УДК 519.17

М. Ф. Семенюта (Кіровоградська льотна академія НАУ)
Ж. Т. Черноусова (НТУУ "Київський політехнічний інститут")

ДИСТАНЦІЙНА МАГІЧНА РОЗМІТКА ГРАФІВ

For each graphs $P_m[P_n], P_m[C_n]$, we study with what values n and m there are a distance magic labeling. We find a distance magic labeling of the graph mC_4. We select conditions with what $G[H]$ are not distance magic graphs.

Для кожного з графів $P_m[P_n], P_m[C_n]$ проведено дослідження і визначено, при яких значеннях n і m існує дистанційна магічна розмітка. Знайдена дистанційна магічна розмітка графа mC_4. Виділено умови, за яких $G[H]$ не є дистанційним магічним графом.

Вступ

Магічна розмітка, вперше введена в 1963 році Седлячеком [1], була пов'язана з вивченням магічних квадратів. В подальшому вона знайшла застосування в теорії оптимізації, головним чином в розв'язанні задачі комівояжера [2], [3]; конструюванні секретних кодів [4], [5]; для адресних повідомлень в комунікаційних мережах; кодуванні радарних імпульсів [6]. Це стало поштовхом до накопичення теоретичного матеріалу по магічним розміткам різних класів графів, створенню методів і алгоритмів їх побудови. На основі умов магічності з'явилися нові розмітки, а саме: реберно-магічна тотальна і вершинно-магічна тотальна. Для потреб радіотрансляції виникла необхідність введення розміток, пов'язаних з відстанню між вершинами. Таким чином, Міллер та ін. [7] запропонували 1-вершинно магічну вершинну розмітку, яка авторами [8] названа дистанційною магічною. В даній області до основних задач дослідження відносяться: існування дистанційних магічних розміток для певних видів графів і характеристика дистанційних магічних графів. Вони розглядалися і частково розв'язані авторами робіт [7]– [11]. В даній статті ми визначили умови існування дистанційної магічної розмітки для графів $P_m[P_n]$, $P_m[C_n]$ і mC_4. В кожному випадку представили функцію, що індукує дану розмітку. Серед графів, які не допускають дистанційну магічну розмітку, розглянуті графи $G[H]$, одержані в результаті композиції графів G і H. Нами виділено деякі умови, що накладаються на графи операнди і приводять до того, що граф $G[H]$ не є дистанційним магічним графом.

1.Попередні відомості

Нехай граф $G = (V, E)$ є скінченим неорієнтованим графом без кратних ребер і петель, V – множина вершин, E – множина ребер. Порядок графа G – це число його вершин. Околом вершини x у графі G називається множина $N(x)$ усіх вершин із V, суміжних з вершиною x. Під степенем $deg(x)$ вершини x розуміємо число ребер, що інцидентні x. Для деяких графів ми використовуємо стандартні позначення: K_n, C_n, P_n – відповідно повний граф, простий цикл, простий ланцюг. Якщо G – зв'язний граф, то через mG позначаємо граф з m компонентами, кожна із яких є ізоморфною G. Граф $\overline{K_n}$ одержано виконанням операції доповнення над графом K_n і є нульовим графом, тобто $\overline{K_n}$ – це безреберний n-вершинний граф. Під відстанню між двома вершинами в графі будемо розуміти довжину найкоротшого простого ланцюга, який з'єднує їх. Довжина простого ланцюга – це число ребер в ньому.

Означення 1. *Дистанційною магічною розміткою графа $G = (V, E)$ порядку n називається бієкція $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, для якої існує додатне ціле число k таке, що для кожної вершини x вірна рівність $k = \sum_{y \in N(x)} f(y)$. Стала k називається магічною сталою розмітки f, сума $\sum_{y \in N(x)} f(y)$ – вагою вершини x і позначається $w(x)$. Граф, що допускає таку розмітку f, називається дистанційним магічним.*

Для довільного скінченого графа виникає задача існування, тобто задача визначення умов, за яких для деякого графа G існує дистанційна магічна розмітка.

Наступні леми дають необхідні умови існування дистанційних магічних розміток графів. Достатні умови одержані лише для окремих видів графів.

