УДК 519.21

В. М. Радченко (КНУ імені Тараса Шевченка)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ ПРИ $t \to \infty$

We consider the stochastic heat equations driven by general stochastic measure in $\mathbb{R}$ in the mild sense. Under some assumptions, we prove that the solution tends to 0 a.s. as $t \to \infty$.

Розглядається стохастичне рівняння теплопровідності в $\mathbb{R}$ у м'якому сенсі, в якому випадковий вплив задано інтегралом за загальною стохастичною мірою. При певних умовах показано, що розв'язок прямує до нуля м.н. при $t \to \infty$.

Вступ. Нехай $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борельова σ-алгебра підмножин $\mathbb{R}$, $L_0 = L_0(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ — простір дійснозначних випадкових величин, заданих на довільному ймовірнісному просторі $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ (точніше кажучи, множина їх класів еквівалентності). Збіжність в L_0 — це збіжність за ймовірністю. Нехай μ — це стохастична міра на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, тобто σ-адитивне відображення $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L_0$ (відмітимо, що ми розглядаємо загальне означення стохастичної міри і зокрема не вимагаємо існування моментів для значень μ).

Теорія інтегрування дійсних функцій за стохастичними мірами побудована, наприклад, у [1,2]. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегровною за будь-якою μ. Крім того, має місце аналог теореми Лебега (див. [1, наслідок 1.2] або [2, твердження 7.1.1]).

Розглянемо задачу Коші, що відповідає наступному стохастичному рівнянню теплопровідності

$$du(t,x) = a^2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial x^2} + \sigma(t,x)\, d\mu(x),\ \ t > 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{1}$$

Тут $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $u : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція. Рівняння (1) ми будемо розглядати у м'якому сенсі (див. рівність (2) нижче).

Стохастичні рівняння в частинних похідних здебільшого досліджуються як рівняння в нескінченновимірних просторах (див, наприклад [3,4]). Серед асимптотичних властивостей розв'язків найбільш дослідженою є експоненційна стабільність за часом (див. [3], де також наведені додаткові посилання).

У даній статті ми розглядаємо розв'язок стохастичного рівняння як скінченновимірну випадкову функцію (що є природним, коли ми не накладаємо ніяких умов регулярності на стохастичний доданок в (1)). У роботі [5] було отримано твердження про існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (1), доведено існування його неперервної модифікації. Додаткові властивості розв'язку було розглянуто в [6]. У даній роботі ми покажемо, що цей розв'язок прямує до нуля при нескінченному збільшенні змінної часу.

1. Постановка проблеми та попередні відомості. Розв'язком рівняння (1) у м'якому сенсі буде вимірна випадкова функція $u(t,x)$, для якої справджується рівність

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x-y) u_0(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t-s, x-y)\sigma(s,y)\, ds, \tag{2}$$

де для кожних t, x рівність має справджуватись м.н., і

$$p(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/4a^2 t}$$

— це фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Нагадаємо, що $\int_{\mathbb{R}} p(t,x)\,dx = 1$. Інтеграли від випадкових функцій за dy і ds беремо при кожному фіксованому ω (властивості таких інтегралів розглянуто, наприклад в [7]).

Ми будемо розглядати наступні припущення щодо елементів рівняння (2).

A1. $u_0(y) = u_0(y,\omega) : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ вимірна і обмежена, $|u_0(y,\omega)| \le C_{u_0}(\omega)$, $\lim_{|y|\to\infty} u_0(y) = 0$.

A2. u_0 задовольняє умову Гельдера: $|u_0(y_1) - u_0(y_2)| \le L_{u_0}(\omega)|y_1 - y_2|^{\beta(u_0)}$, $\beta(u_0) \ge 1/6$.

A3. $\sigma(s,y) : [0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна і обмежена, $|\sigma(s,y)| \le C_\sigma$, $\lim_{s\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}} |\sigma(s,y)\sqrt{s}| = 0$.

A4. σ задовольняє умову Гельдера: $|\sigma(s,y_1) - \sigma(s,y_2)| \le L_\sigma(s)|y_1 - y_2|^{\beta(\sigma)}$, $\beta(\sigma) > 1/2$, $L_\sigma(s) \le L_\sigma < +\infty$, $\lim_{s\to\infty} L_\sigma(s)\sqrt{s} = 0$.

A5. Функція $|y|^\tau$ інтегровна на $\mathbb{R}$ за $d\mu(y)$ для деякого $\tau > 3/2$.

Теорема роботи [5] дає, що при виконанні умов A1-A4 рівняння (2) має єдиний розв'язок.

