв'язку з цим значний інтерес викликає відшукання необхідних та достатніх умов, виконання яких забезпечує реалізовність бульових функцій (БФ) на ДНЕ. Також актуальною є проблема встановлення оцінок потужності класу двопорогових бульових функцій. Робота складається з двох частин. У першій частині на мові матриць толерантності наведені необхідні і достатні умови реалізовності бульових функцій одним ДНЕ. Друга частина містить оцінки числа порогових та двопорогових бульових функцій і може розглядатися як продовження роботи [7].

1. Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах. Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}_2^n$ — n-а декартова степінь множини $\mathbb{Z}_2$ і $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бульова функція від n змінних, тобто $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$. Двопороговим нейронним елементом з міткою α (ДНЕ$_\alpha$; $\alpha \in \{0, 1\}$) називається такий логічний пристрій з n входами, стан якого описується вектором $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ і виходом $f(\mathbf{x})$, який приймає значення 0 або 1:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо } \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T > p_1 \text{ або } \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T < p_2, \\ \overline{\alpha}, & \text{якщо } p_2 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T < p_1, \end{cases} \tag{1}$$

де $\overline{\alpha}$ — інвертоване значення α, $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — дійсний n-вимірний вектор, який називається ваговим; p_1, p_2 $(p_1 > p_2)$ — дійсні числа (пороги), $[\mathbf{w}; p_1; p_2]$ — вектор структури двопорогового нейронного елемента з міткою α, $\cdot$ — операція множення матриць.

Бульова функція $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом з міткою α, якщо існує такий n-вимірний дійсний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ і такі дійсні числа p_1, p_2, що виконується умова (1).

Приклад. Бульова функція $f_1(x_1, x_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1x_2$ реалізується на двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_1$ з вектором структури $[\mathbf{w} = (-1, -1); -0{,}5; -1{,}5]$, а $f_2(x_1, x_2) = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2$ — на двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_0$ з тим самим вектором структури. Потрібно зауважити, що ні функція $f_1(x_1, x_2)$, ні функція $f_2(x_1, x_2)$ не реалізуються на одному НЕ з пороговою функцією активації.

Якщо бульова функція $f\,(x_1, \dots, x_n)$ реалізується на одному ДНЕ з міткою 0 або 1, то будемо говорити, що вона реалізується одним двопороговим нейронним елементом.

Нехай Ω_n — множина всіх n-вимірних дійсних векторів $\mathbf{w}$, таких, що для будь-яких різних $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}_2^n$ числа $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{w}^T$ і $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{w}^T$ різні. Легко бачити, що коли бульова функція $f\,(x_1, \dots, x_n)$ реалізується одним ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}; p_1; p_2]$, де $\mathbf{w} \notin \Omega_n$, то існує ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}'; p_1; p_2]$, який реалізує цю ж саму функцію і $\mathbf{w}' \in \Omega_n$. Далі будемо розглядати тільки такі ДНЕ$_\alpha$ $(\alpha \in \{0, 1\})$, для яких ваговий вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n$.

Нехай $\mathbf{w}$ — фіксований вектор з Ω_n. Позначимо через $Q_\alpha(\mathbf{w})$ клас бульових функцій, що реалізуються одним ДНЕ$_\alpha$ з ваговим вектором $\mathbf{w}$, а через $\rho(\mathbf{w})$ — таку упорядковану множину бульових векторів $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{2^n})$, що $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{w}^T > \mathbf{x}_{i+1} \cdot \mathbf{w}^T$. Вектори $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \Omega_n$ називаються еквівалентними, якщо $\rho(\mathbf{w}_1) = \rho(\mathbf{w}_2)$.

Теорема 1. *Якщо вектори* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \Omega_n$ *еквівалентні, тоді* $Q_\alpha(\mathbf{w}_1) = Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$.

Доведення. Нехай $f\,(x_1, \dots, x_n) \in Q_\alpha(\mathbf{w}_1)$. Тоді існують такі числа p_1 і p_2, що $\mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Longleftrightarrow p_2 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1^T < p_1$. З еквівалентності векторів $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ випливає: якщо $\max\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1^T | \mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha})\} = \mathbf{x}_{\max} \cdot \mathbf{w}_1^T$, то $\mathbf{x}_{\max} \cdot \mathbf{w}_2^T = \max\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2^T | \mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha})\}$, якщо $\min\left\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1^T | \mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha})\right\} = \mathbf{x}_{\min} \cdot \mathbf{w}_1^T$, то $\mathbf{x}_{\min} \cdot \mathbf{w}_2^T = \min\left\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2^T | \mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha})\right\}$. Отже, лінійні функції $\mathrm{w}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1^T$, $\mathrm{w}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_2^T$, приймають найбільше та найменше значення на множині $f^{-1}(\overline{\alpha})$ відповідно в точках $\mathbf{x}_{\max}$ і $\mathbf{x}_{\min}$. Тоді в силу того, що $\mathbf{w}_2 \in \Omega_n$, завжди можна вказати таке додатне число ε, що ДНЕ$_\alpha$ із вектором структури $[\mathbf{w}_2, v_1, v_2]$, де $v_1 = \mathbf{x}_{\max} \cdot \mathbf{w}_2^T + \varepsilon$ і $v_2 = \mathbf{x}_{\min} \cdot \mathbf{w}_2^T - \varepsilon$, реалізує функцію f. Це означає, що $f \in Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$ і $Q_\alpha(\mathbf{w}_1) \subset Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$.

Аналогічно можна показати, що $Q_\alpha(\mathbf{w}_2) \subset Q_\alpha(\mathbf{w}_1)$. Отже, $\rho(\mathbf{w}_1) = \rho(\mathbf{w}_2) \Longrightarrow Q_\alpha(\mathbf{w}_1) = Q_\alpha(\mathbf{w}_2)$.

Якщо через Ω_n^i $(i = 1, 2, \dots t)$ позначити класи еквівалентності Ω_n відношення ρ, тобто $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \Omega_n^i \Longleftrightarrow \rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{v})$, тоді з теореми 1 безпосередньо випливає:

Теорема 2. *Якщо* $\mathbf{w}^i$ *— представник класу* Ω_n^i*, тоді множина всіх бульових функцій від n змінних, які реалізуються одним двопороговим нейронним елементом співпадає з* $\bigcup\limits_{\alpha \in \{0,1\}} \bigcup\limits_{i=1}^{t} Q_\alpha(\mathbf{w}^i)$.