Лема 1 ([7]). *Необхідною умовою існування дистанційної магічної розмітки f графа G є виконання рівності $kn = \sum_{x \in V} deg(x) f(x)$, де $n = |V|$, $deg(x)$ – степінь вершини x.*

Лема 2 ([7]). *Якщо граф G має дві вершини u і v такі, що $|N(u) \cap N(v)| = deg(u) - 1 = deg(v) - 1$, тоді G не допускає дистанційну магічну розмітку.*

В подальшому будуть корисними результати наступних двох теорем 1, 2.

Теорема 1 ([7]). *1) Ланцюг P_n порядку n є дистанційним магічним графом тоді й тільки тоді, коли $n = 1$ або $n = 3$.*
2) Цикл C_n довжини n є дистанційним магічним графом тоді й тільки тоді, коли $n = 4$.
3) Повний граф K_n є дистанційним магічним графом тоді й тільки тоді, коли $n = 1$.
4) Колесо $W_n = C_n + K_1$ є дистанційним магічним графом тоді й тільки тоді, коли $n = 4$.
5) Дерево T є дистанційним магічним графом тоді й тільки тоді, коли $T = P_1$ або $T = P_3$.

Теорема 2 ([7]). *Довільний r-регулярний граф при непарному r не допускає дистанційну магічну розмітку.*

Також ми використовували методи генерації комбінаторних об'єктів. В даному випадку, комбінаторними об'єктами виступають мітки вершин скінченого графа, що взяті з деякої множини, а застосування до них процедури відповідності умовам означення 1, приводить до породження дистанційної магічної розмітки.

2.Дистанційна магічна розмітка графів

Для графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ введемо поняття композиції, або, іншими словами, поняття лексикографічного добутку, користуючись термінологією Харарі. Граф $G = G_1[G_2]$ називається композицією графів G_1 і G_2 за умови, що він має множину вершин $V = V_1 \times V_2$, а множина ребер $E(G)$ визначається наступним чином: вершини $u = (u_1, u_2)$ і $v = (v_1, v_2)$ суміжні в G тоді й тільки тоді, коли або $(u_1 v_1) \in E_1$, або $u_1 = v_1$ і $(u_2 v_2) \in E_2$. На теперішній час значні успіхи досягнені в розв'язанні задачі існування дистанційної магічної розмітки для графа $G[\overline{K_n}]$, де G – r-регулярний граф [7]– [11]. В [7], [9] представлені умови існування дистанційної магічної розмітки для графів $mC_p[\overline{K_n}], mK_p[\overline{K_n}]$.

Ми одержали результати по графам $P_m[P_n], P_m[C_n]$ і mC_4, що відображені в теоремах даного розділу.

Теорема 3. *Граф $P_m[P_n]$ допускає дистанційну магічну розмітку тоді й тільки тоді, коли*
1) $m = 1, n = 1$ або $n = 3$;
2) $m = 3, n = 1$.

Доведення. *Випадок 1.* $m = 1$. Якщо $m = 1$, то граф $P_1[P_n] = P_n$ буде дистанційним магічним (терема 1) тільки при $n = 1$ або $n = 3$.
Випадок 2. Якщо $n = 1$, то граф $P_m[P_1] = P_m$ буде дистанційним магічним (терема 1) тільки при $m = 1$ або $m = 3$.
Випадок 3. $m \geq 2, n \geq 2$. Розглянемо значення m і n, що не ввійшли в два попередніх випадки. Для $m \geq 2, n = 2$ в графі $P_m[P_2]$ знайдуться дві вершині u і v такі, що $|N(u) \cap N(v)| = deg(u) - 1 = deg(v) - 1$. За лемою 2 граф $P_m[P_2]$ не є дистанційним магічним.

Для $m = 3, n = 3$, аналогічно попередньому, граф $P_3[P_3]$ має дві вершини степеня чотири з трьома спільними вершинами в околі. За лемою 2 він не буде дистанційним магічним.

Нехай $m = 2, n = 3$. Позначимо $V(P_2) = \{x_1, x_2\}$ і $V(P_3) = \{y_1, y_2, y_3\}$, тоді $V(P_2[P_3]) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$. Припустимо, що $P_2[P_3]$ має дистанційну магічну розмітку f, тоді

$$\begin{cases} f((x_1, y_2)) & = f((x_1, y_1)) + f((x_1, y_3)), \\ f((x_2, y_2)) & = f((x_2, y_1)) + f((x_2, y_3)), \\ f((x_1, y_1)) & + f((x_1, y_2)) + f((x_1, y_3)) + f((x_2, y_1)) + f((x_2, y_2)) + f((x_2, y_3)) = 21. \end{cases}$$

Із системи одержимо $2f((x_1, y_2)) + 2f((x_2, y_2)) = 21$. Виконання цієї рівності неможливо ні при яких значеннях $f((x_1, y_2))$ і $f((x_2, y_2))$. Отже, $P_2[P_3]$ не буде дистанційним магічним графом.

