УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО РОЗПОДІЛ СУПРЕМУМІВ ПРИРОСТІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ПРОСТОРІВ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

The conditions of sampling continuity are investigated and estimates for distributions of supremums increments of processes from spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ are evaluated.

Досліджуються умови вибіркової неперервності та знаходяться оцінки для розподілів супремумів приростів процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Вступ. Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ були введені Єрмаковим і Островським в [1]. Робота [3], присвячена детальному вивченню цих просторів. Ця робота є продовженням [3]. Тут вивчаються умови вибіркової неперервності випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та оцінки розподілів супремумів їх приростів. Подібні оцінки для процесів з $Sub_\varphi(\Omega)$ отримані в [2].

Робота складається з вступу та трьох розділів. В першому розділі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В другому розділі знайдено оцінки для розподілів супремумів приростів випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та отримано умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця цих процесів. В третьому розділі результати другого розділу застосовуються до випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ визначених на $[0, T]$.

1. Простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 1. [3] *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція (вагова функція), така що $\psi(u) \to \infty$, якщо $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова*

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простір Банаха з нормою [3]

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Теорема 1. [3] *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\left\{|\xi| > x\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \left(\psi(u)\right)^u}{x^u}.$$

Означення 2. [3] *Додатньо монотонно неспадна послідовність $(\varkappa(n)$, $n \geq 1)$ називається M - характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ з цього простору виконується нерівність*

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_\psi \leq \varkappa(n) \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_\psi \,.$$

Теорема 2. [3] *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geq 1} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

є M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 1. [3] *Функція $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, то*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp\left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

і мажоруюча характеристика $\varkappa(n) = (\ln n)^\alpha \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha$.

Приклад 2. [3] *Функція $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$, то при $x > \|\xi\|_\psi$*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp\left\{ -\frac{\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^2}{2a} \right\}$$

і мажоруюча характеристика $\varkappa(n) = e^{2\sqrt{a \ln n} - a}$.

Приклад 3. [3] *Функція $\psi(u) = e^{u^2}$, то при $x > \|\xi\|_\psi$*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp\left\{ -\frac{2\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{3/2}}{3^{3/2}} \right\}$$

і мажоруюча характеристика $\varkappa(n) = \exp\left\{ \frac{3}{2^{2/3}} (\ln n)^{2/3} - 1 \right\}$.

Приклад 4. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$. Знайдемо оцінку для $P\{|\xi| > x\}$, $x > 0$ і $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Оскільки*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \frac{\|\xi\|_\psi^u (\ln(u+1))^{\lambda u}}{x^u}, u \geq 1, \tag{1}$$

то покладем $u + 1 = \exp\left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\}$, $z > 0$. Тоді, підставляючи цей вираз в нерівність (1), отримаємо

$$\left(\frac{\|\xi\|_\psi (\ln(u+1))^\lambda}{x} \right)^u = \frac{1}{z^{\lambda u}} = \exp\{-\lambda u \ln z\} =$$

$$\exp\left\{ -\lambda(\ln z) \left(\exp\left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} - 1 \right) \right\} =$$

$$z^\lambda \exp\left\{ -\lambda(\ln z) \exp\left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} \right\}.$$

Далі покладемо в останній нерівності $z = e$, то

$$P\left\{|\xi| > x\right\} \le e^{\lambda} \exp\left\{-\lambda \exp\left\{\left(\frac{x}{\|\xi\|_{\psi}}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{e}\right\}\right\}.$$

Знайдемо мажоруючу характеристику цього простору. Оскільки

$$\varkappa(n) = \sup_{u\ge 1} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \le \inf_{v>0} z(v) n^{\frac{1}{v+1}},$$

де $z(v) = \sup\limits_{u\ge1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$, *а* $\left(\frac{\ln(u+v+1)}{\ln(u+1)}\right)' \le 0$, *то* $z(v) = \left(\frac{\ln(v+2)}{\ln 2}\right)^{\lambda}$, *тоді* $\varkappa(n) = \inf\limits_{v>0} \left(\frac{\ln(v+2)}{\ln 2}\right)^{\lambda} n^{\frac{1}{v+1}}$. *Коли* $n = 1$, *то* $\varkappa(n) = 1$, *а при* $n > 1$ *покладемо* $v = \ln n$, *тоді*

$$\varkappa(n) = \left(\frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2}\right)^{\lambda} n^{\frac{1}{\ln n+1}} \le \left(\frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2}\right)^{\lambda} e.$$

