

УДК 519.63

В. О. Петенько (Ужгородський нац. ун-т)

**ПРО ЛОКАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ ДЛЯ  
КВАЗІЙМОВІРНІСНИХ ГРАТЧАСТИХ РОЗПОДІЛІВ І ЇЇ  
ЗАСТОСУВАННЯ ДО НАБЛИЖЕНОГО ЗНАХОДЖЕННЯ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙРІ**

The local limit theorem for quasiprobability's lattice distributions is proved and applied to numerical solving of the one evolution problem of mathematical physics.

Доведена локальна гранична теорема для квазіймовірнісних гратчастих розподілів та проілюстроване її застосування до наближеного розв'язання однієї еволюційної задачі математичної фізики.

Вивчення граничної поведінки розподілів сум незалежних випадкових величин і векторів в значній мірі стимулює розвиток ймовірнісного апарату розв'язання прикладних задач і, зокрема, задач математичної фізики. В даній роботі доводиться локальна гранична теорема для одного класу однаково розподілених незалежних квазіймовірнісних випадкових величин на одновимірній гратці, аналогічна класичній [1] і її застосовність до наближеного розв'язання задачі відшукування фундаментального розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (-1)^{q+1} b \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}}, \quad q = 1, 2, \dots,$$

названого рівнянням типу Ейрі в зв'язку з очевидною аналогією з однією з функцій Ейрі [2] виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i(t^3 - tx)\} dt,$$

яка є розв'язком рівняння у випадку, коли  $q = 1$  і  $b = 1$ .

Основи квазіймовірнісної теорії викладені в роботах Ю. П. Студнева та його учнів (див., наприклад, [3]). Нагадаємо коротко суть цих основ. Узагальнення поняття ймовірності полягає у відмові від невід'ємності ймовірностей і можливості набувати від'ємних і комплексних значень. Наприклад, до дискретних квазіймовірнісних розподілів віднесемо не більш, як злічену множину  $p_k$ , для якої  $\sum_k p_k = 1$  і  $\sum_k |p_k| < +\infty$ .

Неперервні розподіли характеризуються щільностями – функціями  $v(x)$ , для яких  $\int_{-\infty}^{\infty} v(x) dx = 1$ , а квазіймовірнісні функції розподілу в цьому випадку ма-

тимуть вигляд  $V(x) = \int_{-\infty}^x v(z) dz$  і повинні мати обмежену варіацію.

Перетворення Фур'є-Стільтьєса розподілу

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{itx\} dV(x)$$

є аналогом характеристичної функції. Аналогічно визначаються і початкові моменти:

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dV(x)$$

у випадку існування "абсолютного моменту".

Квазіймовірнісний закон розподілу ставимо у відповідність гратчастій випадковій величині  $\xi$ , яка приймає значення виду  $c + kh$ , де  $h > 0$ ,  $k$  – ціле у відповідності з записом  $p_k = P\{\xi = c + kh\}$ .

Особливістю розглянутого в роботі класу розподілів є те, що граничними щільностями є функції виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-itx + iat^{2q+1}\} dt.$$

Не обмежуючи загальності міркувань, гратку будемо вважати центрованою, тобто виду  $\{kh\}$ , при цьому

$$\alpha_r = \sum_k (kh)^r p_k$$

і

$$w(t) = \sum_k \exp\{itkh\} p_k.$$

Сумі  $n$  незалежних однаково розподілених випадкових гратчастих величин з розподілами  $\{p_k\}$  відповідає  $\{P_n(k)\}$  –  $n$ -кратна згортка. Аналог локальної граничної теореми одержуємо у вигляді.