Нехай $m \geq 2, n \geq 4$. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вершини графа P_m і через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – вершини графа P_n. Припустимо, що $P_m[P_n]$ має дистанційну магічну розмітку f. Враховуючи, що $w((x_1, y_1)) = w((x_1, y_3))$, одержимо
$f((x_1, y_2)) + f((x_2, y_1)) + \ldots + f((x_2, y_n)) = f((x_1, y_2)) + f((x_1, y_4)) + f((x_2, y_1)) + \ldots + f((x_2, y_n))$, де $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_n) \in V(P_m[P_n])$.

Отже, $f((x_1, y_4)) = 0$. Це приводить до суперечності умові магічності. Таким чином, $P_m[P_n]$ не буде дистанційним магічним графом. Теорему доведено.

Теорема 4. *Граф $P_m[C_n]$ допускає дистанційну магічну розмітку:*
1) для $m = 1$ тільки при $n = 1$ або $n = 4$;
2) для $m = 2$ тільки при $n = 4$;
3) для $m = 3$ тільки при $n = 1$.
При $m > 3$ і $n = 1, n = 2, n = 3, n \geq 5$ граф $P_m[C_n]$ не є дистанційним магічним.

Доведення. *Випадок 1.* $m = 1$. Граф $P_1[C_n] = C_n$ є дистанційним магічним (терема 1) тільки при $n = 4$.
Випадок 2. $n = 1$. Граф $P_m[C_1] = P_m$ є дистанційним магічним (терема 1) тільки при $m = 1$ або $m = 3$.
Випадок 3. $m \geq 2, n \geq 2$. Розглянемо значення m і n, які не ввійшли в два

попередніх випадки. При $m = 2, n = 2$ граф $P_2[C_2] = K_4$ не є дистанційним магічним (терема 1).

Нехай $m = 2, n = 3$. Граф $P_2[C_3]$ – це 5-регулярний граф. Згідно теореми 2 він не допускає дистанційної магічної розмітки.

Нехай $m = 2, n = 4$. Граф $P_2[C_4]$ буде r-регулярним порядку $2n = 8$, де $r = n + 2 = 6$. Припустимо, що для $P_2[C_4]$ існує дистанційна магічна розмітка f. Нехай $V(P_2) = \{x_1, x_2\}$ і $V(C_4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Для $P_2[C_4]$ маємо $V(P_2[C_4]) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_{1)}, (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4)\}$. Із леми 1 отримаємо значення магічної сталої $k = r(1+2n)/2 = 27$. Розглянемо розмітку вершин: $f(x_1, y_1) = 1, f(x_1, y_2) = 4, f(x_1, y_3) = 8, f(x_1, y_4) = 5, f(x_2, y_1) = 2, f(x_2, y_2) = 3, f(x_2, y_3) = 7, f(x_2, y_4) = 6$. Для f виконуються властивості магічності. Таким чином, граф $P_2[C_4]$ допускає дистанційну магічну розмітку.

Нехай $m = 2, n \geq 5$. Тоді граф $P_2[C_n]$ містить дві вершини u і v такі, що $|N(u) \cap N(v)| = deg(u) - 1 = deg(v) - 1$. В цьому випадку u і v – це довільні дві не суміжні вершини копії C_n в графі $P_2[C_n]$, відстань між якими дорівнює двом. Згідно леми 2 граф $P_2[C_n]$ не допускає дистанційну магічну розмітку.

Випадок 4. $m \geq 3, n \geq 2$. Нехай $m \geq 3, n = 2$. Граф $P_m[C_2] = P_m[P_2]$ не буде дистанційним магічним (випадок 3 теореми 3).

