УДК 517.518.84

**М. М. Пагіря** (Мукачів. держ. ун-т)

# НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

The problem of functions interpolation of one real variable by a functional interpolation continued fraction is discussed in this paper. The estimates of remainder term are established. Numerical examples are considered .

В роботі розглянута задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом. Встановлені оцінки залишкових членів. Розглянуті числові приклади.

**Вступ.** Функцію однієї дійсної змінної, яка задана своїми значеннями в точках компакту $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, можна наближати інтерполяційними багаточленами у формі Лагранжа або Ньютона [1,2], сплайнами [1], ланцюговими дробами [3,4], $N$–точковими апроксимаціями Паде [5]. Можна також шукати наближення функції у вигляді узагальненого інтерполяційного багаточлена або функціонального ланцюгового дробу. Дана робота присвячена другому із вказаних підходів [6].

**1. Постановка задачі інтерполяції. Функціональні ланцюгові дроби.** Нехай $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ — компакт і $f(x) \in C(\mathcal{R})$. Припустимо, що функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями в точках множини

$$X = \{x_i \,:\, x_i \in \mathcal{R}, x_i \neq x_j, \text{коли}\, i \neq j, i, j = 0, 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Нехай допоміжна функція $t = g(x)$ неперервна та строго монотонна на $\mathcal{R}$. Функцію $g(x)$ будемо називати функцією–базисом. Умова строгої монотонності функції $g(x)$ гарантує, що множина $G = \{t_i : t_i = g(x_i), x_i \in X,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ буде складатися із різних точок, оскільки множина (1) містить всі різні точки.

Якщо розглянути послідовність дробово–лінійних перетворень $\{v_k(x)\}$, де $f(x) = v_0(x),\ v_k(x) = v_k(x_{k-1}) + \dfrac{g(x) - g(x_k)}{v_{k+1}(x)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$, то можна отримати ([6]) функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–ФІЛД)

$$D_n(g; x) = \frac{P_n^{(g)}(g; x)}{Q_n^{(g)}(g; x)} = b_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{g(x) - g(x_{k-1})}{b_k^{(g)}}, \tag{2}$$

де $b_k^{(g)},\ k = 0, 1, \ldots, n,$ — невідомі коефіцієнти. Має місце наступне твердження.

**Теорема 1** ([6]). *Коефіцієнти Т–ФІЛД* (2) *визначаються через значення функції $y = f(x)$ у вузлах інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_n$ за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу*

$$b_0^{(g)} = f_0, \quad b_m^{(g)} = \cfrac{g(x_m) - g(x_{m-1})}{-b_{m-1}^{(g)}} \; + \; \cdots \; + \; \cfrac{g(x_m) - g(x_1)}{-b_1^{(g)}} \; + \; \cfrac{g(x_m) - g(x_0)}{f_m - b_0^{(g)}},$$

*де* $m = 1, 2, 3, \ldots, n.$

## 2. Оцінка залишкового члена Т–ФІЛД

**Теорема 2.** *Якщо частинні чисельники* $a_i = g(x) - g(x_{i-1})$ *і знаменники* $b_i^{(g)}$ *Т–ФІЛД* (2) *задовольняють умови:* $0 < |g(x) - g(x_{i-1})| \leqslant \alpha$, $\alpha + 1 \leqslant |b_i^{(g)}|$, *при* $i = 1, 2, \ldots, n$, *то знаменник* $Q_n(g; x)$ *цього ланцюгового дробу буде задовольняти нерівність*

$$|Q_n(g;x)| \geqslant \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}, & \text{при} \quad \alpha \neq 1, \\ n+1, & \text{при} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

***Доведення.*** Із умови теореми випливає, що $|Q_1(g;x)| = |b_1^{(g)}| \geqslant \alpha + 1$. Далі

$$|Q_2(g;x)| = |b_2^{(g)} b_1^{(g)} + g(x) - g(x_1)| \geqslant |Q_1(g;x)||b_2^{(g)}| - |g(x) - g(x_1)| \geqslant$$

$$\geqslant |Q_1(g;x)|(1+\alpha) - \alpha = |Q_1(g;x)| + \alpha(|Q_1(g;x)| - 1) \geqslant |Q_1(g;x)| + \alpha^2.$$

Тоді $|Q_2(g;x)| - |Q_1(g;x)| \geqslant \alpha^2$ . З формул Валліса [3, формули (2.1.6)] та умов теореми випливає, що $|Q_s(g;x)| \geqslant |Q_{s-1}(g;x)| + \alpha(|Q_{s-1}(g;x)| - |Q_{s-2}(g;x)|)$. Застосувавши метод повної математичної індукції легко отримати нерівність $|Q_s(g;x)| - |Q_{s-1}(g;x)| \geqslant \alpha^s$. Тоді

$$|Q_n| = \sum_{i=2}^{n} (|Q_i| - |Q_{i-1}|) + |Q_1| \geqslant \sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}, & \alpha \neq 1, \\ n+1, & \alpha = 1. \end{cases}$$

