

УДК 517.9

С. І. Балоба, І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

In this article some classes of differential equations defined in direct product of m -measurable torus and n -measurable Euclidean space for which the conditions of existence of invariant toroidal manifolds are satisfied, are investigated.

В даній статті досліджено класи диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m -вимірному тора і n -вимірному евклідовому простору, для яких умови існування інваріантних тороїдальних многовидів виконуються.

Системи диференціальних рівнянь, що є розширенням динамічної системи на торі, описують процеси, що носять коливний характер. В останні роки теорія розширень динамічних рівнянь на торі інтенсивно розвивається. Даній тематиці присвячено ряд робіт, серед яких [1-4]. Важливим питанням є встановлення умов існування інваріантних многовидів таких систем та дослідження їх стійкості. Дана робота присвячена дослідженню умов існування інваріантних многовидів лінійної та слабконелінійної систем диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку тора та евклідового простору, та виокремлено деякі класи задач, для яких умови існування мають місце.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + f(\varphi), \quad (1)$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m -вимірному торі T^m , 2π -періодична по кожній компоненті φ_j , $j = 1, 2, \dots, m$. $\Lambda(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — неперервні матрична та векторна 2π -періодичні по φ_j функції відповідно.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x \quad (2)$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Покладемо

$$G(0, \tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - E), & \tau > 0, \end{cases}$$

де $C(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ — неперервна матрична функція, і назвемо функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x,$$

якщо інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, \tau, \varphi)\| d\tau$ рівномірно обмежений по φ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, \tau, \varphi)\| d\tau \leq k < \infty, \quad (3)$$

для всіх $\varphi \in T^m$. Функція $G(t, \tau, \varphi)$ задовольняє систему (2) при $t \neq \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau + 0, \tau, \varphi) - G(\tau - 0, \tau, \varphi) = E.$$

Нехай Ω_φ — ω -гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t(\varphi)$ такого, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Як відомо, наприклад із [1], Ω_φ не пуста множина для всіх $\varphi \in T^m$ в силу компактності фазового простору T^m , $\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$. Позначимо $A = \bigcup_{\varphi \in T^m} A_\varphi$, де A_φ — α -гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t(\varphi)$ такого, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = \Lambda. \quad (4)$$

Це означає, що матрична функція $\Lambda(\varphi)$ на множинах Ω і A є сталою матрицею $\Lambda(\varphi) = \Lambda$ для всіх $\varphi \in \Omega \cup A$. Крім того, будемо розглядати випадок, коли матриця $\Lambda(\varphi)$ блочно-діагонального вигляду:

$$\Lambda(\varphi_t(\varphi)) = \begin{pmatrix} \Lambda_-(\varphi_t(\varphi)) & 0 \\ 0 & \Lambda_+(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Теорема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re(\lambda_j(\Lambda)) \neq 0$, ($j = 1, 2, \dots, n$), причому $Re(\lambda_j(\Lambda)) < 0$, $j = 1, 2, \dots, k$ і $Re(\lambda_j(\Lambda)) > 0$, $j = k + 1, \dots, n$, то для довільної неперервної 2π -періодичної по φ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ функції $f(\varphi)$ система (1) має інваріантну тороїдальну множину $x = u(\varphi)$.*

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь, залежну від $\varphi \in T^m$ як від параметра:

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)). \quad (6)$$

Позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-)$ і $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_+)$ — матрицанти однорідних систем

$$\dot{x}_1 = \Lambda_-(\varphi_t(\varphi))x_1$$

і

$$\dot{x}_2 = \Lambda_+(\varphi_t(\varphi))x_2$$

відповідно, для яких справедливі оцінки

$$\begin{aligned} \|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-)\| &\leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \\ \|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_+)\| &\leq Ke^{\gamma(t-\tau)}, \quad t \leq \tau, \end{aligned} \quad (7)$$

при деяких доданих K і γ та при будь-яких $t, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Покажемо справедливість першої із нерівностей (7). Для цього проведемо міркування, аналогічні як у [2].

Оскільки матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-)$ допускає інтегральне представлення

$$\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-) = e^{\Lambda_-(t-\tau)} + \int_\tau^t e^{\Lambda_-(t-s)} (\Lambda_-(\varphi_s(\varphi)) - \Lambda_-) \Omega_s^t(\varphi, \Lambda_-) ds \quad (8)$$

і при деяких $K > 0$ і $\gamma > 0$

$$\|e^{\Lambda_-(t-\tau)}\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geq \tau,$$