Нехай $L = (a_{ij})$ — матриця толерантності і $M = \bigcup\limits_{N \in M_\tau} S(N)$ [8] $(i = 1, \dots, 2^{n-1}; j = 1, 2, \dots, n)$. Введемо позначення: $L(r, q) = (a_{ij})\,(i = r, r+1, \dots, q;\ j = 1, 2, \dots, n)$, де $r \le q$. Якщо $r > q$, то вважаємо, що матриця $L(r, q)$ не містить жодного рядка.

Визначимо операцію $\square$ над матрицями $L_1, L_2 \in M$ і $L(r_1, q_1)$, $L(r_2, q_2)$

$(L \in M)$ так:

$$L_1 \,\square\, L_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, L(r_1, q_1) \,\square\, L(r_2, q_2) = \begin{pmatrix} L(r_1, q_1) \\ L(r_2, q_2) \end{pmatrix},$$

якщо $r_1 \leq q_1, r_2 \leq q_2$ і $L(r_1, q_1) \,\square\, L(r_2, q_2) = L(r_2, q_2)$, якщо $r_1 > q_1$, $L(r_1, q_1) \,\square\, L(r_2, q_2) = L(r_1, q_1)$, якщо $r_2 > q_2$. Згідно з теоремою 2 і властивості матриці $Z_{\mathbf{w}}$ [8] можна стверджувати, що знаходження множини всіх бульових функцій від n змінних, що реалізуються одним двопороговим нейронним елементом, рівносильне задачі побудови множини матриць толерантності $E_n = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \Omega_n} L_{\mathbf{w}}$. Відображення $\Delta : \Omega_n^i \to L_{\mathbf{w}^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, де $\mathbf{w}^i$ — представник класу Ω_n^i, задає бієктивне відображення $\widetilde{\Omega}_n = \{\Omega_n^i \mid i = 1, 2, \ldots, t\}$ на E_n, тобто $\Delta(\widetilde{\Omega}_n) = E_n$.

Нехай $\varphi_L^{(r_1,r_2)}(x_1, \ldots, x_n)_\alpha$ — бульова функція від n змінних, що приймає значення α $(\alpha \in \{0, 1\})$ на тих і тільки тих наборах, які відповідно є рядками матриці $\hat{L}(r_1, r_2)$ $(\hat{L} = L \,\square\, L^*)$, $L \in E_n$, $r_1 \leq r_2$, $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$.

Визначимо множину бульових функцій $\pi^{(2)}(\varphi_\alpha)$ наступним чином:

$$\pi^{(2)}(\varphi_\alpha) = \bigcup_{L \in E_n} \bigcup_{r_1=1}^{2^n} \bigcup_{r_2=r_1}^{2^n} \varphi_L^{(r_1,r_2)}(x_1, \ldots, x_n)_\alpha.$$

Якщо через $\pi_n^{(2)}$ позначити множину всіх бульових функцій від n змінних, що реалізуються одним двопороговим нейронним елементом, тоді на основі $\Delta(\widetilde{\Omega}_n) = E_n$ і теореми 2 маємо:

$$\pi_n^{(2)} = \bigcup_{\alpha \in \{0,1\}} \pi^{(2)}(\varphi_\alpha). \tag{2}$$

Нехай $K(f)$ — ядро [8] бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ і $q = |K(f)|$.

Теорема 3. *Бульова функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли існує такий елемент $\xi \in S_q$ і така матриця толерантності $L \in E_n$, що її ядро $K(f)$ задовольняє одну з умов:*
1) *існують такі числа $q_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}, q_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}+1\}$, що $K_\xi(f) = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1})$,*
2) *існують такі числа $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ $(r_1 \leq r_2)$, що $K_\xi(f) = \hat{L}(r_1, r_2)$.*

Доведення. Дано, що бульова функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом із ваговим вектором $\mathbf{w} \in \Omega_n$. Якщо $K(f) = f^{-1}(\alpha)$ $(\alpha \in \{0, 1\})$ і $L = L_{\mathbf{w}}$, тоді, згідно (2), можливі наступні два випадки:
1) ядро $K(f)$ бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ містить ті рядки матриці $\hat{L} = L \,\square\, L^*$, які не є рядками матриці $\hat{L}(r_1, r_2)$, де $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ і $r_2 - r_1 \geq 2^{n-1}$;
2) ядро $K(f)$ бульової функції $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ містить усі рядки матриці $\hat{L}(r_1, r_2)$, де $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$ і $r_2 - r_1 \leq 2^{n-1} - 1$.

У першому випадку $f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_{\overline{\alpha}})$ і, очевидно, існує такий елемент $\xi \in S_q$, що $K_\xi(f) = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1})$.

У другому випадку маємо: $K_\xi(f) = \hat{L}(r_1, r_2)$ і необхідність доведено.

Дано, що $K(f) = f^{-1}(\alpha)$ і $K_\xi(f) = L(1, q_1) \square L^*(q_2, 2^{n-1})$, де $L \in E_n$, $q_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}\}, q_2 \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}+1\}$. Тоді $f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_{\overline{\alpha}}) \subset \pi_n^{(2)}$. Якщо $K_\xi(f) = \hat{L}(r_1, r_2)$, де $L \in E_n$, тоді $f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_\alpha) \subset \pi_n^{(2)}$. Теорему доведено.

Нехай $f(x_1, \dots, x_n)$ — бульова функція і $K(f)$ — її ядро. Зведеним ядром бульової функції $f(x_1, \dots, x_n)$ називається множина $K(f)_i = \mathbf{g}_i K(f)$, де $\mathbf{g}_i = ((-1)^{\gamma_{i1}}, \dots, (-1)^{\gamma_{in}})$ і $(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in}) \in K(f)$. Якщо $(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in}) \in \mathbb{Z}_2^n \setminus K(f)$ і $\mathbf{g}_i = ((-1)^{\gamma_{i1}}, \dots, (-1)^{\gamma_{in}})$, то множина $K(f)'_i = \mathbf{g}_i K(f)$ називається зовнішнім зведеним ядром бульової функції $f(x_1, \dots, x_n)$. Множину зведених ядер бульової функції позначимо через $T(f)$, а множину всіх зовнішніх зведених ядер через $T(f)'$.