**Теорема 1.** *Нехай  $\xi_n$  – послідовність взаємно незалежних однаково розподілених на гратці  $\{kh\}$  квазіймовірнісних випадкових величин з розподілами  $\{p_k\}$  і перетвореннями Фур'є-Стільтьєса  $w(t)$ . Якщо виконуються умови*

- 1)  $\alpha_r = 0$ ,  $r = \overline{1, 2q}$ ,  $q \in N$ ;
- 2)  $\operatorname{Re}\alpha_{q+1} = (2q+1)!a \neq 0$ ,  $\operatorname{Im}\alpha_{2q+1} = 0$ ;
- 3) існує  $\alpha_{2q+2}$ ;
- 4)  $|w(t)| < 1$ , якщо  $|t| \in (0, \frac{\pi}{h}]$ ,

то для кожного цілого  $k$  при  $n \rightarrow \infty$  виконується співвідношення

$$\frac{{}^{2q+1}\sqrt{n}P_n(k)}{h} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{itkh}{{}^{2q+1}\sqrt{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt \rightarrow 0. \quad (1)$$

**Доведення.** Позначимо

$$R_n = \frac{{}^{2q+1}\sqrt{n}P_n(k)}{h} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{itkh}{{}^{2q+1}\sqrt{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt.$$

З формули обернення

$$P_n(k) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \exp\{-itkh\} w^n(t) dt, \tag{2}$$

одержаної з

$$w^n(t) = \sum_k \exp\{itkh\} P_n(k),$$

після заміни в (2) змінної інтегрування  $t$  на  $\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}$ , одержуємо

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \int_{D_n} \exp\left\{-\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}}\right\} w^n\left(\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}\right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_R \exp\left\{-\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt,$$

де

$$D_n = \left[ -\frac{2q+1\sqrt{n}\pi}{h}, \frac{2q+1\sqrt{n}\pi}{h} \right].$$

Подамо  $2\pi R_n$  у вигляді алгебраїчної суми інтегралів

$$2\pi R_n = I_1 - I_2 + I_3 + I_4, \tag{3}$$

де

$$I_1 = \int_{\Delta} \exp\left\{-\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}}\right\} \left[ w^n\left(\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}\right) - e^{iat^{2q+1}} \right] dt,$$

$$I_2 = \int_{R \setminus \Delta} \exp\left\{-\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt,$$

$$I_3 = \int_{d_n \setminus \Delta} \exp\left\{-\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}}\right\} w^n\left(\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}\right) dt,$$

$$I_4 = \int_{\Delta_n \setminus d_n \varepsilon} \exp\left\{-\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}}\right\} w^n\left(\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}\right) dt,$$

а області  $\Delta$  і  $d_n \varepsilon$  визначені так:

$$\Delta = \left\{ t : |t| \leq n^\lambda, 0 < \lambda < \frac{1}{(2q+1)(2q+3)} \right\},$$

$$d_n \varepsilon = \left\{ t : n^\lambda \leq |t| \leq \varepsilon^{2q+1\sqrt{n}}, \varepsilon > 0 \right\}.$$

В роботі [3] одержаний результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w^n\left(\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}\right) = e^{iat^{2q+1}},$$

і, як випливає з доведення, має місце оцінка такої збіжності

$$\left| w^n\left(\frac{t}{2q+1\sqrt{n}}\right) - e^{iat^{2q+1}} \right| \leq \frac{At^{2q+2}}{n^{\frac{1}{2q+1}}}, \quad A > 0.$$

Оцінюючи інтеграл  $I_1$ , одержуємо

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{\Delta} \left| w^n \left( \frac{t}{2q+1\sqrt{n}} \right) - e^{iat^{2q+1}} \right| \leq 2An^{-\frac{1}{2q+1}} \int_0^{n^\lambda} t^{2q+2} dt = \\ &= \frac{2A}{2q+3} n^{-(2q+3)\left[\frac{1}{(2q+1)(2q+3)}-\lambda\right]}. \end{aligned}$$

Внаслідок вибору  $\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0$ .

Інтеграл  $I_2$  оцінимо, використовуючи інтегрування по контуру, ідея якого реалізована при обчисленні інтегралів Френеля у [4]. Вважаючи  $a > 0$ , розглянемо на площині  $z = t + i\tau$  замкнений контур  $\Gamma$ , складений з частин  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  і  $\Gamma_4$ , де

$$\Gamma_1 : n^\lambda \leq |z| \leq R, \arg z = 0;$$

$$\Gamma_2 : |z| = R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2(2q+1)};$$

$$\Gamma_3 : R \geq |z| \geq n^\lambda, \arg z = \frac{\pi}{\lambda(2q+1)};$$

$$\Gamma_4 : |z| = n^\lambda, \frac{\pi}{2(2q+1)} \geq \arg z \geq 0; (R > n^\lambda).$$