**Теорема 3.** *1) Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена на компакті* $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ *і задана своїми значеннями в точках множини* (1). *2) Нехай за значеннями функції* $f(x)$ *в точках множини* (1) *побудований Т—ФІЛД (2), коефіцієнти якого задовольняють умову типу Слешинського–Прінґсгейма:*

$$|b_k^{(g)}| \geqslant \alpha + 1, \quad \text{де } \alpha = \max_{t,s \in \mathcal{R}} |g(t) - g(s)| \neq 1. \tag{3}$$

*3) Нехай знайдеться точка* $x_*$, *де* $x_* \in \mathcal{R}$ *і* $x_* \notin X$, *що*

$$\left| b_{n+1}^{(g)}(x_*) \right| \geqslant \alpha + 1, \tag{4}$$

$$\text{де} \quad b_{n+1}^{(g)}(x_*) = \frac{g(x_*) - g(x_n)}{-b_n^{(g)}} + \cdots + \frac{g(x_*) - g(x_1)}{-b_1^{(g)}} + \frac{g(x_*) - g(x_0)}{y_* - b_0^{(g)}}, \tag{5}$$

$y_* = f(x_*)$. *Тоді в точці* $x_*$ *виконується нерівність*

$$|f(x_*) - D_n(g; x_*)| \leqslant \frac{(\alpha-1)^2 \prod\limits_{i=0}^{n} |g(x_*) - g(x_i)|}{(\alpha^{n+2} - 1)(\alpha^{n+1} - 1)}. \tag{6}$$

***Доведення.*** За умовою теореми точка $x_* \notin X$. Оскільки $x_* \in \mathcal{R}$, то за значеннями функції у вузлах $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$, де $x_{n+1} = x_*, y_{n+1} = y_* = f(x_*)$, можна побудувати інтерполяційний ланцюговий дріб

$$D_{n+1}(g;x) = \frac{P_{n+1}(g;x)}{Q_{n+1}(g;x)} = b_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n+1} \frac{g(x) - g(x_{k-1})}{b_k^{(g)}},$$

де $b_{n+1}^{(g)}(x_*)$ визначено в (5), а коефіцієнти $b_i^{(g)}$, $i = 0, 1, \dots, n$, збігаються із коефіцієнтами Т–ФІЛД (2). Із детермінантної формули [3, формула (2.1.9)] випливає, що різниця між $n+1$-м та $n$-м підхідними дробами запишеться у вигляді

$$D_{n+1}(g; x) - D_n(g; x) = (-1)^n \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(g(x) - g(x_i))}{Q_{n+1}(g; x)\, Q_n(g; x)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням у точці $x_*$

$$|f(x_*) - D_n(g; x_*)| = |D_{n+1}(g; x_*) - D_n(g; x_*)| = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}|g(x_*) - g(x_i)|}{|Q_{n+1}(g; x_*)| \cdot |Q_n(g; x_*)|}.$$

Із теореми 2 випливає, що $\dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} \leqslant |Q_n(g; x_*)|$, $\dfrac{\alpha^{n+2}-1}{\alpha-1} \leqslant |Q_{n+1}(g; x_*)|$. Звідки кінцеве отримуємо (6). Теорема доведена.

*Таблиця 1.*

Функція: $y = \sqrt[4]{x}$. Вузли Чебишова.

| n | $\Delta_t$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,54289100 \cdot 10^{-06}$ | $0,68880672 \cdot 10^{-08}$ | $0,68814359 \cdot 10^{-05}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,62146255 \cdot 10^{-07}$ | $0,38002537 \cdot 10^{-09}$ | $0,15508439 \cdot 10^{-05}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,65376420 \cdot 10^{-08}$ | $0,20966576 \cdot 10^{-10}$ | $0,35875440 \cdot 10^{-06}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,74030568 \cdot 10^{-09}$ | $0,11567570 \cdot 10^{-11}$ | $0,84703611 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,78369735 \cdot 10^{-10}$ | $0,63819950 \cdot 10^{-13}$ | $0,20328353 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,88134529 \cdot 10^{-11}$ | $0,35210363 \cdot 10^{-14}$ | $0,49439202 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,93715633 \cdot 10^{-12}$ | $0,19426039 \cdot 10^{-15}$ | $0,12156137 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,10489178 \cdot 10^{-12}$ | $0,10717605 \cdot 10^{-16}$ | $0,30163579 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 14 | $0,11190206 \cdot 10^{-13}$ | $0,59130411 \cdot 10^{-18}$ | $0,75423094 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 15 | $0,12481094 \cdot 10^{-14}$ | $0,32622992 \cdot 10^{-19}$ | $0,18982475 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 16 | $0,13349084 \cdot 10^{-15}$ | $0,17998503 \cdot 10^{-20}$ | $0,48041245 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 17 | $0,14849398 \cdot 10^{-16}$ | $0,99299873 \cdot 10^{-22}$ | $0,12216500 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 18 | $0,15914108 \cdot 10^{-17}$ | $0,54784879 \cdot 10^{-23}$ | $0,31193615 \cdot 10^{-12}$ | 9.999.997 |
| 19 | $0,17665541 \cdot 10^{-18}$ | $0,30225431 \cdot 10^{-24}$ | $0,79934045 \cdot 10^{-13}$ | 9.999.900 |
| 20 | $0,18963174 \cdot 10^{-19}$ | $0,16675495 \cdot 10^{-25}$ | $0,20546730 \cdot 10^{-13}$ | 9.995.916 |