Нехай $m \geq 3, n \geq 5$. Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вершини графа P_m і через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – вершини графа C_n. Припустимо, що $P_m[C_n]$ має дистанційну магічну розмітку f. Враховуючи, що $w(x_1, y_1) = w(x_1, y_3)$, одержимо $f((x_1, y_2)) + f((x_1, y_n)) + f((x_2, y_1)) + \ldots + f((x_2, y_n)) = f((x_1, y_2)) + f((x_1, y_4)) + f((x_2, y_1)) + \ldots + f((x_2, y_n))$, де $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_1, y_n), (x_2, y_1), (x_2, y_n) \in V(P_m[C_n])$. Тому $f((x_1, y_n)) = f((x_1, y_4))$. Це приводить до суперечності умові магічності. Отже, $P_m[C_n]$ не буде дистанційним магічним графом.

Нехай $m \geq 3, n = 3$. Застосуємо міркування, аналогічні тим, що використовували при $m \geq 3, n \geq 5$, наприклад, для вершин (x_1, y_1) і (x_1, y_3). В результаті отримаємо, що $P_m[C_n]$ не є дистанційним магічним графом для $m \geq 3, n = 3$.

Розглянемо випадок $m = 3, n = 4$.
Позначимо $\Sigma_i = \sum_{j=1}^{4} f((x_i, y_j))$, де $i = 1, 2, \ldots, m$. Припустимо, що для графа $P_3[C_4]$ існує дистанційна магічна розмітка. З умови магічності випливає, що $\Sigma_1/2+\Sigma_2 = \Sigma_2/2+\Sigma_1+\Sigma_3, \Sigma_1 = \Sigma_3$, тоді $\Sigma_2 = 3\Sigma_1$. Враховуючи $\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3 = 78$, маємо $5\Sigma_1 = 78$. Прийшли до суперечності, отже $P_3[C_4]$ не допускає дистанційну магічну розмітку. Теорему доведено.

Теорема 5. *Граф mC_4 допускає дистанційну магічну розмітку для будь-якого $m \geq 1$.*

Доведення. Граф mC_4 – це 2-регулярний граф с $4m$ вершинами. Нехай x_{ij}, де $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, 3, 4$ – вершини графа mC_4. При цьому вершини $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}$ належать i-тій копії циклу C_4. Розглянемо розмітку вершин f, що визначається за формулою

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq m, j = 1, \\ 2m + 1 - i, & 1 \leq i \leq m, j = 2, \\ 4m + 1 - i, & 1 \leq i \leq m, j = 3, \\ 2m + i, & 1 \leq i \leq m, j = 4. \end{cases}$$

Відображення f є бієкцією із множини вершин графа mC_4 в множину $\{1, 2, \ldots, 4m\}$.

Крім того для кожної вершини x_{ij} i-ої копії циклу $C_4, j = 1, 2, 3, 4$, одержимо

$$w(x_{i1}) = w(x_{i3}) = f(x_{i2}) + f(x_{i4}) = 4m + 1,$$

$$w(x_{i2}) = w(x_{i4}) = f(x_{i1}) + f(x_{i3}) = 4m + 1.$$

Отже, за означенням 1 розмітка f буде дистанційною магічною розміткою графа mC_4 з магічною сталою $k = 4m + 1$. Теорему доведено.

Теореми 3–5 розширили клас графів, що допускають дистанційну магічну розмітку за певних умов.

3.Графи без дистанційних магічних розміток

Питання існування включає в себе виявлення графів, що не допускають дистанціййну магичну розмітку. При розв'язанні цієї задачі в загальному вигляді виникає ряд труднощів. Основні серед них – не завжди можливо узагальнити результати по конкретним графам на інші види графів, та відмінності у властивостях, характеристиках (наприклад, метричні характеристики) графів. Наведемо умови, одержані в загальному випадку різними авторами. Одне з них сформульовано в лемі 2. Також відомо [11], що граф порядку n, який містить дві вершини степеня $n - 1$, не є дистанційним магічним. Якщо для графа G порядку n з максимальним і минимальним степенем Δ і δ, відповідно, виконується нерівність $\Delta(\Delta + 1) > \delta(2n - \delta + 1)$, тоді граф G не є дистанційним магічним [7]. Ми розглянули частинний випадок, коли вивчаємий граф $G[H]$ отримано в результаті композиції двох графів. При виконанні умов теорем 6 і 7, $G[H]$ не буде дистанційним магічним.