Теорема 4. *Бульова функція $f(x_1, \dots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом тоді і тільки тоді, коли хоча б для одного зведеного ядра $K(f)_i \in T(f)$ або зовнішнього зведеного ядра $K(f)'_j \in T(f)'$ можна вказати такі елементи $\sigma \in S_n, \xi \in S_q$ ($q = |K(f)|$), матрицю толерантності $L \in E_n^-$ і такі числа $q_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$, $q_2 \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1} + 1\}$, $r_1, r_2 \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ ($r_1 \le r_2$), що має місце одна з умов:*
1) $K_\xi^\sigma(f)_i = L(1, q_1) \square L^*(q_2, 2^{n-1})$;
2) $K_\xi^\sigma(f)'_j = \hat{L}(r_1, r_2)$.

Доведення. Якщо бульова функція $f(x_1, \dots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом і $K(f) = f^{(-1)}(\alpha)$ ($\alpha \in \{0, 1\}$), тоді відповідно до теореми 3 ядро $K(f)$ функції f допускає одне із зображень:

$$\text{якщо } f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_{\overline{\alpha}}), \text{ то } K_\xi(f) = H(1, q_1) \square H^*(q_2, 2^{n-1}), \tag{3}$$

$$\text{якщо } f \in \pi_n^{(2)}(\varphi_\alpha), \text{ то } K_\xi(f) = \hat{H}(r_1, r_2), \tag{4}$$

де $\xi \in S_q, H \in E_n$. З рівності $E'_n = E_n$ [8] випливає, що $H = (\mathbf{g}L)^\sigma$, де $\mathbf{g} \in G_n, \sigma \in S_n$ і $L \in E_n^-$. Звідси $L = \mathbf{g}^{-1} H^{\sigma^{-1}}$ і, згідно (3), (4), з урахуванням $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$ маємо:

$$\mathbf{g} K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = L(1, q_1) \square L^*(q_2, 2^{n-1}), \tag{5}$$

або

$$\mathbf{g} K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = \hat{L}(r_1, r_2). \tag{6}$$

Якщо має місце (5) або (6) при $r_1 = 1$, тоді з того, що перший рядок будь-якої матриці толерантності $L \in E_n^-$ складається з нулів, випливає, що: ядро містить такий набір $(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in})$, що $\mathbf{g}^\sigma = \mathbf{g}_i$ ($\mathbf{g}_i = ((-1)^{\gamma_{i1}}, \dots, (-1)^{\gamma_{in}})$) і

$$\mathbf{g} K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = (\mathbf{g}^\sigma K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = (\mathbf{g}_i K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)_i.$$

Отже, в даному випадку для функції $f(x_1, \dots, x_n)$, що реалізується одним двопороговим нейронним елементом, можна вказати таке зведене ядро $K(f)_i \in T(f)$, що

$$K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)_i = L(1, q_1) \square L^*(q_2, 2^{n-1}).$$

Якщо має місце рівність (6), тоді в силу нерівності $r_1 > 1$ і $L \in E_n^-$ маємо: $\mathbf{g}^\sigma = \mathbf{g}_j = ((-1)^{\gamma_{j1}}, \dots, (-1)^{\gamma_{jn}})$, де $(\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn}) \in \mathbb{Z}_2^n \setminus K(f)$, $\mathbf{g} K_\xi^{\sigma^{-1}}(f) = (\mathbf{g}^\sigma K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = (\mathbf{g}_j K_\xi(f))^{\sigma^{-1}} = K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)'_j \in T(f)'$. Отже, зовнішнє зведене ядро $K(f)'_j$ задовольняє умову $K_\xi^{\sigma^{-1}}(f)'_j = \hat{L}(r_1, r_2)$.

Нехай тепер виконується одна з умов:

$$K_\xi^\sigma(f)_i = L(1, q_1) \,\square\, L^*(q_2, 2^{n-1}), \tag{7}$$

$$K_\xi^\sigma(f)'_j = \hat{L}(r_1, r_2), \tag{8}$$

де $\sigma \in S_n,\ \xi \in S_q$ і $L \in E_n^-$.

Покажемо, що функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом. Нехай $L = L_{\mathbf{w}}$, де $\mathbf{w} \in \Omega_n^-$. Тоді $(L_{\mathbf{w}} \,\square\, L_{\mathbf{w}}^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$ і координати $c_1, c_2, \ldots, c_{2^n}$ вектора $\mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$ задовольняють умову $0 > c_1 > c_2 > \ldots > c_{2^n}$. Позначимо $\mathbf{w}_1 = \mathbf{g}_i \mathbf{w}^\sigma$ і нехай $\left(L_{\mathbf{w}_1} \,\square\, L_{\mathbf{w}_1}^*\right) \cdot \mathbf{w}_1^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_1}^T$, де $\mathbf{c}_{\mathbf{w}_1} = \left(c_1^{(1)}, \ldots, c_{2^n}^{(1)}\right)$ і $c_1^{(1)} > c_2^{(1)} > \ldots > c_{2^n}^{(1)}$.

Припустимо, що має місце рівність (7) і $K(f) = f^{-1}(\alpha)$ $(\alpha \in \{0, 1\})$. Тоді q_1, q_2 задовольняють одну із нижченаведених умов і функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним двопороговим нейронним елементом з міткою α і відповідним вектором структури:

1) якщо $q_1 \neq 0$ і $q_2 \neq 2^{n-1} + 1$, тоді за вектор структури двопорогового нейронного елемента з міткою α, що реалізує функцію $f\,(x_1, \ldots, x_n)$, можна вибрати вектор $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \left(c_{q_1+1}^{(1)}, c_{q_1}^{(1)}\right)$, а $p_2 \in \left(c_{2^{n-1}+q_2}^{(1)}, c_{2^{n-1}+q_2-1}^{(1)}\right)$ за умови, що $q_1 \neq 2^{n-1}$ або $q_2 \neq 1$. Якщо $q_1 = 2^{n-1}$, тоді $p_1 \in \left(c_{q_1+1}^{(1)}, c_{q_1}^{(1)}\right)$ і $p_2 \in \left(c_{2^n}^{(1)} - \varepsilon, c_{2^n}^{(1)}\right)$, де ε — довільне додатне число. У випадку, коли $q_2 = 1$, маємо: $p_1 \in \left(c_1^{(1)}, c_1^{(1)} + \varepsilon\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^{n-1}+1}^{(1)}, c_{2^{n-1}}^{(1)}\right)$, де $\varepsilon > 0$.