2. Оцінки розподілів супремумів приростів випадкових процесів з $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – випадковий процес, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \rho)$ – компактний метричний простір, ρ – метрика. Розглянемо $N(u)$ – метрична масивність (число замкнених куль радіуса u, що покривають множину $\mathbf{T}$) простору $(\mathbf{T}, \rho)$ і $b = \sup\limits_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)$, $\beta = \sigma\left(\inf\limits_{s\in\mathbf{T}} \sup\limits_{t\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\right)$, покладемо $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(bp^k\right)$, де $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $p \in (0,1)$. $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ – множина центрів замкнених куль радіуса не більше ε_k, що покривають $(\mathbf{T}, \rho)$ причому число цих куль мінімальне (мінімальна ε_k сітка) і $N(\varepsilon_k)$ – число точок $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$. Позначимо $\mathbf{V} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$.

Означення 3. *Випадковий процес $X \in \mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in \mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$.*

Означення 4. [3] *Відображенням $\alpha_k(t)$, де $t \in \boldsymbol{V}$ називається таке відображення $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}_{\varepsilon_k}$, що $\alpha_k(t) \in \boldsymbol{V}_{\varepsilon_k}$ та $\rho(t, \alpha_k(t)) \le \varepsilon_k$ (якщо $t \in \boldsymbol{V}_{\varepsilon_k}$, то $\alpha_k(t) = t$).*

Теорема 3. *Нехай $X(t)$ – сепарабельний випадковий процес на $(\mathbf{T}, \rho)$ з простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ і виконується умова*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \left\|X(t) - X(s)\right\|_{\psi} \le \sigma(h), \tag{2}$$

де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Виконується умова

$$\int_0^{\alpha} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{3}$$

де $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика, а $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функції до $\sigma(u)$; $0 < \varepsilon \le \alpha$ – деяке число, а k – таке ціле число, що $\varepsilon_k < \varepsilon \le \varepsilon_{k-1}$. Тоді *справджується нерівність*

$$\left\| \sup_{\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)| \right\|_\psi \le \varkappa\left(D_k(\varepsilon,p)\right)\sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}+$$

$$2\frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)p}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du = S_k(\varepsilon,p),$$

де $D_k(\varepsilon,p)$ *– число точок* u,v *з* $\boldsymbol{V}_{\varepsilon_k}$*, таких що* $\|X(u)-X(v)\| \le \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}$ *та при будь-якому* $\delta>0$ *справджується нерівність*

$$P\left\{ \sup_{\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)| > \delta \right\} \le \inf_{u\ge 1}\frac{\left(S_k(\varepsilon,p)\right)^u\left(\psi(u)\right)^u}{\delta^u}. \qquad (4)$$

Доведення. Зауважимо, що справджуються нерівності

$$\sigma(\varepsilon_k)<\sigma(\varepsilon)\le\sigma(\varepsilon_{k-1}),\ bp^k<\sigma(\varepsilon)\le bp^{k-1}.$$

Позначимо $\mathbf{V}_k=\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}\mathbf{V}_{\varepsilon_j}$. Оскільки за умови (2) процес неперервний за ймовірністю (див. доведення теореми 4.1 з [3]), то $\mathbf{V}_k$ – сепаранта, тому

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le\varepsilon\\ t,s\in\mathbf{T}}}|X(t)-X(s)| = \sup_{\substack{\rho(t,s)\le\varepsilon\\ t,s\in\mathbf{V}_k}}|X(t)-X(s)|.$$