Також важливими для нас є твердження двох наступних лем.

Лема 1. *(лема 3.1 [5]). Нехай $g_j : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$ — вимірні функції такі, що $g(y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |g_j(y)|$ інтегровна на $\mathbb{R}$ за $d\mu(y)$. Тоді $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_j\,d\mu\right)^2 < \infty$ м.н.*

В подальшому ми будемо використовувати норму в просторі Бєсова $B_{22}^\alpha([c,d])$, $0 < \alpha < 1$. Нагадаємо, що ця норма визначена рівністю

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([c,d])} = \|g\|_{L_2([c,d])} + \left(\int_0^{d-c} (w_2(g,r))^2\, r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2},$$

$$\text{де } w_2(g,r) = \sup_{0\le v\le r}\left(\int_c^{d-v} |g(y+v) - g(y)|^2\,dy\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Також для $j \in \mathbb{R}$ і $n \ge 0$ покладемо

$$d_{kn}^{(j)} = j + k2^{-n}, \quad 0 \le k \le 2^n, \quad \Delta_{kn}^{(j)} = \left(d_{(k-1)n}^{(j)}, d_{kn}^{(j)}\right], \quad 1 \le k \le 2^n.$$

Лема 2. *(лема 3.2 [5]). Нехай Z - довільна множина, а функція $q(z,y) : Z\times[j,j+1] \to \mathbb{R}$ така, що для деякого $1/2 < \alpha < 1$ для всіх $z \in Z$ буде $q(z,\cdot) \in B_{22}^\alpha([j,j+1])$. Тоді випадкова функція*

$$\eta(z) = \int_{(j,j+1]} q(z,y)\,d\mu(y), \quad z \in Z,$$

має модифікацію $\tilde\eta(z)$ таку, що для деякої константи C_0 (незалежної від z, j, ω) і кожного $\omega \in \Omega$ буде

$$|\tilde\eta(z)| \le |q(z,j)\mu((j,j+1])| + C_0\,\|q(z,\cdot)\|_{B_{22}^\alpha([j,j+1])} \left\{\sum_{n\ge1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Основний результат. Теорема. *Нехай справджуються припущення* ***A1-A5****. Тоді для розв'язку рівняння (2) існує модифікація $u(t,x)$ така, що при кожному $x \in \mathbb{R}$ і кожному $\omega \in \Omega$ буде $u(t,x) \to 0,\ t \to \infty$.*

Доведення. Позначимо $h(t,x,y) = \int_0^t p(t-s, x-y)\sigma(s,y)\, ds$ і оцінимо останній доданок (2):

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(t,x,y)\, d\mu(y) \right| \le \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{(j,j+1]} h(t,x,y)\, d\mu(y) \right|.$$

Візьмемо довільне $1/2 < \alpha < \min\{\beta(\sigma), 3/4\}$. Розглянемо суми по $j \in \mathbb{Z}$ обох доданків правої частини (4), застосованої для $q(z,y) = h(t,x,y)$, $Z = [0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Для перших доданків маємо, що

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |h(t,x,j)\mu((j,j+1])\,| \le$$
$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau} |h(t,x,j)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1+|j|)^{2\tau} |\mu((j,j+1])|^2 \right)^{1/2} = A_1 A_2.$$

Візьмемо $\tau > 3/2$, для якого справджується **A5**. Тоді з леми 1, застосованої для $g_j(y) = (1+|j|)^{\tau}\, 1_{(j,j+1]}(y)$ маємо, що $A_2 < \infty$ м.н. (далі вважаємо $u(t,x) = 0$ на множині $A_2 = \infty$). З використанням **A3** маємо, що

$$|h(t,x,y)| \le \int_0^t \frac{|\sigma(s,y)|}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}\, e^{-(x-y)^2/4a^2(t-s)}\, ds = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^t \le$$
$$C_\sigma C \int_0^{t_0} \frac{ds}{\sqrt{t-s}} + C \sup_{y \in \mathbb{R}, s \ge t_0} |\sigma(s,y)\sqrt{s}| \int_{t_0}^t \frac{ds}{\sqrt{s(t-s)}} \le$$
$$C(\sqrt{t} - \sqrt{t-t_0}) + C \sup_{y \in \mathbb{R}, s \ge t_0} |\sigma(s,y)\sqrt{s}|. \quad (5)$$

(Тут і надалі ми будемо позначати через C неістотну для подальших обчислень константу, значення якої може бути різним в різних виразах.) Використовуючи **A4**, ми можемо вибирати досить велике t_0, а потім — досить велике t, щоб отримати значення (5) як завгодно малим рівномірно по всіх y. Оскільки

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau} < \infty, \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}} |h(t,x,j)| \to 0,\ t \to \infty, \quad (6)$$

маємо $A_1 \to 0$, $t \to \infty$.