**3. Приклади інтерполяції Т–ФІЛД.** Розглянемо декілька прикладів інтерполяції функцій однієї дійсної змінної Т–ФІЛД (2). На цих прикладах також проілюструємо теорему 3. Нехай на проміжку $[1,0; 1,5]$ інтерполюється функція $y = \sqrt[4]{x}$. В якості функції–базису вибрано $g(x) = \sqrt{x}$. Обчислення проводилися на множині тестових точок

$$X_* = \{x_j^* : x_j^* \in \mathcal{R},\ j = 1, 2, \dots, 10.000.000\}, \tag{7}$$

де точки $x_j^*$ вибираються за допомогою генератора псевдовипадкових чисел.

*Таблиця 2.*

Функція: $y = \sqrt[4]{x}$. Рівномірне розбиття.

| n | $\Delta_t$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,90829149 \cdot 10^{-05}$ | $0,11505169 \cdot 10^{-06}$ | $0,12498285 \cdot 10^{-03}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,15944004 \cdot 10^{-05}$ | $0,97324355 \cdot 10^{-08}$ | $0,43554951 \cdot 10^{-04}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,25593293 \cdot 10^{-06}$ | $0,81854031 \cdot 10^{-09}$ | $0,15488528 \cdot 10^{-04}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,43976225 \cdot 10^{-07}$ | $0,68519282 \cdot 10^{-10}$ | $0,55947411 \cdot 10^{-05}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,70412063 \cdot 10^{-08}$ | $0,57132877 \cdot 10^{-11}$ | $0,20460752 \cdot 10^{-05}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,11929369 \cdot 10^{-08}$ | $0,47481573 \cdot 10^{-12}$ | $0,75575190 \cdot 10^{-06}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,19066310 \cdot 10^{-09}$ | $0,39349348 \cdot 10^{-13}$ | $0,28141712 \cdot 10^{-06}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,31980753 \cdot 10^{-10}$ | $0,32530368 \cdot 10^{-14}$ | $0,10549023 \cdot 10^{-06}$ | 10.000.000 |
| 14 | $0,51044694 \cdot 10^{-11}$ | $0,26835740 \cdot 10^{-15}$ | $0,39762334 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 15 | $0,84980988 \cdot 10^{-12}$ | $0,22096404 \cdot 10^{-16}$ | $0,15056853 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 16 | $0,13549520 \cdot 10^{-12}$ | $0,18163716 \cdot 10^{-17}$ | $0,57237167 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 17 | $0,22427032 \cdot 10^{-13}$ | $0,14908705 \cdot 10^{-18}$ | $0,21829308 \cdot 10^{-08}$ | 9.999.997 |
| 18 | $0,35727573 \cdot 10^{-14}$ | $0,12220608 \cdot 10^{-19}$ | $0,83483604 \cdot 10^{-09}$ | 9.999.804 |
| 19 | $0,58862064 \cdot 10^{-15}$ | $0,10005192 \cdot 10^{-20}$ | $0,32002157 \cdot 10^{-09}$ | 9.992.002 |

Визначалися наступні величини

$$\Delta_t = \max_{x^* \in X_*} |f(x^*) - D_n(x^*)|, \quad \text{де} \qquad D_n(x) = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}$$

— інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле [4,8], який побудований за значеннями функції на множині інтерполяційних вузлів (1),

$$\Delta_g = \max_{x^* \in X_*} |f(x^*) - D_n(g; x^*)|, \qquad \Lambda = \frac{(\alpha - 1)^2 \max\limits_{x^* \in X_*} \prod\limits_{i=0}^{n} |g(x^*) - g(x_i)|}{(\alpha^{n+2} - 1)(\alpha^{n+1} - 1)}.$$

В таблицях 1–2 містяться результати обчислювальних експериментів. В першій колонці наведена кількість інтерполяційних вузлів $n$ за значеннями функції в яких побудований Т–ФІЛД (2), в наступних колонках величини $\Delta_t, \Delta_g, \Lambda$, в останній колонці вказана кількість тестових точок з множини $X_*$, для яких виконується умова (4) теореми 3. Обчислення проводились за допомогою програми, яка була написана на алгоритмічній мові Fortran–2003 і реалізована в операційній системі Scientific Linux 5.6. В таблиці 1 наведено результати інтерполяції функції для випадку, коли в якості вузлів вибрано корені ортогонального багаточлена Чебишова 1–го роду [1], а у таблиці 2 — містяться результати інтерполяції за внутрішніми точками рівномірного розбиття проміжку.

В таблицях 3–4 містяться результати інтерполяції функції $y = \sqrt{\ln x}$ на проміжку $[1,7; 2,4]$, де в якості функції–базису вибрано $g(x) = \ln x$.