Нехай тепер t та s такі точки, що $t,s\in\mathbf{V}_k$ та $\rho(t,s)\le\varepsilon$. Оскільки t та s належать $\mathbf{V}_k$ то існують такі $m\ge k$ та $r\ge k$, що $t\in\mathbf{V}_{\varepsilon_m}$, а $s\in\mathbf{V}_{\varepsilon_r}$. Позначимо $t_m=t$, $t_{m-1}=\alpha_{m-1}(t_m)$, $t_{m-2}=\alpha_{m-2}(t_{m-1})$, $\ldots$, $t_k=\alpha_k(t_{k+1})$ і $s_r=s$, $s_{r-1}=\alpha_{r-1}(s_r)$, $s_{r-2}=\alpha_{r-2}(s_{r-1})$, $\ldots$, $s_k=\alpha_k(s_{k+1})$. Очевидно, що виконується рівність

$$X(t)-X(s)=$$

$$\sum_{l=k}^{m-1}\left(X(t_{l+1})-X(t_l)\right)+\left(X(t_k)-X(s_k)\right)-\sum_{l=k}^{r-1}\left(X(s_{l+1})-X(s_l)\right). \qquad (5)$$

З (5) випливає нерівність

$$|X(t_k)-X(s_k)|\le|X(t)-X(s)|+\sum_{l=k}^{m-1}|X(t_{l+1})-X(t_l)|+\sum_{l=k}^{r-1}|X(s_{l+1})-X(s_l)|.$$

Отже,

$$\|X(t_k)-X(s_k)\|_\psi\le\|X(t)-X(s)\|_\psi+\sum_{l=k}^{m-1}\|X(t_{l+1})-X(t_l)\|_\psi+$$

$$\sum_{l=k}^{r-1}\|X(s_{l+1})-X(s_l)\|_\psi\le\sigma(\varepsilon)+\sum_{l=k}^{m-1}\sigma(\varepsilon_l)+\sum_{l=k}^{r-1}\sigma(\varepsilon_l)\le\sigma(\varepsilon)+2\sum_{l=k}^{\infty}\sigma(\varepsilon_l)=$$

$$\sigma(\varepsilon)+2\sum_{l=k}^{\infty}bp^l=\sigma(\varepsilon)+2b\frac{p^k}{1-p}\le\sigma(\varepsilon)+2\sigma(\varepsilon)\frac{1}{1-p}=\sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}. \qquad (6)$$

Із (5) тепер отримуємо нерівність

$$|X(t)-X(s)| \leq \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1})-X(t_l)| + \sum_{l=k}^{r-1} |X(s_{l+1})-X(s_l)| +$$

$$|X(t_k)-X(s_k)| \leq \sum_{l=k}^{m-1} \max_{u\in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| + \sum_{l=k}^{r-1} \max_{u\in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| +$$

$$\max_{\substack{u,v\in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u)-X(v)\|\leq \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u)-X(v))| \leq \max_{\substack{u,v\in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u)-X(v)\|\leq \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u)-X(v))| +$$

$$2\sum_{l=k}^{\infty} \max_{u\in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| . \quad (7)$$

Оскільки останній вираз в нерівності (7) не залежить від $t,s\in \mathbf{V}_k$, таких що $\rho(t,s)\leq\varepsilon$, то враховуючи сепарабельність процесу X з ймовірністю одиниця маємо нерівність

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\leq\varepsilon \\ t,s\in\mathbf{T}}} |X(t)-X(s)| = \sup_{\substack{\rho(t,s)\leq\varepsilon \\ t,s\in\mathbf{V}_k}} |X(t)-X(s)| \leq$$

$$\max_{\substack{u,v\in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u)-X(v)\|\leq \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u)-X(v)| + 2\sum_{l=k}^{\infty} \max_{u\in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| \leq N^2(\varepsilon_k). \quad (8)$$

Тоді з (8) та означення $\varkappa(n)$ отримаємо нерівність

$$\left\| \sup_{\rho(t,s)\leq\varepsilon} |X(t)-X(s)| \right\|_\psi \leq \left\| \max_{\substack{u,v\in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u)-X(v)\|\leq \sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}}} |X(u)-X(v)| \right\|_\psi +$$

$$2\sum_{l=k}^{\infty} \left\| \max_{u\in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u)-X(\alpha_l(u))| \right\|_\psi \leq \varkappa\left(D_k(\varepsilon,p)\right)\sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p} + 2\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_{l+1})\right)\sigma(\varepsilon_l).$$

Розглянемо другий доданок в правій частині останньої нерівності

$$\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_{l+1})\right)\sigma(\varepsilon_l) = \sum_{l=k}^{\infty} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1})\right)\right) bp^l,$$

то

$$\int_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du \geq \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1})\right)\right)(bp^{l+1}-bp^{l+2}),$$

$$bp^l \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1})\right)\right) \leq \frac{1}{p(1-p)} \int_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du.$$