Визначення частин контура  $\Gamma$  відповідає напрямку руху при інтегруванні. Функція комплексної змінної  $z$

$$f(z) = \exp \left\{ iaz^{2q+1} - iz \frac{kh}{2q+1\sqrt{n}} \right\}$$

при всіх значеннях параметрів аналітична всередині і вздовж контура  $\Gamma$ , тому, застосовуючи інтегральну теорему Коші про рівність нулю інтеграла від аналітичної функції, одержуємо

$$I_R = \int_{n^\lambda}^R \exp \left\{ -\frac{itkh}{2q+1\sqrt{n}} + iat^{2q+1} \right\} dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz - \int_{\Gamma_3} f(z) dz - \int_{\Gamma_4} f(z) dz. \quad (4)$$

Контур  $\Gamma_1$  – дуга кола радіуса  $R$  вздовж неї

$$z = Re^{i\varphi}, \quad i \varphi \in \left[ 0; \frac{\pi}{2(2q+1)} \right].$$

Тому

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz = R \int_0^{\frac{\pi}{2(2q+1)}} \exp \left\{ -iRe^{i\varphi} \frac{kh}{2q+1\sqrt{n}} + iaR^{2q+1} e^{(2q+1)\varphi} + i\varphi \right\} d\varphi.$$

Використовуючи модульну оцінку цього інтеграла, а також нерівності виду  $\sin \varphi \leq \varphi$ ,  $\sin \varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$ , одержимо

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{2(2q+1)}} \exp \left\{ \varphi \left[ \frac{|k|hR}{2q+1\sqrt{n}} - \frac{2a}{\pi} R^{2q+1} \right] \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{\exp \left\{ \frac{\pi}{2(2q+1)} \left[ \frac{|k|h}{2q+1\sqrt{n}} R - \frac{2a}{\pi} R^{2q+1} \right] - 1 \right\}}{\frac{2aR^{2q}}{\pi} - \frac{|k|h}{2q+1\sqrt{n}}} = 0(R^{-2q}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Інтеграл по контуру  $\Gamma_4$  матиме аналогічну оцінку

$$\left| \int_{\Gamma_4} f(z) dz \right| = 0(n^{-2\lambda q}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Вздовж контура  $\Gamma_3$   $z = \rho e^{\frac{i\pi}{2(2q+1)}}$ , тому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_3} f(z) dz \right| &= \left| \int_{n^\lambda}^R \left\{ -a\rho^{2q+1} - i\rho \frac{e^{i\frac{\pi}{2(2q+1)}kh}}{2q+1\sqrt{n}} + \frac{i\pi}{2(2q+1)} \right\} d\rho \right| \leq \\ &\leq \int_{n^\lambda}^R \left\{ -a\rho^{2q+1} + \rho \frac{|k|h \sin \frac{\pi}{2(2q+1)}}{2q+1\sqrt{n}} \right\} d\rho. \end{aligned}$$

Відповідний останньому невластний інтеграл збіжний, його залишок

$$\int_A^\infty \exp \left\{ -a\rho^{2q+1} + \frac{|k|h \sin \frac{\pi}{2(2q+1)}}{2q+1\sqrt{n}} \rho \right\} d\rho$$

має високу швидкість збіжності, а саме є величина порядку  $0 \left( \frac{e^{-aA^{2q+1}}}{A^{2q}} \right)$  малості при  $A \rightarrow \infty$ . Внаслідок цього, після спрямування  $R$  до нескінченності величина  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R$  стає нескінченно малою при  $n \rightarrow \infty$ . Так само для випадку  $a < 0$  можна розглянути контур  $\Gamma^*$ , симетричний контуру  $\Gamma$  по відношенню до дійсної осі. Тому і в цьому випадку  $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R$  – нескінченно мала, а також величина