В останньому доданку (4) використаємо рівність (3). З (5) і (6) легко отримуємо, що

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \to 0,\ t \to \infty. \quad (7)$$

Далі маємо, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \left\{ \sum_{n\ge 1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2 \right\} \le$$
$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau} \|h(t,x,\cdot)\|^2_{L_2([j,j+1])} \right)^{1/2} \times$$
$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{2\tau} \left\{ \sum_{n\ge 1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2 \right\} \right)^{1/2} = B_1 B_2. \quad (8)$$

З (5) і (7) випливає, що ряд B_1 збігається і $B_1 \to 0$, $t\to\infty$. З леми 1, застосованої для

$$\{g_j(y),\ j\in\mathbb{Z}\} = \left\{ 2^{n(1/2-\alpha)} (1+|j|)^{\tau}\, 1_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\ j\in\mathbb{Z},\ n\ge 1 \right\},$$

маємо, що $B_2 < \infty$ м.н. (вважаємо $u(t,x)=0$ на множині $B_2=\infty$).

Для оцінки L_2 -модуля неперервності $w_2(h,r)$ на відрізку $[j,j+1]$ при $v>0$ розглянемо

$$|h(t,x,y+v) - h(t,x,y)| \le \int_0^t p(t-s,x-y-v)\,|\sigma(s,y+v)-\sigma(s,y)|\,ds +$$
$$\int_0^t |p(t-s,x-y-v) - p(t-s,x-y)|\,|\sigma(s,y)|\,ds = I_1 + I_2.$$

Маємо

$$I_1 = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^t \le C L_\sigma v^{\beta(\sigma)} \int_0^{t_0} \frac{ds}{\sqrt{t-s}} + C \sup_{s\ge t_0}\{L_\sigma(s)\sqrt{s}\} v^{\beta(\sigma)} \int_{t_0}^t \frac{ds}{\sqrt{s(t-s)}}.$$

Врахувавши **А3** і рівність $\int_0^t (s(t-s))^{-1/2}\,ds = \pi$, побачимо, що

$$I_1 \le D(t) v^{\beta(\sigma)}, \quad \text{де} \quad \lim_{t\to\infty} D(t) = 0.$$

Далі розглянемо

$$I_2 = \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^t = I_{21} + I_{22}.$$

Маємо

$$I_{21} \le C_\sigma \int_0^{t_0} ds \int_y^{y+v} \left| \frac{\partial p(t-s,x-r)}{\partial r} \right| dr =$$
$$C \int_y^{y+v} dr \int_0^{t_0} \frac{|x-r|}{(t-s)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-r)^2}{4a^2(t-s)} \right\} ds =$$
$$\int_y^{y+v} dr \int_0^{t_0} \frac{1}{t-s} \frac{|x-r|}{(t-s)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-r)^2}{4a^2(t-s)} \right\} ds \le$$
$$C \sup_{z\ge 0}\{z e^{-z^2}\} \int_y^{y+v} dr \int_0^{t_0} \frac{ds}{t-s} = Cv \ln \frac{t}{t-t_0}.$$

Для I_{22} проведемо наступні міркування. Позначимо $\tilde{\sigma}(t) = \sup_{s\geq t, y\in\mathbb{R}} |\sigma(s,y)|$. Використовуючи формулу Лагранжа та позначення $\theta = \min\{|x-y-v|, |x-y|\}$, для $y, y+v \in [j, j+1]$ маємо такі оцінки:

$$I_{22} = \int_{t_0}^{t} |p(t-s, x-y-v) - p(t-s, x-y)|\, |\sigma(s,y)|\, ds \leq$$
$$C\tilde{\sigma}(t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(e^{-(x-y-v)^2/4a^2(t-s)} - e^{-(x-y)^2/4a^2(t-s)}\right) ds \leq$$
$$C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-\theta^2/4a^2(t-s)} \left| \frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)} - \frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)} \right| ds \leq$$
$$C\tilde{\sigma}(t_0) v\, (|x| + |j| + 1) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\theta^2/4a^2(t-s)} ds \leq$$
$$C\tilde{\sigma}(t_0) v\, (|j|+1)\, \theta^{-1} \int_{\theta/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz \leq C\tilde{\sigma}(t_0) v\, (|j|+1)\, \theta^{-1}.$$