Тоді

$$\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa\left(N(\varepsilon_{l+1})\right)\sigma(\varepsilon_l) \leq \frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{bp^{k+1}} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du \leq$$

$$\frac{1}{p(1-p)}\int\limits_0^{p\sigma(\varepsilon)} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. *Всі результати, які мають місце для метричного простору справедливі і в псевдометричному просторі.*

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 3 і крім того справджується умова $\sigma(\varepsilon)\varkappa(D_k(\varepsilon,p)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді*

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)|\right\|_{\psi} \to 0 \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$. Крім того, випадковий процес $X(t)$ рівномірно неперервний на (T,ρ) з ймовірністю одиниця.

Доведення. Оскільки за умов наслідку при $\varepsilon \to 0$ $S_k(\varepsilon,p) \to 0$, то твердження (9) очевидне. З нерівності (4) випливає, що для будь-якого $u > 1$ справедливо

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)| > \delta\right\} \leq \frac{\left(S_k(\varepsilon,p)\right)^u\left(\psi(u)\right)^u}{\delta^u},$$

то при $\varepsilon \to 0$ $\sup\limits_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)| \to 0$. Отже існує послідовність $\check{\varepsilon}_n$, така що $\check{\varepsilon}_{n+1} < \check{\varepsilon}_n$, $\check{\varepsilon}_n \to 0$ при $n \to \infty$, що $\sup\limits_{\rho(t,s)\leq\check{\varepsilon}_n}|X(t)-X(s)| \to 0$ при $n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Оскільки $\sup\limits_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)|$ монотонно спадає по ε, то і $\sup\limits_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ з ймовірністю одиниця.

Теорема 4. *Нехай $X(t)$ – сепарабельний випадковий процес на $(\mathbf{T},\rho)$ з простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, де $\psi(u)$ – така вагова функція, що для мажоруючої характеристики простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ виконується умова*

$$\varkappa(n^2) \leq C\varkappa(n), \tag{10}$$

де $C > 0$ – деяка константа.

Якщо виконується умова (3), тоді має місце нерівність

$$\left\|\sup_{\rho(t,s)\leq\varepsilon}|X(t)-X(s)|\right\|_{\psi} \leq A(C)\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du = \check{S}_k(\varepsilon), \tag{11}$$

де $A(C) = \frac{4\left(3C^2-12C+4\right)}{3C+2}\cdot\left(\frac{C+2}{C-2}\right)^2$.

І при будь-якому $\delta > 0$ справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{\rho(t,s)\le\varepsilon}|X(t)-X(s)|>\delta\right\}\le\inf_{u\ge 1}\frac{\left(\check{S}_k(\varepsilon)\right)^u(\psi(u))^u}{\delta^u}. \qquad (12)$$

Доведення. Теорема 4 випливає з теореми 3. Дійсно, $D_k(\varepsilon,p)\le(N(\varepsilon_k))^2\le\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)^2$, тому

$$\sigma(\varepsilon)\varkappa\left(D_k(\varepsilon,p)\right)\le\varkappa\left(N^2\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\varepsilon).$$

Оскільки виконується нерівність (10) то

$$\varkappa\left(N^2\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\varepsilon)\le C\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\varepsilon). \qquad (13)$$

Легко бачити, що

$$\int\limits_{bp^{k+1}}^{bp^k}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\ge\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)bp^k(1-p),$$

тому

$$\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\le\frac{1}{bp^{k-1}p(1-p)}\int\limits_{bp^{k+1}}^{bp^k}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\le$$

$$\frac{1}{\sigma(\varepsilon)p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Отже, з (13) випливає

$$\varkappa\left(D_k(\varepsilon,p)\right)\sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}+\frac{2}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)p}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\le$$

$$\varkappa\left(N^2\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}+\frac{2}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\le$$

$$C\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(bp^k)\right)\right)\sigma(\varepsilon)\frac{3-p}{1-p}+\frac{2}{p(1-p)}\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\le$$

$$\frac{1}{p(1-p)}\left(C\cdot\frac{3-p}{1-p}+2\right)\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)}\varkappa\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du.$$

Мінімум виразу $\frac{1}{p(1-p)}\left(C\cdot\frac{3-p}{1-p}+2\right)$ набувається в точці $p=\frac{3C+2}{2C+4}$. Підставляючи це значення в останню нерівність, отримаємо потрібне.