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-n^\lambda} f(t) dt - \text{нескінченно мала. Тому } \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Перетворення Фур'є-Стільтьєса  $w(t)$  внаслідок виконання умов теореми 1), 2) і 3) має вигляд

$$w(t) = 1 + iat^{2q+1} + 0(t^{2q+2}), \quad t \rightarrow 0.$$

При великих  $n$

$$w^n \left( \frac{t}{2q+1\sqrt{n}} \right) = 1 + iat^{2q+1} + 0 \left( n^{-\frac{1}{2q+1}} \right) = e^{iat^{2q+1} + 0 \left( n^{-\frac{1}{2q+1}} \right)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому інтеграл  $I_4$  можна оцінювати аналогічно інтегралу  $I_R$  (4) із застосуванням контурного інтегрування, тільки  $R$  потрібно замінити на  $\varepsilon^{2q+1\sqrt{n}}$ .

Тепер можемо зробити висновок, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_4 = 0$ .

Якщо в інтегралі  $I_3$  зробити заміну із  $t$  на  $n^{\frac{1}{2q+1}}t$ , то

$$I_3 = n^{\frac{1}{2q+1}} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \frac{\pi}{h}} \exp \{ -itkh \} w^n(t) dt.$$

Враховуючи, що за умовою 4) теореми в області інтегрування  $|w(t)| < 1$ , то існує  $c_0 > 0$ , що в цій області

$$|w(t)| \leq e^{-c_0} < 1,$$

а

$$|I_3| \leq 2n^{\frac{1}{2q+1}} \cdot e^{-nc_0} \left[ \frac{\pi}{h} - \varepsilon \right].$$

На цьому оцінки інтегралів у формулі (3) закінчені, тому робимо висновок, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

Теорема доведена.

В наступному нам потрібний буде такий варіант співвідношення (2)

$$\frac{P_n(k)}{h} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ itkh - nait^{2q+1} \} dt = 0 \left( n^{-\frac{1}{2q+1}} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Проілюструємо одне застосування одержаної локальної граничної теореми до задачі наближеного відшукування фундаментального розв'язку рівняння виду

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = (-1)^{q+1} b \frac{\partial^{2q+1} u(x, \tau)}{\partial x^{2q+1}}, \quad x \in R, \quad \tau \geq 0, \quad b > 0, \quad (6)$$

тобто коректного по Г. І. Петровському [5] рівняння.

Початковою умовою при цьому є

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad (7)$$

де  $\delta(x)$  –  $\delta$ -функція Дірака.

Розв'язком задачі (6), (7) є функція

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -isx + ias^{2q+\frac{1}{\tau}} \right\} ds,$$

яка може бути знайдена методом перетворень Фур'є.

Різницева схема виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &\rightarrow \frac{u_{\Delta}(x, \tau + \Delta\tau) - u_{\Delta}(x, \tau)}{\Delta\tau}; \\ \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} &\rightarrow \frac{\sum_{k=q-1}^q (-1)^{q+k+1} C_{2q+1}^{q+k+1} u_{\Delta}(x - k\Delta x, \tau)}{\Delta x^{2q+1}}; \end{aligned}$$

з встановленням зв'язку між кроками вздовж просторової та часової осей координат

$$\Delta\tau = \gamma \Delta x^{2p+1} \quad (8)$$

зводить задачу (6), (7) до свого різницевого аналогу

$$u_{\Delta}(x, \tau + \Delta\tau) = \sum_k p_k u_{\Delta}(x - k\Delta x, \tau), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

$$u_{\Delta}(0, 0)\Delta x = 1; u_{\Delta}(k\Delta x, 0) = 0, k \neq 0, \tag{10}$$

де

$$p_k = \begin{cases} (-1)^{q+k+1}\gamma b C_{2q+1}^{q+k+1}, & k \neq 0, \\ 1 + (-1)^{q+1}\gamma b C_{2q+1}^q, & k = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Множина  $\{p_k\}$  гідно з властивостями біномних коефіцієнтів є квазіймовірнісним законом розподілу деякої ґратчастої випадкової величини з ґраткою  $\{k\Delta x\}$ .