Із наведених таблиць можна зробити наступні висновки: а) знайдуться такі функції $y = f(x)$ та базис–функції $t = g(x)$ для яких на певних проміжках можна побудувати Т–ФІЛД, коефіцієнти якого будуть задовольняти умову типу Слєшинського–Прінґсгейма (3); б) на вибраному проміжку інтерполяції знайдуться точки, загальна кількість яких вказана в останній колонці кожної таблиці, в яких буде виконуватися умова (4); в) інтерполяція вказаних функцій за

*Таблиця 3.*

Функція: $y = \sqrt{\ln x}$. Вузли Чебишова.

| n | $\Delta_t$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,18721214 \cdot 10^{-08}$ | $0,35021461 \cdot 10^{-09}$ | $0,55314970 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,10849229 \cdot 10^{-09}$ | $0,13402103 \cdot 10^{-10}$ | $0,51916140 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,50805771 \cdot 10^{-11}$ | $0,51287484 \cdot 10^{-12}$ | $0,48742439 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,28555274 \cdot 10^{-12}$ | $0,19626801 \cdot 10^{-13}$ | $0,45768003 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,13028713 \cdot 10^{-13}$ | $0,75108201 \cdot 10^{-15}$ | $0,42976760 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,72262226 \cdot 10^{-15}$ | $0,28742524 \cdot 10^{-16}$ | $0,40356273 \cdot 10^{-12}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,34781370 \cdot 10^{-16}$ | $0,10999227 \cdot 10^{-17}$ | $0,37895722 \cdot 10^{-13}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,19031437 \cdot 10^{-17}$ | $0,42091959 \cdot 10^{-19}$ | $0,35585228 \cdot 10^{-14}$ | 10.000.000 |
| 14 | $0,89792991 \cdot 10^{-19}$ | $0,16107784 \cdot 10^{-20}$ | $0,33415601 \cdot 10^{-15}$ | 10.000.000 |
| 15 | $0,48742808 \cdot 10^{-20}$ | $0,61641360 \cdot 10^{-22}$ | $0,31378240 \cdot 10^{-16}$ | 10.000.000 |
| 16 | $0,23800849 \cdot 10^{-21}$ | $0,23588934 \cdot 10^{-23}$ | $0,29465081 \cdot 10^{-17}$ | 10.000.000 |
| 17 | $0,12830616 \cdot 10^{-22}$ | $0,90270141 \cdot 10^{-25}$ | $0,27668550 \cdot 10^{-18}$ | 10.000.000 |
| 18 | $0,61665493 \cdot 10^{-24}$ | $0,34544565 \cdot 10^{-26}$ | $0,25981540 \cdot 10^{-19}$ | 9.999.950 |

допомогою Т–ФІЛД (2) є більш ефективною ніж наближення інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле, оскільки максимальна абсолютна похибка $\Delta_g$ на множині тестових точок $X_*$ значно менша $\Delta_t$; г) максимальна оцінка $\Lambda$ на множині тестових точок $X_*$ добре оцінює максимальну абсолютну похибку $\Delta_g$.

**4. Функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу.** Розглянемо послідовність дробово–лінійних перетворень виду

$$f(x) = v_0(x), \qquad v_0(x) = v_0(x_0) + v_1(x)(g(x) - g(x_0)),$$

$$v_k(x) = \frac{v_k(x_k)}{1 + v_{k+1}(x)(g(x) - g(x_k))}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Якщо послідовно вкласти елементи послідовності $\{v_k(x)\}$ один в другий $n+1$ раз, підставити $v_{n+1}(x)(g(x) - g(x_n)) = 0$ та позначити через $a_k^{(g)} = v_k(x_k)$, для $k = 0, 1, \ldots, n$, то отримаємо функціональний ланцюговий дріб (ФЛД) виду

$$F_n(g; x) = \frac{P_n(g; x)}{Q_n(g; x)} = a_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(g)}(g(x) - g(x_{k-1}))}{1}. \tag{8}$$

Якщо коефіцієнти ФЛД (8) визначаються із інтерполяційної умови

$$F_n(g; x_i) = y_i, \quad \text{де} \quad y_i = f(x_i), \quad x_i \in X, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

то ФЛД (8) буде інтерполяційним. Назвемо цей дріб функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу С–дробу (С–ФІЛД).

**Теорема 4.** *Коефіцієнти С–ФІЛД* (8) *визначаються через значення функції* $y = f(x)$ *у вузлах* (1) *за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченого ланцюгового дробу*

*Таблиця 4.*

Функція: $y = \sqrt{\ln x}$. Рівномірне розбиття.