Теорему доведено.

Зауваження 2. *Умови теореми виконуються для функцій* $\psi(u) = u^\alpha$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$. *Якщо* $\psi(u) = u^\alpha$, *то* $\varkappa(n^2) = 2^\alpha \varkappa(n)$ *тобто* $C = 2^\alpha$, *а коли* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, *то* $\varkappa(n^2) = \left(\frac{\ln(2(\ln n+1))}{\ln 2}\right)^\lambda e \le 2^\lambda \varkappa(n)$ *тобто* $C = 2^\lambda$.

Зауваження 3. *Нехай* $W(h)$, $h > 0$ *неперервна монотонно спадна функція, що* $N(h) \le W(h)$. *Тоді умова* (3) *виконується коли*

$$\int_0^z \varkappa\left(W\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty \tag{14}$$

Наслідок 2. *Нехай в теоремі 4*

$$\sigma(h) = \frac{R}{(\varkappa(W(h)))^{1/\gamma}},$$

де γ *– деяке число, таке що* $0 < \gamma < 1$. *Тоді*

$$\left\| \sup_{\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_\psi \le A(C) \frac{R}{1-\gamma} \left(\varkappa(W(\varepsilon))\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = Q(\varepsilon, \gamma)$$

та для будь-якого $\delta > 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{ \sup_{\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \le \inf_{u\ge1} \frac{(Q(\varepsilon,\gamma))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \tag{15}$$

Доведення. Дійсно, в цьому випадку $\sigma^{(-1)}(u) = W^{(-1)}\left(\varkappa^{(-1)}\left(\frac{R^\gamma}{u^\gamma}\right)\right)$. Тоді

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa\left(W\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{R^\gamma}{u^\gamma} du = \frac{R^\gamma}{1-\gamma} \sigma(\varepsilon)^{1-\gamma} < \infty. \tag{16}$$

Приклад 5. *Якщо вагова функція* $\psi(u) = u^\alpha$, *де* $\alpha > 0$, *то*

$$P\{|\xi| > \delta\} \le \exp\left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\delta}{Q(\varepsilon,\gamma)}\right)^{1/\alpha} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 1 отримаємо

$$\sigma(h) = R\left(\frac{e}{\alpha} \ln W(h)\right)^{-\alpha/\gamma}, \ 0 < \gamma < 1.$$

Приклад 6. *Якщо* $\psi(u) = e^{au}$, *де* $a \ne 0$, *то при* $\delta > Q(\varepsilon, \gamma)$

$$P\{|\xi| > \delta\} \le \exp\left\{ -\frac{\left(\ln \frac{\delta}{Q(\varepsilon,\gamma)}\right)^2}{2a} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 2 отримаємо

$$\sigma(h) = R \cdot \exp\left\{ -\frac{2}{\gamma} \sqrt{a \ln W(h)} + \frac{a}{\gamma} \right\}, \ 0 < \gamma < 1.$$

Приклад 7. *Якщо* $\psi(u) = e^{u^2}$, *то при* $\delta > Q(\varepsilon,\gamma)$

$$P\left\{|\xi| > \delta\right\} \le \exp\left\{-\frac{2\left(\ln\frac{\delta}{Q(\varepsilon,\gamma)}\right)^{3/2}}{3^{3/2}}\right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 3 отримаємо

$$\sigma(h) = R\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{2^{2/3}}\left(\ln W(h)\right)^{2/3} - 1\right)\right\},\ 0 < \gamma < 1.$$

Приклад 8. *Якщо* $\psi(u) = (\ln(u+1))^{\lambda}$, *де* $\lambda > 0$, *то*

$$P\left\{|\xi| > \delta\right\} \le z^{\lambda}\exp\left\{-\lambda(\ln z)\exp\left\{\left(\frac{\delta}{Q(\varepsilon,\gamma)}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{z}\right\}\right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 4 отримаємо

$$\sigma(h) = Re^{-1/\gamma}\left(\frac{\ln 2}{\ln(\ln W(h)+2)}\right)^{\lambda/\gamma},\ 0 < \gamma < 1.$$