Рівняння (9) як аналог формули повної ймовірності описує деякий процес типу блукання частинки по точках з координатами на прямій, які кратні  $\Delta x$ . Скачки на величину  $\{k\Delta x\}$  відбуваються в моменти часу, кратні  $\Delta\tau$  з "імовірностями"  $p_k$ . При цьому зміст мають тільки значення  $x$  і  $\tau$ , відповідно кратні  $\Delta x$  і  $\Delta\tau$ , але в границі, коли  $\Delta x$  і  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , стають можливими всі зміщення і всі моменти часу.

Нехай у формулах (9)  $x = k\Delta x$ ,  $\tau = n\Delta\tau$ . Розв'язуючи задачу (9), (10) послідовно, покладаючи  $n = 0, 1, 2, \dots$ , одержуємо

$$\begin{aligned} u_{\Delta}(k\Delta x, \Delta\tau) &= \frac{P_k}{\Delta x}, \\ u_{\Delta}(k\Delta x, 2\Delta\tau) &= \frac{P_2(k)}{\Delta x}, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ u_{\Delta}(k\Delta x, n\Delta\tau) &= \frac{P_n(k)}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Отже, задача (8), (9) генерує випадкову величину, задану на ґратці  $\{k\Delta x\}$  і яка має квазіймовірнісний розподіл  $\{p_k\}$ .

Перетворення Фур'є-Стільтьєса цього розподілу –

$$w(t) = \sum_k \exp\{itk\Delta x\} p_k = 1 - \gamma b 2^{2q+1} \left[ \left( \sin \frac{t\Delta x}{2} \right)^{2q+2} + i \cos \frac{t\Delta x}{2} \left( \sin \frac{t\Delta x}{2} \right)^{2q+1} \right]. \tag{13}$$

Використовуючи маклоренівські розклади  $\sin \frac{t\Delta x}{2}$  і  $\cos \frac{t\Delta x}{2}$ , одержимо виконання умов

$$\alpha_r = 0, r = \overline{1, 2q}; \alpha_{2q+1} = \gamma b \Delta x^{2q+1} (2q+1)!; \alpha_{2q+2} = \frac{(2q+2)!}{2} \gamma b x^{2q+2},$$

тобто умов 1), 2) і 3) теореми.

Використовуючи саме представлення (13), одержимо

$$|w(t)|^2 = 1 - \gamma b 2^{2q+2} \left( \sin \frac{t\Delta x}{2} \right)^{2q+2} + \gamma^2 b^2 2^{4q+8} \sin \left( \frac{t\Delta x}{2} \right)^{4q+2}.$$

Далі, враховуючи рівносильність співвідношень

$$|w(t)| < 1, |w(t)|^2 < 1,$$

для  $|t| \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right]$ , необхідною і достатньою умовою виконання 4) є нерівність

$$0 < \gamma < \frac{1}{b 2^{2q}}. \tag{14}$$

Тоді, за локальною теоремою (формула (5))

$$\frac{P_n(k)}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{isk\Delta x + ibs^{2q+1}n\Delta\tau\} dt = o\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty;$$

або

$$u_{\Delta}(k\Delta x, n\Delta\tau) - u(k\Delta x, n\Delta\tau) = o\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

що доводить збіжність запропонованої різницевої схеми при умові (14). Одним з позитивів наближення розв'язку згортками є відносно легка реалізація алгоритму (12) на ЕОМ. Зауважимо, що використовуючи дану теорему та деякі інші міркування, описані в [6], для рівняння типу Ейрі (4) можна наближено розв'язати і задачу Коші з фінітною неперервною початковою функцією, а також крайові задачі на відрізьку та півосі.

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447 с.
2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИИЛ, 1957. – 243 с.
3. Орбан Ю. М., Студнев Ю. П. Функции типа Эйри и Френеля в качестве предельных законов для свёрток функций ограниченной вариации // УМЖ. – 1973. – Вып. 3. – С. 323–331.
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций: В 2-х томах. – М.: Наука, 1968. – Том 2. – 628 с.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщённые функции. – М.: ГИТТЛ, 1958. – Вып. 3. – 274 с.
6. Петенько В. О. Про один різницевий розв'язок задачі теплопровідності на відрізьку та півосі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1994. – Вып. 1. – С. 101–105.

Одержано 23.04.2012