| n | $\Delta_t$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,35324105 \cdot 10^{-07}$ | $0,65392821 \cdot 10^{-08}$ | $0,10769258 \cdot 10^{-05}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,31711659 \cdot 10^{-08}$ | $0,38805607 \cdot 10^{-09}$ | $0,15739797 \cdot 10^{-06}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,22921753 \cdot 10^{-09}$ | $0,22892169 \cdot 10^{-10}$ | $0,22875249 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,19804390 \cdot 10^{-10}$ | $0,13439663 \cdot 10^{-11}$ | $0,33088496 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,13825186 \cdot 10^{-11}$ | $0,78588010 \cdot 10^{-13}$ | $0,47671741 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,11670476 \cdot 10^{-12}$ | $0,45799814 \cdot 10^{-14}$ | $0,68451352 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,85392330 \cdot 10^{-14}$ | $0,26614841 \cdot 10^{-15}$ | $0,98005670 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,70911944 \cdot 10^{-15}$ | $0,15427888 \cdot 10^{-16}$ | $0,13997104 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 14 | $0,50632507 \cdot 10^{-16}$ | $0,89237784 \cdot 10^{-18}$ | $0,19947148 \cdot 10^{-12}$ | 10.000.000 |
| 15 | $0,41448106 \cdot 10^{-17}$ | $0,51518520 \cdot 10^{-19}$ | $0,28372152 \cdot 10^{-13}$ | 10.000.000 |
| 16 | $0,30510631 \cdot 10^{-18}$ | $0,29692296 \cdot 10^{-20}$ | $0,40287157 \cdot 10^{-14}$ | 9.999.998 |
| 17 | $0,24779664 \cdot 10^{-19}$ | $0,17087105 \cdot 10^{-21}$ | $0,57119291 \cdot 10^{-15}$ | 9.999.900 |
| 18 | $0,17906755 \cdot 10^{-20}$ | $0,98195488 \cdot 10^{-23}$ | $0,80873784 \cdot 10^{-16}$ | 9.994.430 |
| 19 | $0,14391804 \cdot 10^{-21}$ | $0,56424620 \cdot 10^{-24}$ | $0,11436646 \cdot 10^{-16}$ | 9.779.493 |

$$a_0^{(g)} = 0, \qquad a_k^{(g)} = \frac{1}{g(x_k) - g(x_{k-1})} \left( -1 + \frac{a_{k-1}^{(g)}(g(x_k) - g(x_{k-2}))}{-1} + \right.$$

$$\left. + \ \cdots \ + \frac{a_2^{(g)}(g(x_k) - g(x_1))}{-1} + \frac{a_1^{(g)}(g(x_k) - g(x_0))}{y_k - a_0^{(g)}} \right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (9)$$

*Таблиця 5.*

Функція: $y = \ln(\sqrt{x} + 1)$. Вузли Чебишова.

| n | $t$ | $\Delta_c$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,4645$ | $0,128296 \cdot 10^{-04}$ | $0,130603 \cdot 10^{-08}$ | $0,801522 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,4636$ | $0,260947 \cdot 10^{-05}$ | $0,556654 \cdot 10^{-10}$ | $0,915146 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,4630$ | $0,475653 \cdot 10^{-06}$ | $0,190265 \cdot 10^{-11}$ | $0,857327 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,4625$ | $0,957425 \cdot 10^{-07}$ | $0,790863 \cdot 10^{-13}$ | $0,997531 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,4622$ | $0,176166 \cdot 10^{-07}$ | $0,275595 \cdot 10^{-14}$ | $0,986747 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,4619$ | $0,352072 \cdot 10^{-08}$ | $0,112702 \cdot 10^{-15}$ | $0,116037 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,4617$ | $0,652076 \cdot 10^{-09}$ | $0,397956 \cdot 10^{-17}$ | $0,118893 \cdot 10^{-12}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,4616$ | $0,129641 \cdot 10^{-09}$ | $0,160888 \cdot 10^{-18}$ | $0,140654 \cdot 10^{-13}$ | 10.000.000 |
| 14 | $0,4615$ | $0,241276 \cdot 10^{-10}$ | $0,573571 \cdot 10^{-20}$ | $0,147624 \cdot 10^{-14}$ | 10.000.000 |
| 15 | $0,4614$ | $0,477786 \cdot 10^{-11}$ | $0,229928 \cdot 10^{-21}$ | $0,175212 \cdot 10^{-15}$ | 10.000.000 |
| 16 | $0,4613$ | $0,892528 \cdot 10^{-12}$ | $0,825685 \cdot 10^{-23}$ | $0,187066 \cdot 10^{-16}$ | 10.000.000 |

***Доведення.*** Використаємо метод повної математичної індукції. Твердження має місце при $k = 1, 2$. Припустимо, що (9) виконується при $k = j - 1$. Тоді при $m = j$ із (8) маємо

$$y_j = a_0^{(g)} + \underset{k=1}{\overset{j}{\mathrm{K}}} \frac{a_k^{(g)}\left(g(x_j) - g(x_{k-1})\right)}{1} = a_0^{(g)} + \cfrac{a_1^{(g)}(g(x_j) - g(x_0))}{1 + \underset{k=2}{\overset{j}{\mathrm{K}}} \frac{a_k^{(g)}(g(x_j) - g(x_{k-1}))}{1}}.$$

Позначимо через

$$S = 1 + \underset{k=2}{\overset{j}{\mathrm{K}}} \frac{a_k^{(g)}(g(x_j) - g(x_{k-1}))}{1} \ . \tag{10}$$

Тоді $y_j = a_0^{(g)} + \dfrac{a_1^{(g)}(g(x_j) - g(x_0))}{S}$ і $S = \dfrac{a_1^{(g)}(g(x_j) - g(x_0))}{y_j - a_0^{(g)}}$. З іншого боку для ланцюгового дробу (10) виконується припущення індукції, а отже коефіцієнт $a_j^{(g)}$ визначається через значення $S$ наступним чином

$$a_j^{(g)} = \frac{1}{g(x_j) - g(x_{j-1})} \left( -1 + \frac{a_{j-1}^{(g)}\left(g(x_j) - g(x_{j-2})\right)}{-1} + \frac{a_{j-2}^{(g)}\left(g(x_j) - g(x_{j-3})\right)}{-1} + \right.$$
$$\left. + \ \cdots \ + \frac{a_3^{(g)}\left(g(x_j) - g(x_2)\right)}{-1} + \frac{a_2^{(g)}\left(g(x_j) - g(x_1)\right)}{S - 1} \right).$$

Підставивши значення $S$ отримаємо, що (9) виконується і в цьому випадку. Отже, (9) має місце при всіх значеннях $m = 1, 2, \cdots, n$. Теорема доведена.