а при достатньо великому $t \geq T$ і досить малому a

$$\|\Lambda_-(\varphi_t(\varphi)) - \Lambda_-\| \leq a,$$

з рівності (8) маємо

$$\begin{aligned} \|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-)\| &\leq Ke^{-\gamma(t-\tau)} + \int_\tau^t Ke^{-\gamma(t-s)} \|\Lambda_-(\varphi_s(\varphi)) - \Lambda_-\| \|\Omega_\tau^s(\varphi, \Lambda_-)\| ds, \\ e^{\gamma(t-\tau)} \|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-)\| &\leq K + \int_\tau^T Ke^{\gamma(s-\tau)} \|\Lambda_-(\varphi_s(\varphi)) - \Lambda_-\| \|\Omega_\tau^s(\varphi, \Lambda_-)\| ds + \\ &\quad + \int_\tau^t Kae^{\gamma(s-\tau)} \|\Omega_\tau^s(\varphi, \Lambda_-)\| ds. \end{aligned}$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана знаходимо

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-)\| \leq K_1 e^{-(\gamma-Ka)(t-\tau)},$$

де

$$K_1 = K + \int_\tau^T Ke^{\gamma(s-\tau)} \|\Lambda_-(\varphi_s(\varphi)) - \Lambda_-\| \|\Omega_\tau^s(\varphi, \Lambda_-)\| ds.$$

Другу із нерівностей (7) можна довести аналогічними міркуваннями. Позначимо через

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} \text{diag}(\Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_-), 0), & t \geq \tau, \\ -\text{diag}(0, \Omega_\tau^t(\varphi, \Lambda_+)), & t < \tau. \end{cases}$$

Із нерівностей (7) випливає, що $G(t, \tau, \varphi)$ задовольняє оцінку

$$\|G(t, \tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \quad (9)$$

при $K > 0$, $\gamma > 0$ та при будь-яких $t, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Враховуючи це, отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, \tau, \varphi)\| d\tau \leq \frac{2K}{\gamma} < \infty.$$

Отже, для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \quad (10)$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи (6).

Записавши (10) у вигляді

$$x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

де $x = u(\varphi)$, $u(\varphi)$ — 2π -періодична по φ_j , ($j = 1, 2, \dots, m$) функція, одержимо шукану інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \quad (11)$$

Теорема доведена.

Розглянемо тепер збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \quad (12)$$

Справедлива

Теорема 2. Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re(\lambda_j(\Lambda)) \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), причому $Re(\lambda_j(\Lambda)) < 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$, $Re(\lambda_j(\Lambda)) > 0$ при $j = k + 1, \dots, n$. Тоді існує таке $b > 0$, що для будь-якої неперервної 2π -періодичної по φ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ матриці $B(\varphi)$ такої, що

$$\max_{\varphi \in T^m} \|B(\varphi)\| \leq b, \quad (13)$$

система (12) має інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Доведення теореми полягає в тому, щоб показати, що функція Гріна-Самойленка $G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B)$ системи рівнянь

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x + B(\varphi_t(\varphi))x \quad (14)$$

при досить великих t допускає оцінку типу $\exp(-\gamma|t - \tau|)$, а сам многовид є

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi, \Lambda + B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \quad (15)$$

Позначимо через $G(t, \tau, \varphi)$ функцію Гріна-Самойленка системи (2), яка задовольняє оцінку (9). Для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \quad (16)$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи, залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))x + f(\varphi_t(\varphi)),$$

якщо тільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, \tau, \varphi, \Lambda + B)\| d\tau < \infty. \quad (17)$$

Як відомо із [3], враховуючи умови теореми, а також нерівність (9), система (14) має функцію Гріна-Самойленка, яка задовольняє нерівність

$$\|G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1 |t-\tau|}, \quad t, \tau \in R, \quad (18)$$

для деяких додатних сталих K_1 і γ_1 , а отже має місце нерівність (17).

Звідси одержуємо, що функція $x = u(\varphi)$, $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$ вигляду (15) визначає інваріантну тороїдальну множину системи (12). Теорему доведено.

Розглянемо слабконелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = F(\varphi, x) + \Lambda(\varphi)x, \quad (19)$$

в якій $\varphi \in T^m$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T^m)$, $\Lambda(\varphi) \in C(T^m)$, $F(\varphi, x) \in C_{\varphi, x}^{(0,2)}$ ($\varphi \in T^m$, $x \in R^n$), $\|x\| \leq h$, $\Lambda(\varphi)$ — вигляду (5). Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, x)x + f(\varphi), \quad (20)$$

де $f(\varphi) = F(\varphi, 0)$, $B(\varphi, x) = \int_0^1 \frac{\partial F(\varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$. Наведемо достатні умови існування інваріантного многовиду системи (19).