Теорема 6. *Якщо граф H має дві вершини x, y степеня один і не містить ланцюг (x, z, y), то для довільного зв'язного графа G порядку $n, n \geq 2$, граф $G[H]$ не допускає дистанційну магічну розмітку.*

Доведення. Нехай $|V(H)| = p$ і $deg(x) = deg(y) = 1$, де $x, y \in V(H)$ не є кінцями ланцюга (x, z, y). Визначимо степіні вершин $u = (t, x) \in V(G[H])$ і $v = (t, y) \in V(G[H])$, де $t \in V(G) : deg(u) = 1 + pdeg(t)$,

$$deg(v) = 1 + pdeg(t).$$

Число вершин суміжних одночасно вершинам u и v дорівнює $pdeg(t)$. Таким чином, $|N(u) \cap N(v)| = deg(u) - 1 = deg(v) - 1$. Згідно леми 2 граф $G[H]$ не допускає дистанційну магічну розмітку. Теорема 6 доведена.

Теорема 7. *Якщо граф H має дві вершини x, y степеня один і не містить ланцюг (x, z, y), то для довільного графа G порядку $n, n \geq 2$, з компонентою порядку $s, s \geq 2$, граф $G[H]$ не допускає дистанційну магічну розмітку.*

Доведення. Якщо граф G зв'язний, то згідно теореми 6 $G[H]$ не допускає дистанційну магічну розмітку. Нехай граф G не є зв'язним і містить компоненту з $s \geq 2$ вершинами. Тоді граф $G[H]$ буде містити компоненту з sp вершинами, де $|V(H)| = p$. Застосуємо до цієї компоненти міркування аналогічні до тих, що представлені в теоремі 6. Таким чином, в цій компоненті, а отже і в графі $G[H]$ знайдуться дві вершини u і v, для яких $|N(u) \cap N(v)| = deg(u) - 1 = deg(v) - 1$. Отже, граф $G[H]$ не допускає дистанційну магичну розміку. Теорема 7 доведена.

Висновки В статті одержані умови існування дистанційної магічної розмітки для графів $P_m[P_n]$, $P_m[C_n]$ і mC_4. Також виділено клас графів, що не допускають таку розмітку. Для отримання характеристик невивчених видів графів, відносно їх дистанційної магічності, будуть корисними методи та способи, що використані нами в доведенні наведених теорем.

1. *Sedláçek J.* Problem 27, in theory of graphs and its aplications// Proc. Symposium Smolenice (June 1963). – P. 163–167.
2. *Kalantari B., Khosrovshahi G. B.* Magic labeling in graphs: Bounds, complexity, and an application to a variant of TSP// Networks. – 1996. – Vol. 28. – P. 211–219.
3. *Mitchell T., Kalantari B.* Magic labeling and its relationship to the traveling salesmen problem// DIMACS REU, Summer, 2001.
4. *Baskoro E. T., Simanjuntak R. Adithia M. T.* Secret sparing scheme based on magic labeling// Proc. of the 12th National Conference on Mathematics (Bali, 23–27 July 2004). – P. 139–145.
5. *Bloom G. S., Golomb S. W.* Numbered complete graphs, unusual rules and assorted applications// Theory and applications of graphs, lecture notes in Math. Springer Verlag, New York. – 1978. – Vol. 642. – P. 53–65.
6. *Wallis W. D.* Magic Graphs. – Birkhäuser, Boston, 2001.
7. *Miller M., Rodger C., Simanjuntak R.* Distance magic labelings of graphs// Australian Journal of combinatorics. – 2003. – Vol. 28. – P. 305–315.
8. *Sugeng K. A., Fronçek D., Miller M., Ryan J., Walker J.* On distance magic labeling of graphs// JCMCC. – 2009. – Vol. 71. – P. 39–48.
9. *Shafiq M. K., Ali G., Simanjuntak R.* Distance magic labelings of a union of graphs// AKCE J. Graphs. Combin. – 2009. – 6(1). – P. 191–200.
10. *Fronçek D., Kovár P., Kovárová T.* Fair incomplete tournaments// Bull. Inst. Combin. Appl. – 2006. – Vol. 642. – P. 31–33.
11. *Jinnah M. I.* On Σ-labelled graphs// In Technical Proceedings of Group Discussion on Graph Labeling Problems, eds. B.D. Acharya and S.M. Hedge. – 1999. – P. 71–77.

Одержано 09.02.2012