Легко переконатися, що С–ФІЛД (8) буде еквівалентним Т–ФІЛД (2), оскільки $a_0^{(g)} = b_0^{(g)}, a_1^{(g)} = 1/b_1^{(g)}, a_i^{(g)} = 1/(b_{i-1}^{(g)} b_i^{(g)})$, але формули (9) дозволяють знаходити коефіцієнти С–ФІЛД безпосередньо за значеннями функції в інтерполяційних вузлах.

*Таблиця 6.*

Функція: $y = \ln(\sqrt{x} + 1)$. Рівномірне розбиття.

| n | $t$ | $\Delta_c$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,4512$ | $0,169525 \cdot 10^{-03}$ | $0,198426 \cdot 10^{-07}$ | $0,111090 \cdot 10^{-05}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,4522$ | $0,515388 \cdot 10^{-04}$ | $0,128309 \cdot 10^{-08}$ | $0,189916 \cdot 10^{-06}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,4531$ | $0,139981 \cdot 10^{-04}$ | $0,662641 \cdot 10^{-10}$ | $0,264594 \cdot 10^{-07}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,4538$ | $0,417169 \cdot 10^{-05}$ | $0,413705 \cdot 10^{-11}$ | $0,456491 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,4544$ | $0,113426 \cdot 10^{-05}$ | $0,215958 \cdot 10^{-12}$ | $0,666413 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,4549$ | $0,333386 \cdot 10^{-06}$ | $0,131730 \cdot 10^{-13}$ | $0,115440 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,4553$ | $0,906983 \cdot 10^{-07}$ | $0,692531 \cdot 10^{-15}$ | $0,173648 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,4556$ | $0,263894 \cdot 10^{-07}$ | $0,415502 \cdot 10^{-16}$ | $0,301204 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 14 | $0,4559$ | $0,718180 \cdot 10^{-08}$ | $0,219534 \cdot 10^{-17}$ | $0,462349 \cdot 10^{-12}$ | 10.000.000 |
| 15 | $0,4562$ | $0,207347 \cdot 10^{-08}$ | $0,130095 \cdot 10^{-18}$ | $0,801808 \cdot 10^{-13}$ | 10.000.000 |

**Теорема 5** (наслідок із теореми 5 [9]). *Нехай коефіцієнти $a_i^{(g)}, i = 1, 2, \cdots, n$, С–ФІЛД (8) відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона–Уолла*

$$\max_{x \in \mathcal{R}} |a_i^{(g)}(g(x) - g(x_{i-1}))| \leqslant t(1-t), \quad 0 < t \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad \textit{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*тоді для знаменника* $Q_n(g;x)$ *має місце нерівність*

$$|Q_n(x)| \geqslant \Omega_n = \begin{cases} \dfrac{(1-t)^{n+1}-t^{n+1}}{1-2t}, & \text{якщо} \quad 0<t<\frac{1}{2}, \\ \dfrac{n+1}{2^n}, & \text{якщо} \quad t=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Таблиця 7.*

Функція: $y = e^{\sin x}$. Корені Чебишова.

| n | $t$ | $\Delta_c$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,4472$ | $0,716329 \cdot 10^{-09}$ | $0,220678 \cdot 10^{-11}$ | $0,268586 \cdot 10^{-09}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,4510$ | $0,273845 \cdot 10^{-09}$ | $0,152719 \cdot 10^{-13}$ | $0,581772 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,4536$ | $0,719109 \cdot 10^{-11}$ | $0,864629 \cdot 10^{-16}$ | $0,102039 \cdot 10^{-12}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,4555$ | $0,226541 \cdot 10^{-13}$ | $0,467824 \cdot 10^{-18}$ | $0,179467 \cdot 10^{-14}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,4569$ | $0,636604 \cdot 10^{-16}$ | $0,215595 \cdot 10^{-20}$ | $0,265417 \cdot 10^{-16}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,4580$ | $0,258248 \cdot 10^{-17}$ | $0,957695 \cdot 10^{-23}$ | $0,392180 \cdot 10^{-18}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,4589$ | $0,593780 \cdot 10^{-18}$ | $0,372189 \cdot 10^{-25}$ | $0,500651 \cdot 10^{-20}$ | 10.000.000 |
| 13 | $0,4595$ | $0,575723 \cdot 10^{-19}$ | $0,140233 \cdot 10^{-27}$ | $0,637164 \cdot 10^{-22}$ | 10.000.000 |

Очевидно, що коефіцієнти С–ФІЛД не будуть задовольняти умови типу Слєшинського–Прінґсгейма (3) теореми 3. Доведемо теорему, яка буде встановлювати оцінку залишкового члена С–ФІЛД в деякій точці.