2) якщо $q_1 = 0$ і $q_2 \neq 2^{n-1} + 1$, тоді $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \left(c_1^{(1)}, c_1^{(1)} + \varepsilon\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^{n-1}+q_2}^{(1)}, c_{2^{n-1}+q_2-1}^{(1)}\right)$ і $\varepsilon > 0$.

3) якщо $q_1 \neq 0$ і $q_2 = 2^{n-1} + 1$, тоді $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \left(c_{q_1+1}^{(1)}, c_{q_1}^{(1)}\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^n}^{(1)} - \varepsilon, c_{2^n}^{(1)}\right)$, $\varepsilon > 0$.

4) якщо $q_1 = 0$ і $q_2 = 2^{n-1} + 1$, тоді $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \left(c_1^{(1)}, c_1^{(1)} + \varepsilon\right)$, $p_2 \in \left(c_{2^n}^{(1)} - \varepsilon, c_{2^n}^{(1)}\right)$, $\varepsilon > 0$.

Нехай має місце рівність (8) при умові, що $r_1 > 1$ і $K(f) = f^{(-1)}(\alpha)$. Тоді функція $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується на одному ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}_1; p_1; p_2]$, де $p_1 \in \left(c_{r_1}^{(1)}, c_{r_1-1}^{(1)}\right)$ і $p_2 \in \left(c_{r_2+1}^{(1)}, c_{r_2}^{(1)}\right)$. Якщо $r_1 = 1$, тоді маємо випадок (7) при умові, що $q_1 = r_2$ і $q_2 = 2^{n-1} + 1$. Отже, теорему доведено.

Розглянемо наступну задачу. Треба встановити реалізовність бульових функцій $f_1(x_1, x_2, x_3)$ і $f_2(x_1, x_2, x_3)$ на двопорогових нейронних елементах, якщо $f_1^{-1}(1) = \{(0,0,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$ і $f_2^{-1}(1) = \{(0,1,1), (1,0,1)\}$. Побудуємо множину зведених ядер $T(f_1),\ T(f_2)$:

$$T(f_1) = \left\{ K(f_1)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, K(f_1)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, K(f_1)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$T(f_2) = \left\{ K(f_2)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K(f_2)_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Множина E_3^- складається з двох матриць, а саме [8]:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для зведеного ядра $K(f_1)_1$ маємо: $K(f_1)_1 = L_1(1,2) \square L_1^*(4,4)$. Вектор $\mathbf{w} = (-1,-2,-4)$ задовольняє рівність $(L_1 \square L_1^*) \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}}^T$. Тоді за ваговий вектор ДНЕ$_1$, що реалізує функцію $f_1(x_1,x_2,x_3)$, може бути вибраний вектор $\mathbf{w}_1 = ((-1)^0,(-1)^0,(-1)^1)\mathbf{w} = (-1,-2,4)$. Вектору $\mathbf{w}_1$ відповідає матриця

$$L_{\mathbf{w}_1} = ((-1)^0,(-1)^0,(-1)^1)L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді пороги p_1 і p_2 відповідно беруться з інтервалів (c_3,c_2), (c_8,c_7), де $c_2 = (1,0,1)\cdot \mathbf{w}_1^T = 3$, $c_3 = 2$, $c_7 = -2$, $c_8 = -3$. Отже, ДНЕ$_1$ з вектором структури $[\mathbf{w}_1; 2{,}5; -2{,}5]$ реалізує функцію $f_1(x_1,x_2,x_3)$.

Простою перевіркою легко переконатися в тому, що зведені ядра $T(f_2)$ не задовольняють умови теореми 4. Тоді для функції $f_2(x_1,x_2,x_3)$ побудуємо множину зовнішніх зведених ядер $T(f_2)'$:

$$T(f_2)' = \left\{ K(f_2)'_1 = ((-1)^0,(-1)^0,(-1)^0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, K(f_2)'_6 = ((-1)^1,(-1)^1,(-1)^1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для зовнішнього зведеного ядра $K(f_2)'_6$ маємо: $K(f_2)'_6 = \hat{L}_1(2,3)$. Тоді за ваговий вектор ДНЕ$_1$ можна вибрати вектор $\mathbf{w}_2 = (-1,-1,-1)\mathbf{w} = (1,2,4)$, а пороги p_1, p_2 вибираються з інтервалів $p_1 \in (c_2,c_1)$, $p_2 \in (c_3,c_4)$, де

$$L_{\mathbf{w}_2} = (-1,-1,-1)L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L_{\mathbf{w}_2} \square L_{\mathbf{w}_2}^*\right) \cdot \mathbf{w}_2^T = \mathbf{c}_{\mathbf{w}_2}^T$$

і $c_2 = 6$, $c_1 = 7$, $c_4 = 4$, $c_3 = 5$.

Отже, ДНЕ$_0$ з вектором структури $[\mathbf{w}_2; 6{,}5; 4{,}5]$ реалізує функцію $f_2(x_1,x_2,x_3)$.

Природно виникає питання: чи не можна звести задачу перевірки реалізовності бульових функцій від n змінних одним двопороговим НЕ до задачі перевірки реалізовності бульових функцій від $n-1$ змінної? Відповідь на поставлене питання міститься у наступній теоремі.

Теорема 5. *Бульова функція*

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = x_n f(x_1,\dots,x_{n-1},1) \vee \overline{x}_n f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$$

реалізується одним двопороговим нейронним елементом із вектором структури $[\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n); p_1; p_2]$ *тоді і тільки тоді, коли бульові функції*

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1), \ f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

відповідно реалізуються на двопорогових нейронних елементах з векторами структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{11}; p_{21}]$, $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{10}; p_{20}]$, *пороги яких задовольняють умову* $p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$.