Оскільки $\theta \geq |y-x|/2$ для $|y-x| > 2\sqrt{v}$, з отриманих оцінок далі маємо, що

$$\int_{[j,j+1-v]\cap\left\{|y-x|>2\sqrt{v}\right\}} I_{22}^2 dy \leq C(|j|+1)^2 v^2 \int_{\left\{|y-x|>2\sqrt{v}\right\}} \frac{dy}{(y-x)^2} = C(|j|+1)^2 v^{3/2}. \tag{9}$$

Також відмітимо наступні елементарні нерівності для $\delta, \delta_1, \delta_2 \geq 0$:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} \left(1 - e^{-\delta/r}\right) dr = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{t} \leq \int_0^{\delta} \frac{dr}{\sqrt{r}} + \int_{\delta}^{t} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\delta}{r}\, dr \leq 4\sqrt{\delta} \quad \Rightarrow$$
$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} \left| e^{-\delta_1/r} - e^{-\delta_2/r} \right| dr \leq 4\sqrt{|\delta_1 - \delta_2|}\,.$$

Звідси маємо, що

$$I_{22} \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(e^{-(x-y-v)^2/4a^2(t-s)} - e^{-(x-y)^2/4a^2(t-s)}\right) ds \leq C\, (|j|+1)^{1/2}\, v^{1/2}.$$

Тому для інтеграла по іншій множині отримуємо:

$$\int_{[j,j+1-v]\cap\left\{|y-x|\leq 2\sqrt{v}\right\}} I_2^2 dy \leq C(|j|+1) v^{3/2}. \tag{10}$$

Врахувавши нерівність $(I_1+I_2)^2 \leq 2I_1^2 + 2I_2^2$, оцінки (8), (9), маємо, що

$$W_j(t) = \left(\int_0^1 (w_2(h,r))^2\, r^{-2\alpha-1}\, dr\right)^{1/2} \leq D(t)(|j|+1), \text{ де } \lim_{t\to\infty} D(t) = 0. \tag{11}$$

Далі ми можемо повторити міркування, проведені з виразами в (8), замінивши $\|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])}$ на $W_j(t)$. З (8) випливає, що при $\tau > 3/2$ буде

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau}\, W_j^2(t) \leq C \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau}\, (1+|j|)^2 < +\infty$$

і ми знову отримаємо потрібну збіжність. Також з наведених оцінок випливає, що $h(t,x,\cdot) \in B_{22}^{\alpha}([j,j+1])$. Візьмемо модифікацію стохастичного інтеграла, для якої справджується твердження леми 2. Тоді $\int_{\mathbb{R}} h(t,x,y)\,d\mu(y) \to 0$ в сенсі, вказаному в твердженні теореми.

Розглянемо інший доданок в (2). Маємо, що

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x-y)u_0(y)\,dy = \int_{|y|\le y_0} + \int_{|y|>y_0} = I_3 + I_4\,.$$

Користуючись умовою **A1**, для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо y_0 таке, що $|u_0(y)| < \varepsilon$ для $|y| > y_0$. Оскільки $\int_{\mathbb{R}} p(t,y)\,dy = 1$, тоді маємо, що $|I_4| \le \varepsilon$ одразу для всіх t. При кожному фіксованому y_0 прямування I_3 до нуля при $t \to \infty$ випливає з нерівності $|p(t,x-y)u_0(y))| \le 1/\sqrt{t}$.

Висновки. Розглянуте в роботі стохастичне рівняння теплопровідності описує зміну температури в середовищі при наявності певних випадкових надходжень теплової енергії. Показано, що при виконанні вказаних умов і необмеженому збільшенні часу температура прямує до нуля м.н.

1. *Радченко В.Н.* Интегралы по общим случайным мерам // Труды Института математики НАН Украины. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – Т. 27. – 196 с.
2. *Kwapień S., Woyczyński W.A.* Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. – Boston: Birkhäuser, 1992.
3. *Gawarecki L.* Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions. – Heidelberg: Springer, 2011.
4. *Peszat S., Zabczyk J.* Stochastic partial differential equations with Lévy noise. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
5. *Radchenko V.M.* Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure // Studia Math. – 2009. – **194**, №3. – P. 231-251.
6. *Радченко В.М.* Властивості інтегралів за загальною випадковою мірою в стохастичному рівнянні теплопровідності // Теор. ймовірн. та матем. статист. – 2010. – **82**. – С. 104-114.
7. *Радченко В.Н.* Об определении интеграла от случайной функции // Теория вероятностей и её применения. – 1996. – **41**, №3. – С. 677-682.

Одержано 09.02.2012