**Теорема 6.** *1) Нехай функція* $f(x)$ *неперервна в* $\mathcal{R}$ *і визначена своїми значеннями в кожній внутрішній точці* $\mathcal{R}$*; 2) нехай за значеннями функції* $y=f(x)$ *в інтерполяційних вузлах* (1) *побудований С–ФІЛД* (8)*, всі коефіцієнти якого задовольняють умови*

$$a_k^{(g)} \neq 0, \quad \max_{x\in\mathcal{R}} |a_k^{(g)}(g(x)-g(x_{k-1}))| \leqslant t(1-t), \qquad \text{де} \quad 0<t\leqslant \tfrac{1}{2}, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

*3) нехай в* $\mathcal{R}$ *знайдеться точка* $x_*$ *така, що* $x_* \notin X$ *і виконуються нерівності*

$$a_{n+1}^{(g)}(g;x_*) \neq 0, \qquad \max_{x\in\mathcal{R}} |a_{n+1}^{(g)}(g;x_*)(g(x)-g(x_n))| \leqslant t(1-t),$$

$$\text{де} \quad a_{n+1}^{(g)}(g;x_*) = \frac{1}{g(x_*)-g(x_n)} \left( -1 + \frac{a_n^{(g)}(g(x_*)-g(x_{n-1}))}{-1} + \right. \\ \left. + \cdots + \frac{a_2^{(g)}(g(x_*)-g(x_1))}{-1} + \frac{a_1^{(g)}(g(x_*)-g(x_0))}{y_*-a_0^{(g)}} \right), \qquad y_* = f(x_*) \ .$$

*Тоді в точці* $x_*$ *має місце оцінка*

$$|f(x_*)-F_n(g;x_*)| < \frac{\Delta}{\Omega_n \cdot \Omega_{n+1}}, \quad \text{де} \quad \Delta = \prod_{i=1}^{n+1} |a_i^{(g)}(g(x_*)-g(x_{i-1}))|. \tag{11}$$

***Доведення.*** Оскільки за умовою теореми точка $x_* \in \mathfrak{R}$ не належить до інтерполяційних вузлів, то за значеннями функції в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, де $x_{n+1} = x_*$, можна побудувати ще один С–ФІЛД

$$F_{n+1}(g;x) = \frac{P_{n+1}(g;x)}{Q_{n+1}(g;x)} = a_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^{(g)}\,(g(x) - g(x_{k-1}))}{1},$$

де коефіцієнти $a_0^{(g)}, a_1^{(g)}, \ldots, a_n^{(g)}$ збігаються із коефіцієнтами С–ФІЛД (8), а коефіцієнт $a_{n+1}^{(g)} = a_{n+1}^{(g)}(g;x_*)$. Різниця між двома сусідніми підхідними дробами рівна

$$F_{n+1}(g;x) - F_n(g;x) = \frac{(-1)^n \prod\limits_{i=0}^{n} a_{i+1}^{(g)}(g(x) - g(x_i))}{Q_n(g;x)\,Q_{n+1}(g;x)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням в точці $x = x_*$, маємо

$$|F_{n+1}(g;x_*) - F_n(g;x_*)| = |f(x_*) - F_n(g;x_*)| = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1} |a_i^{(g)}\,(g(x_*) - g(x_{i-1}))|}{|Q_{n+1}(g;x_*)|\,|Q_n(g;x_*)|}.$$

Спираючись на теорему 5 отримуємо (11).

**5. Приклади інтерполяції С–ФІЛД.** Розглянемо деякі числові приклади інтерполяції функцій однієї дійсної змінної С–ФІЛД (8) на проміжку. На цих прикладах проілюструємо ефективність оцінок теореми 6 та порівняємо запропонований спосіб інтерполяції із наближенням функції правильним інтерполяційним ланцюговим С–дробом.

*Таблиця 8.*

Функція: $y = e^{\sin x}$. Рівномірне розбиття.

| n | $t$ | $\Delta_c$ | $\Delta_g$ | $\Lambda$ | К-ть |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | $0,3771$ | $0,140814 \cdot 10^{-07}$ | $0,439753 \cdot 10^{-10}$ | $0,304540 \cdot 10^{-08}$ | 10.000.000 |
| 7 | $0,3862$ | $0,852189 \cdot 10^{-08}$ | $0,474952 \cdot 10^{-12}$ | $0,934259 \cdot 10^{-10}$ | 10.000.000 |
| 8 | $0,3936$ | $0,355708 \cdot 10^{-09}$ | $0,417191 \cdot 10^{-14}$ | $0,239845 \cdot 10^{-11}$ | 10.000.000 |
| 9 | $0,3997$ | $0,166375 \cdot 10^{-11}$ | $0,348496 \cdot 10^{-16}$ | $0,599381 \cdot 10^{-13}$ | 10.000.000 |
| 10 | $0,4049$ | $0,741540 \cdot 10^{-14}$ | $0,246969 \cdot 10^{-18}$ | $0,129399 \cdot 10^{-14}$ | 10.000.000 |
| 11 | $0,4093$ | $0,447768 \cdot 10^{-15}$ | $0,168123 \cdot 10^{-20}$ | $0,272488 \cdot 10^{-16}$ | 10.000.000 |
| 12 | $0,4130$ | $0,155000 \cdot 10^{-15}$ | $0,998441 \cdot 10^{-23}$ | $0,506808 \cdot 10^{-18}$ | 10.000.000 |