Доведення. Дано, що бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується одним ДНЕ$_\alpha$ ($\alpha \in \{0, 1\}$). Це означає, що існує такий $n + 2$-вимірний вектор $[\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n); p_1; p_2]$, що

$$\mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow p_2 < \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}^T < p_1. \tag{9}$$

На бульових наборах $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in \mathbb{Z}_2^n$ співвідношення (9) запишеться так:

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow p_2 < \omega_1 x_1 + \ldots \omega_{n-1} x_{n-1} + \omega_n < p_1,$$

або

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow p_2 - \omega_n < \omega_1 x_1 + \ldots\ldots + \omega_{n-1} x_{n-1} < p_1 - \omega_n.$$

На основі останнього співвідношення можна стверджувати, що бульова функція $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ реалізується на ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{11} = p_1 - \omega_n; p_{21} = p_2 - \omega_n]$. На бульових наборах $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$ співвідношення (9) має такий вигляд:

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in f^{-1}(\overline{\alpha}) \Longleftrightarrow p_2 < \omega_1 x_1 + \ldots \omega_{n-1} x_{n-1} < p_1.$$

Отже, ДНЕ$_\alpha$ із вектором структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{10} = p_1; p_{20} = p_2]$ реалізує функцію $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Пороги $p_{11}, p_{21}, p_{10}, p_{20}$ двопорогових нейронних елементів, що реалізують відповідно функції $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1})$, очевидно, задовольняють умову $\omega_n = p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$. Отже, необхідність доведено.

Переходимо до доведення достатності. Дано, що функції $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$, $f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ реалізуються одним ДНЕ$_\alpha$ з відповідними векторами структури $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{11}; p_{21}]$, $[\mathbf{w}_1 = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}); p_{10}; p_{20}]$, де $p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$. Якщо покласти, що $\omega_n = p_{10} - p_{11} = p_{20} - p_{21}$, тоді ДНЕ$_\alpha$ з вектором структури $[\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n); p_1 = p_{10}; p_2 = p_{20}]$ реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \overline{x}_n f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Отже, теорему доведено.

Із рівності $E'_n = E_n$ і теореми 4 безпосередньо випливає:

Теорема 6. *Якщо бульова функція* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *реалізується одним двопороговим нейронним елементом, тоді кожна з наступних функцій:*
1) $f_1(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, \overline{x_i} \ldots, x_n)$,
2) $f_2(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(x_1, \ldots, x_n)$,
3) $f_3(x_1, \ldots, x_i \ldots, x_j \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j \ldots, x_i \ldots, x_n)$,
також реалізується одним двопороговим нейронним елементом.

2. Оцінки числа n-місних порогових та двопорогових функцій. Нехай LT_n — множина усіх n-місних порогових бульових функцій (ПБФ), LBT_n — множина n-місних двопорогових бульових функцій (ДПБФ). Встановлення оцінок для потужності класу LT_n довгий час було одним з провідних напрямків досліджень у пороговій логіці. У цій частині буде покращено відомі оцінки для $\mathrm{Card}\, LBT_n$ та за їх допомогою встановлено, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \mathrm{Card}\, LT_n}{n^2} = 1.$$

Іншими методами попередня формула була доведена у [9]. Цим самим буде показано, що властивості ДПБФ можуть бути використані для встановлення властивостей класичних ПБФ. Надалі ми для зручності запису будемо розглядати БФ у алфавіті $E_2 = \{-1, 1\}$, перехід до якого від алфавіту $\mathbb{Z}_2^n$ здійснюється за допомогою лінійного перетворення $y = 2x - 1$. При цьому під ДНЕ будемо розуміти двопорогові нейронні елементи з міткою 1.

Теорема 7. *Для всіх натуральних n*

$$\mathrm{Card}\, LBT_n < 3 \cdot 2^{n^2+n+1}, \tag{10}$$

$$\mathrm{Card}\, LBT_n < 2^{n^2 - n\log_2 n + 3{,}45n + o(n)}. \tag{11}$$

Доведення. Використаємо твердження 1 роботи [7] для n-вимірного одиничного гіперкуба. Тоді з урахуванням того, що $m = \mathrm{Card}\, E_2^n = 2^n$ та формули (10) [7]

$$\mathrm{Card}\, LBT_n < 3 \cdot \frac{(2\cdot 2^n)^{n+1}}{(n+1)!} \le 3 \cdot 2^{n^2+n+1}.$$

Оскільки $(n+1)! = 2^{\log_2 (n+1)!} = 2^{(n+1)\log_2(n+1) - (n+1)\log_2 e + o(n)}$, то

$$\mathrm{Card}\, LBT_n < 3 \cdot 2^{n^2+2n-(n+1)\log_2 n + 1{,}443\, n + o(n)} < 2^{n^2 - n\log_2 n + 3{,}45n + o(n)}.$$

Зауваження 1. *При $n > 8$ з нерівності (10) [7] легко отримати підсилений варіант (10)*

$$\mathrm{Card}\, LBT_n < 2^{n^2}, \quad n > 8.$$

Для цього досить показати, що функція $3 \cdot 2^{2n+1}/\,(n+1)!$ при $n > 3$ є монотонно спадною і при $n = 9$ приймає значення, яке менше за 1.

Зараз ми перейдемо до встановлення нижніх оцінок. При цьому буде використана методика роботи [10].