3. Випадкові процеси визначені на $[0,T]$**.**

Теорема 5. *Нехай* $X = \{X(t), t\in[0,T]\}$, *де* $T > 0$ *– сепарабельний процес з простору* $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$. *Нехай виконується умова*

$$\sup_{|t-s|\le h}\left\|X(t)-X(s)\right\|_{\psi} \le \sigma(h),$$

де $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$ *– неперервна монотонно зростаюча функція, така що* $\sigma(0) = 0$. *Для будь-якого* $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^z \varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du < \infty,$$

тоді справджується нерівність

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}|X(t)-X(s)|\right\|_{\psi} \le A(C)\frac{R}{1-\gamma}\left(\varkappa\left(\frac{T}{2\varepsilon}+1\right)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \tilde{Q}(\varepsilon,\gamma).$$

Крім того? для будь-якого $\delta > 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X(t)-X(s)| > \delta\right\} \le \inf_{u\ge 1}\frac{\left(\tilde{Q}(\varepsilon,\gamma)\right)^{u}(\psi(u))^{u}}{\delta^{u}}. \tag{17}$$

Доведення. Теорема 5 випливає з наслідку 2, оскільки метрична масивність інтервалу $[0,T]$ оцінюється так

$$N(u) \le \frac{T}{2u} + 1 = W(u).$$

Приклад 9. *Якщо функція* $\psi(u) = u^\alpha$,*де* $\alpha > 0$, *то*

$$P\left\{|\xi| > \delta\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}\left(\frac{\delta}{A(C)\frac{R}{1-\gamma}\left(\frac{e}{\alpha}\ln\left(\frac{T}{2\varepsilon}+1\right)\right)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma}}}\right)^{1/\alpha}\right\}$$

Аналогічно можна розглянути всі інші приклади, які були наведені.

В багатьох випадках легко отримати таку оцінку

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \cdot |t-s|^\tau, \tag{18}$$

де $0 < \tau \leq 1$. Покажемо, як з такої оцінки можна отримати оцінку вигляду

$$\sup_{|t-s|\leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq R\left(\frac{e}{\alpha}\ln\left(\frac{T}{2h}+1\right)\right)^{-\alpha/\gamma} \tag{19}$$

Нехай $0 < j < 1$ і $u > 0$, то $j\ln\left(1+\frac{1}{u}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{u^j}\right) \leq \frac{1}{u^j}$, тобто $u^j \leq \frac{1}{j\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)}$. Тепер, якщо будь-яке $r > 0$, то $u^{rj} \leq \frac{1}{j^r\left(\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)^r}$. І якщо взяти r, таке що $rj = \tau$, то маємо $u^\tau \leq \frac{1}{\left(\frac{\tau}{r}\right)^r\left(\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)^r}$. Перепишемо нерівність (18) так

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g\left|\frac{2h}{T}\right|^\tau \cdot \frac{T^\tau}{2^\tau} \leq g\frac{T^\tau}{2^\tau}\frac{1}{\left(\frac{\tau}{r}\right)^r\left(\ln\left(1+\frac{T}{2h}\right)\right)^r}. \tag{20}$$

Якщо в останній нерівності покладемо, що $r = -\frac{\alpha}{\gamma}$, то має місце нерівність (19), де $R = g\frac{T^\tau}{2^\tau}\left(\frac{e}{\tau\gamma}\right)^{\alpha/\gamma}$.

Мінімум у правій частині нерівності (20) набувається в точці

$$r = \tau\ln\left(1+\frac{T}{2h}\right)e^{-\tau\ln\left(1+\frac{T}{2h}\right)},$$

тоді отримаємо

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g\frac{T^\tau}{2^\tau}\exp\left\{-\tau^2\ln^2\left(1+\frac{T}{2h}\right)e^{-\tau\ln\left(1+\frac{T}{2h}\right)}\right\}$$

Висновки. В роботі знайдено оцінки розподілів супремумів приростів випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та умови їх вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця. Ці оцінки, зокрема, можуть застосовуватись до точності апроксимації цих процесів різними класами функцій.

1. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей // Деп. в ВИНИТИ. – 1986. – **42**, №3752-В.86.0.
2. *О. І. Василик, Ю. В. Козаченко, Р. Є. Ямненко* φ- Субгауссові випадкові процеси: монографія, – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.– 231 с.
3. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – **86**.

Одержано 12.04.2012