Як і в попередньому випадку, обчислення проводились на множині тестових псевдовипадкових точок (7). Визначалися наступні величини

$$\Delta_c = \max_{x \in X_*} |f(x) - F_n(x)|, \quad \text{де} \quad F_n(x) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x - x_{k-1})}{1}$$

— правильний інтерполяційний ланцюговий С–дріб [10], який побудований за значеннями функції на множині інтерполяційних вузлів (1),

$$\Delta_g = \max_{x \in X_*} |f(x) - F_n(g;x)|, \qquad \Lambda = \frac{\max\limits_{x \in X_*} \prod\limits_{i=0}^{n} |a_i^{(g)}(g(x) - g(x_i))|}{\Omega_n\,\Omega_{n+1}}.$$

Коефіцієнти $a_i^{(g)}, i = 1, 2, \ldots, n$, С–ФІЛД (6) та $a_{n+1}^{(g)}(g; x)$ згідно із припущенням теореми 6 мають задовольняти умови типу Пейдона–Уолла. Значення $t_1, 0 < t_1 \leqslant \frac{1}{2}$, при яких коефіцієнти С–ФІЛД задовольняють вказану умову і значення $t_2, 0 < t_2 \leqslant \frac{1}{2}$, при якому $a_{n+1}^{(g)}(g; x_*)$ задовольняє ту ж умову для всіх значень $x_* \in X^*$, можуть бути, взагалі кажучи, різними. А тому при проведенні обчислень визначається ще одна величина $t = \max\{t_1, t_2\}$.

Колонки в наведених таблицях містять такі значення: в першій колонці вказано кількість інтерполяційних вузлів $n$ за значеннями функції в яких будується С–ФІЛД (8), в другій колонці — значення максимального із двох значень $t_1, t_2$, в наступних колонках — $\Delta_c, \Delta_g, \Lambda$, в останній колонці вказана загальна кількість точок множини (7) в яких виконуються умови теореми 6.

Нехай на проміжку $[0,2; 1,5]$ інтерполюється функція $y = \ln(\sqrt{x} + 1)$. В якості функції–базису $t = g(x)$ виберемо функцію $\sqrt{x}$.

В таблиці 5 містяться дані числових експериментів інтерполяції функції, коли в якості вузлів інтерполяції вибрано корені багаточлену Чебишова 1-го роду. Аналогічно, в таблиці 6 — результати числових експериментів для випадку рівномірного розбиття проміжку.

В таблицях 7–8 наведено результати інтерполяції функції $y = e^{\sin x}$ на проміжку $[-0,25; 0,15]$. В якості функції–базису вибрано $g(x) = \sin x$. В таблиці 7 вміщено результати інтерполяції за коренями Чебишова, а в таблиці 8 — за точками рівномірного розбиття проміжку.

Із наведених прикладів випливають наступні висновки: а) інтерполяція розглянутих функцій є більш ефективною, значення максимальної похибки наближення є більш кращим, коли в якості функції–базису вибрано не $g(x) = x$, а відповідно, $g(x) = \sqrt{x}$ та $g(x) = \sin x$; б) множина функцій, для яких виконуються умови теореми 6, не порожня; в) кількість тестових точок, в яких $a_{n+1}^{(g)}(g; x_*)$ задовольняє умови теореми також не порожня — у наведених прикладах в усіх 10.000.000 псевдовипадкових точок умови типу Пейдона–Уолла виконуються; г) максимальне значення оцінки $\Lambda$ з теореми на множині пробних точок досить ефективне.

**6. Висновки.** В роботі досліджувалася задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної на компакті функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом. Отримано формули для знаходження коефіцієнтів ланцюгових дробів за значеннями функції в інтерполяційних вузлах, встановлені точкові оцінки залишкових членів, наведені результати числових експериментів. Розглянуті приклади ілюструють ефективність запропонованого підходу.

1. *Гаврилюк І. П.,Макаров В. Л.* Методи обчислень. У 2 ч. — К.: Вища школа, 1995. — Ч. 1. — 367 с.
2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. В 2-х кн. – Саратов: Из-во Сарат. ун-та, 1990. — 424 с.
3. *Джоунс У.,Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
4. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 527 с.
5. *Бейкер Дж., Грейвс–Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М. Мир, 1986. — 502 с.
6. *Пагіря М. М.* Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2010. – Вип. 20. – С. 98–110.

7. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. Вип. I. – С. 72–79.
8. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. — Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. — XII + 175 S.
9. *Пагіря М. М., Свида Т. С.* Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // Український математичний журнал. – 2006. – **58**, № 6. – С. 842–851.
10. *Pahirya M.*Interpolation Function of Non–Tiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2002. – Vol. X, Summer 2002. – P. 59–62.

Одержано 21.02.2012