Лема 1. *Нехай вершини n-вимірного куба E_2^n $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$ $(m < n)$ вибрані таким чином, що $\langle \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m \rangle \cap E_2^n = \{\pm \mathbf{x}^i | i = 1, \ldots, m\}$. Тоді підпростір $\langle \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m \rangle$ можна доповнити до $(n-1)$-вимірного лінійного підпростору $H = \{\mathbf{x} | \, (\mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0\}$ таким чином, щоб H не містив точок E_2^n, відмінних від $\pm \mathbf{x}^i$, $i = 1, \ldots, m$*

Доведення. Припустимо протилежне: кожний $(n-1)$-вимірний підпростір, який містить лінійну оболонку точок $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$, задовольняє умови леми. Виберемо такий підпростір $H = \{\mathbf{x} | \, (\mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0\}$, який містить найменшу можливу кількість точок з $E' = E_2^n \setminus \{\pm \mathbf{x}^i | i = 1, \dots, m\}$. Нехай вектор $\mathbf{y} \in E'$ задовольняє умову $(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = 0$. Тоді знайдеться такий вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, що $(\mathbf{v}, \mathbf{x}^i) = 0$, $i = 1, \dots, m$, $(\mathbf{v}, \mathbf{y}) = 1$. Нехай $\delta = \min\{|(\mathbf{w}, \mathbf{x})|\, | \mathbf{x} \in E_2^n \setminus H\}$. Розглянемо вектор $\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \frac{\delta}{2n\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$. Легко бачити, що $(\mathbf{w}', \mathbf{y}) \neq 0$, $(\mathbf{w}', \mathbf{x}^i) = 0$, $i = 1, \dots, m$ і для всіх $\mathbf{x} \in E_2^n$ $(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \neq 0 \Rightarrow (\mathbf{w}', \mathbf{x}) \neq 0$. Тоді підпростір $H' = \{\mathbf{x} |\, (\mathbf{w}', \mathbf{x}) = 0\}$ містить менше точок множини E' ніж простір H. Отримане протиріччя доводить лему.

Нам знадобиться також наступна лема, встановлена у [11].

Лема 2. *Знайдеться така ціла константа $C > 0$, що якщо $m \leq n - C$ і точки $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m$ випадковим чином вибрані з множини E_2^n, то*

$$P\left(\left\langle \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m \right\rangle \cap E_2^n \neq \left\{\pm \mathbf{x}^1, \dots, \pm \mathbf{x}^m\right\}\right) = (1 + o(1))\, 4C_m^3 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Лема 3. *При достатньо великих n для $m \leq n - C$ кількість способів вибору послідовності $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m\} \subset E_2^n$, яка задовольняє умову $\langle \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m \rangle \cap E_2^n = \{\pm \mathbf{x}^i | i = 1, \dots, m\}$ не менша за 2^{mn-1}.*

Доведення. Скористаємося лемою 2, за якою при достатньо великих n ймовірність того, що $\langle \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m \rangle$ не містить вершин E_2^n, відмінних від $\pm \mathbf{x}^i$, $i = 1, \dots, m$ прямує до 1. Тому не менше половини з усіх послідовностей вигляду $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m \in E_2^n$ задовольняють умову леми.

Теорема 8. *Знайдеться така ціла константа $C > 0$, що при достатньо великих n*

$$\mathrm{Card}\, LBT_n > 2^{n^2 - (n-C)\log_2(n-C) - Cn}. \tag{12}$$

Доведення. Підрахуємо кількість різних $(n-1)$-вимірних підпросторів H, які можна отримати, доповнивши множини $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m\} \subset E_2^n$, таким чином, щоб $H \cap E_2^n = \{\pm \mathbf{x}^1, \dots, \pm \mathbf{x}^m\}$, де $m = n - C$. За лемою 3 при достатньо великих n є не менше ніж $2^{(n-C)n-1}$ послідовностей, які задовольняють умову $\langle \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m \rangle \cap E_2^n = \{\pm \mathbf{x}^i | i = 1, \dots, m\}$. За лемою 1 таку послідовність можна доповнити до $(n-1)$-вимірного підпростору $H = \{\mathbf{x} |\, (\mathbf{w}, \mathbf{x}) = 0\}$ так, що H не містить точок n-вимірного куба, відмінних від $\pm \mathbf{x}^i$, $i = 1, \dots, m$. Причому, кожний підпростір H породжується не більше ніж $2^{n-C}(n-C)!$ послідовностями. Тому кількість різних підпросторів H не менша за

$$\frac{2^{(n-C)n-1}}{2^{n-C}(n-C)!} = 2^{n^2 - Cn - 1 - (n-C)\log_2(n-C) + (n-C)\log_2\frac{e}{2} - \log_2\sqrt{2\pi(n-C)} + o(1)} > \frac{2^{n^2 - Cn}}{2^{(n-C)\log_2(n-C)}}.$$

З останньої нерівності випливає (12), оскільки кожному підпростору H, який задовольняє умови леми 1, можна поставити у відповідність ДПБФ $f(\mathbf{x})$ так, що $f(\mathbf{x}) = -1 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in H$. Для цього досить розглянути ДНЕ зі структурою $(\mathbf{w}, -\delta, \delta)$, де $\delta = \frac{1}{2}\min\{|\,(\mathbf{w}, \mathbf{x})\,|\,|\,\mathbf{x} \in E_2^n \setminus H\}$.

Теорема 9. *Для числа ДПБФ мають місце співвідношення*

$$\mathrm{Card}\, LBT_n = 2^{n^2 - n\log_2 n + O(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \mathrm{Card}\, LBT_n}{n^2} = 1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\log_2 \frac{\mathrm{Card}\, LBT_{n+1}}{\mathrm{Card}\, LBT_n} \geq 2, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\log_2 \frac{\mathrm{Card}\, LBT_{n+1}}{\mathrm{Card}\, LBT_n} \leq 2.$$

Доведення випливає з теорем 7 і 8.

З використанням (10) легко отримати

Наслідок 1. *При великих n для числа ДПБФ виконуються нерівності*

$$2^{n^2-n\log_2 n-Cn} < \operatorname{Card} LBT_n < 2^{n^2-n\log_2 n+3{,}45n}.$$

Виявляється, що нижня оцінка числа БФ, реалізовних на ДНЕ, може бути використана для встановлення найкращої з відомих (в асимптотичному розумінні) нижніх оцінок для числа n-місних ПФ. Нам знадобиться наступна лема [12]:

Лема 4. *БФ $h(x_1, \ldots, x_n)$ реалізується на ДНЕ із структурою $(\mathbf{w}, t_1, t_2)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$h(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})} \vee g(\mathbf{x}), \tag{13}$$

де $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ — n-місні БФ, які реалізуються на однопорогових НЕ із структурами $(\mathbf{w}, t_1)$, $(\mathbf{w}, t_2)$.

Лема 5. *Для всякого натурального n*

$$2^{n-4} \operatorname{Card} LT_n < \operatorname{Card} LBT_n \leq \frac{1}{2} \operatorname{Card} LT_{n+1}.$$

Доведення. Якщо бульова функція $h(\mathbf{x})$ реалізується на ДНЕ із структурою $(\mathbf{w}, t_1, t_2)$, то вона реалізується і на ДНЕ із структурою $(-\mathbf{w}, t'_1, t'_2)$, де t'_1, t'_2 — деякі нові пороги. Тому для кожної функції $h(\mathbf{x})$ (крім 0), реалізовної на ДНЕ, знайдуться принаймні дві різні пари $(f_1, g_1), (f_2, g_2)$, такі, що справедливою є рівність (13). Нехай $s_n(f)$ — число n-місних ПБФ які мають той самий ваговий вектор, що й ПБФ $f(\mathbf{x})$. Тоді з леми 4 отримуємо, що

$$\operatorname{Card} LBT_n \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\operatorname{Card} LT_n} s_n(f_i),$$

де сумування проводиться по всім n-місним ПБФ. В роботі [12] показано, що права частина попередньої нерівності рівна $\operatorname{Card} LT_{n+1}$, що й доводить праву частину нерівності в умові леми.

Для доведення лівої частини розглянемо LT'_n — множину тих n-місних ПБФ $(n > 3)$, які задовольняють умову $\operatorname{Card}\{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) = 1\} \leq 2^{n-1}$. Очевидно, що $\operatorname{Card} LT'_n = \frac{1}{2} \operatorname{Card} LT_n$. Нехай $f(\mathbf{x}) \in LT'_n$ реалізується на НЕ із структурою $\left(\mathbf{w}^f, t_2^f\right)$. Легко показати, що без втрати загальності міркувань можна вважати, що $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_2^n$ $\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{w}^f, \mathbf{y}\right) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Змінюючи значення порога t_1^f таким чином, що $\operatorname{Card}\left\{\mathbf{x}|\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) < t_1^f\right\} < 2^{n-2}$, ми з функції $f(\mathbf{x}) \in LT'_n$ можемо отримати 2^{n-2} різних ДПБФ, які реалізуються на ДНЕ із E_2^n-допустимою [7] структурою $\left(\mathbf{w}^f, t_1^f, t_2^f\right)$. Покажемо, що для різних $f, g \in LT'_n$ побудовані з них ДПБФ з векторами структур $\left(\mathbf{w}^f, t_1^f, t_2^f\right)$ і $(\mathbf{w}^g, t_1^g, t_2^g)$ можуть співпасти тільки тоді, коли для них виконується умова

$$\left\{\mathbf{x}|\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) < t_1^f\right\} = \left\{\mathbf{x}|\left(\mathbf{w}^g, \mathbf{x}\right) > t_2^g\right\}. \tag{14}$$

Припустимо протилежне. Не втрачаючи загальності міркувань, будемо вважати, що $w_i^f > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Якщо $(1, \ldots, 1) \notin \{\mathbf{x} | (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) > t_2^g\}$, то розглянемо вектор $\mathbf{x}^0$, який задовольняє умову

$$\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}^0\right) = \max\left\{\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) | \mathbf{x} \in \left\{\mathbf{x}| \left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) > t_2^f\right\} \cap \{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) > t_2^g\}\right\}.$$

Для спрощення позначень будемо вважати, що $\mathbf{x}^0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-k})$. Тоді можливими є 2 наступні випадки:

1) $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) < t_1^f$; Тоді розглянемо вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x}^0 + 2\mathbf{e}_{k+1}$, де $\mathbf{e}_{k+1}$ — відповідний орт-вектор. Оскільки $\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{y}\right) > \left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}^0\right)$, то $(\mathbf{w}^g, -\mathbf{y}) > t_2^g$ і $(\mathbf{w}^g, \mathbf{y}) < t_1^g$. Розглянемо біполярні вектори $\mathbf{z}' = (z_1, \ldots, z_k, -1, z_{k+2}, \ldots, z_n)$ і $\mathbf{z}'' = (-z_1, \ldots, -z_k, -1, -z_{k+2}, \ldots, -z_n)$. Оскільки $(\mathbf{w}^g, \mathbf{z}') + (\mathbf{w}^g, \mathbf{z}'') = (\mathbf{w}^g, -\mathbf{y}) + (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}^0) > 2t_2^g$, то рівно один з векторів $\mathbf{z}'$ та $\mathbf{z}''$ потрапляє у множину $\{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) < t_1^g\}$. Тому ця множина має потужність не меншу за 2^{n-2}, що суперечить вибору порогу t_2^g.

2) $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) > t_1^f$. Зауважимо, що з правила вибору вектора $\mathbf{x}$ випливає, що $w_j^g < 0$, $j = k+1, \ldots, n$, бо інакше $(\mathbf{w}^g, \mathbf{x}^0 + 2\mathbf{e}_j) > (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}^0)$. Розглянемо вектор $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k, -1, \ldots, -1)$, де $y_j = \operatorname{sign} w_j^g$. Тоді $(\mathbf{w}^g, \mathbf{y}) = \max\{(\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) | \mathbf{x} \in E_2^n\}$. Оскільки множина $\{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) < t_1^g\}$ не порожня, то в неї обов'язково потрапляє вектор $-\mathbf{y}$, оскільки $(\mathbf{w}^g, -\mathbf{y}) = \min\{(\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) | \mathbf{x} \in E_2^n\}$. Нехай $\vartheta_{\mathbf{w}, t_1, t_2}(\mathbf{x}) = ((\mathbf{w}, \mathbf{x}) - t_1)((\mathbf{w}, \mathbf{x}) - t_2)$. Тоді з того, що $\vartheta_{\mathbf{w}^f, t_1^f, t_2^f}(\pm\mathbf{y}) > 0$ випливає, що $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) < t_1^f$. Ми отримали протиріччя із припущенням 2. Отже у обох випадках рівність (14) доведена.

Припустимо тепер, що $(1, \ldots, 1) \in \{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) > t_2^g\}$. Розглянемо вектор $\mathbf{x}$, який задовольняє умову

$$\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}^0\right) = \max\left\{\left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) | \mathbf{x} \in \left\{\mathbf{x}| \left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) > t_2^f\right\} \cap \{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) < t_1^g\}\right\}.$$

Будемо вважати, що $\mathbf{x}^0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-k})$, причому $k < n$. Легко переконатися, що $w_j^g > 0$, $j = k+1, \ldots, n$, бо інакше $(\mathbf{w}^g, \mathbf{x}^0 + 2\mathbf{e}_j) < (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}^0)$. Якщо $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) < t_1^f$, то розглянемо вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x}^0 + 2\mathbf{e}_{k+1}$ і вектори $\mathbf{z}' = (z_1, \ldots, z_k, 1, z_{k+2}, \ldots, z_n)$, $\mathbf{z}'' = (-z_1, \ldots, -z_k, 1, -z_{k+2}, \ldots, -z_n)$. Оскільки $(\mathbf{w}^g, \mathbf{z}') + (\mathbf{w}^g, \mathbf{z}'') = (\mathbf{w}^g, \mathbf{y}) + (\mathbf{w}^g, -\mathbf{x}^0) > 2t_2^g$, то рівно один з векторів $\mathbf{z}'$ та $\mathbf{z}''$ потрапляє у множину $\{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) < t_1^g\}$. Тому ця множина має потужність не меншу за 2^{n-2}, що суперечить вибору порогу t_2^g.

Якщо $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) > t_1^f$, то розглянемо вектор $(y_1, \ldots, y_k, -1, \ldots, -1)$, де $y_j = -\operatorname{sign} w_j^g$. Тоді $(\mathbf{w}^g, \mathbf{y}) = \min\{(\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) | \mathbf{x} \in E_2^n\}$. З непорожності множини $\{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) > t_2^g\}$ випливає, що в неї обов'язково потрапляє вектор $-\mathbf{y}$. Тоді з того, що $\vartheta_{\mathbf{w}^f, t_1^f, t_2^f}(\pm\mathbf{y}) > 0$ випливає, що $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) < t_1^f$. Ми отримали протиріччя з припущенням $\left(\mathbf{w}^f, -\mathbf{x}^0\right) > t_1^f$. Можливий випадок, коли $\left\{\mathbf{x}| \left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) > t_2^f\right\} \subset \{\mathbf{x}| (\mathbf{w}^g, \mathbf{x}) > t_2^g\}$. Тоді вищенаведені міркування з незначними змінами можна застосувати до множини $\left\{\mathbf{x}| \left(\mathbf{w}^f, \mathbf{x}\right) < t_1^f\right\}$. З урахуванням (14) отримуємо:

$$\operatorname{Card} LBT_n > \frac{1}{2} \cdot 2^{n-2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Card} LT_n = 2^{n-4} \operatorname{Card} LT_n.$$

Лема доведена.

Теорема 10. *Для числа ПБФ та ДПБФ мають місце оцінки*

$$\mathrm{Card}\, LT_n = 2^{n^2 - n\log_2 n + O(n)}, \quad \mathrm{Card}\, LBT_n < 2^{(C+5{,}45)n + o(n)}\, \mathrm{Card}\, LT_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log_2 \frac{\mathrm{Card}\, LT_{n+1}}{\mathrm{Card}\, LT_n} \geq 2, \ \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \frac{\mathrm{Card}\, LT_{n+1}}{\mathrm{Card}\, LT_n} \leq 2, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \mathrm{Card}\, LT_n}{n^2} = 1.$$

Доведення випливає з попередньої леми та теореми 8.

Висновки

На мові матриць толерантності отримано критерій реалізовності БФ одним ДНЕ, які можуть бути використані при синтезі нейромережевих схем для оброблення інформації. Наведені інваріантні операції над ДПБФ. Отримано нижню і верхню оцінки числа ДПБФ.

1. *Haykin S.* Neural Networks. A Comprehensive Foundation /S. Haykin. – N.Y.: Prentice Hall, Inc., 1999. – 804 c.
2. *Руденко О. Г.* Штучні нейронні мережі / О. Г. Руденко, Є. В. Бодянський. – Харків: ТОВ "Компанія СМІТ", 2006. — 404 с.
3. *Olafsson S.* The capacity of multilevel threshold function / S. Olafsson, Y. S. Abu-Mostafa // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 10, # 2, pp. 277-281, March 1988.
4. *Шоломов Л. А.* О реализаций булевой функции на многопороговом елементе / Л. А. Шоломов // Автоматика и телемеханика, 1966. – № 3. – С. 97–104.
5. *Deolalikar V.* A Two-Layer Paradigme Capable of Forming Arbitrary Decision Regions in Input Space / V. Deolalikar. – IEEE Trans. on Neural Networks, vol. TNN-4, #. 2. – pp. 343-347, March 2001.
6. *Гече Ф. Е.* Властивості бульових функцій реалізовних на двопорогових елементах / Ф. Гече, А. Батюк, В. Коцовський // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 2001. – № 438. – С. 22-25.
7. *Коцовський, В. М.* Властивості дихотомій, породжених двопороговими нейронними елементами / В. М. Коцовський // Науковий вісник УжНУ. Сер. : Математика і інформатика. – Ужгород, 2010. – Вип. 20. – С. 67-78.
8. *Батюк, А. Е.* Синтез высокопроизводительных специализированных структур для анализа и обработки изображений в пороговом базисе: Гл. 4 / А. Е. Батюк, В. В. Грицык, Ф. Э. Гече [и др.] // Параллельная обработка информации: монография. В 5 т. Т. 5
9. *Зуев Ю. А.* Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики / Ю. А.Зуев // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 306, вып. 3. – С. 528-530.
10. *Ирматов, А. А.* О числе пороговых функций / А. А. Ирматов // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 3. – С. 40-43.
11. *Kahn J.* On the probability that a random $\{\pm 1\}^n$-matrix is singular / J. Kahn, J. Komlós, E. Szemeredi // J. Amer. Math. Soc. – 1995. – vol. 8, #1. – pp. 223-240.
12. *Гече, Ф. Е.* Оцінка числа бульових функцій, реалізовних на нейронних елементах / Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський // Науковий вісник УжНУ. Сер. : Математика і інформатика. – Ужгород, 2002. – Вип. 7. – С. 32-37.

Одержано 21.10.2011