Теорема 3. *Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re\lambda_j(\Lambda) \neq 0$, ($j = 1, 2, \dots, n$), причому $Re\lambda_j(\Lambda) < 0$, при $j = 1, 2, \dots, k$ і $Re\lambda_j(\Lambda) > 0$, при $j = k+1, \dots, n$. Тоді існують такі сталі $b_0 > 0$, $m > 0$ і достатньо мала стала Ліпшиця L , що для будь-якої неперервної по φ і x в області $\varphi \in T^m$, $\|x\| \leq h$, 2π -періодичної по φ_j , $j = 1, 2, \dots, m$ матриці $F(\varphi, x)$ такої, що*

$$\max_{\varphi \in T^m} \|F(\varphi, 0)\| = m,$$

$$\max_{\varphi \in T^m, \|x\| \leq h} \|B(\varphi, x)\| = b_0$$

і

$$\|B(\varphi, x') - B(\varphi, x'')\| \leq L \|x' - x''\|,$$

де $B(\varphi, x) = \int_0^1 \frac{\partial F(\varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$, система (19) має інваріантний тороїдальний многовид.

Доведення. Покажемо, що при умовах, накладених на систему (19), вона має інваріантний тороїдальний многовид.

Цей многовид шукатимемо методом послідовних наближень як границю послідовності

$$M_k : x = u^{(k)}(\varphi), \quad \varphi \in T^m, \quad k = 1, 2, \dots, \quad u^{(0)}(\varphi) = 0,$$

кожна з яких є інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))x + f(\varphi), \quad (21)$$

тобто многовид

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, \Lambda + B_{k-1})f(\varphi_s(\varphi))ds. \quad (22)$$

Оскільки функція Гріна-Самойленка системи рівнянь (2) допускає оцінку (9), то легко встановити (як і при доведенні теореми 2), що функція Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), 0))x$$

допускає оцінку

$$\|G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B_0)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1 |t-\tau|}, \quad t, \tau \in R, \quad \varphi \in T^m, \quad (23)$$

для деяких додатних сталих K_1 і γ_1 , якщо тільки

$$\max_{\varphi \in T^m} \|B(\varphi, 0)\| \leq b_0,$$

де b_0 — достатньо мале. Тоді на основі теореми 2 робимо висновок, що тороїдальний многовид $x = u^{(1)}(\varphi)$ системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, 0))x + f(\varphi)$$

існує і має вигляд

$$x = u^{(1)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, \Lambda + B_0)f(\varphi_s(\varphi))ds.$$

За многовид M_2 візьмемо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(1)}(\varphi)))x + f(\varphi),$$

а саме

$$x = u^{(2)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, \Lambda + B_1)f(\varphi_s(\varphi))ds.$$

Якщо таким чином ми побудували многовиди M_1, M_2, \dots, M_{k-1} , то за многовид M_k беремо інваріантний тороїдальний многовид (22) системи рівнянь (21).

Покажемо, що таким методом можна побудувати інваріантний многовид системи (19). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(\varphi)$ для будь-якого $k = 1, 2, \dots$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(\varphi) \Rightarrow u(\varphi), \quad \varphi \in T^m$$

і показати, що $x = u(\varphi)$ задає інваріантний тороїдальний многовид вихідної системи (19).

Із (22) слідує нерівність

$$\|u^{(1)}(\varphi)\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, s, \varphi, \Lambda + B_0)\| \|f(\varphi_s(\varphi))\| ds$$

або, враховуючи оцінку (23),

$$\max_{\varphi \in T^m} \|u^{(1)}(\varphi)\| \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\|.$$

Вважаємо, що $\gamma_1 h > K_1 m$, тому

$$\max_{\varphi \in T^m} \|u^{(1)}(\varphi)\| < h. \quad (24)$$

Нехай для $u^{(j)}(\varphi)$, $j = 1, 2, \dots, k-1$ нерівність (24) виконується. Тоді для $j = k$ маємо:

$$\max_{\varphi \in T^m} \|u^{(k)}(\varphi)\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, s, \varphi, \Lambda + B_{k-1})\| \|f(\varphi_s(\varphi))\| ds \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\|.$$

За індукцією робимо висновок: якщо $\gamma_1 h > K_1 m$, то для кожного $k = 1, 2, \dots$ функцію $u^{(k)}(\varphi)$ можна побудувати, а, отже, можна побудувати і множину M_k , що є інваріантною тороїдальною множиною системи (21).

Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$.

Оцінимо різницю $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$. Для будь-якого $\varphi \in T^m$ $u^{(k)}(\varphi)$ є інваріантним многовидом рівняння (21), тобто $u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt} u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi)))) u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi))$ рівність

$$\frac{d}{dt} u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)))) u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому різниця $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) &= (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)))) (u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - \\ &- u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) + (B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) - B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi)))) u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)). \end{aligned}$$

Тому $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$ визначає інваріантну тороїдальну множину системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)))x + (B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi),$$

а отже, задовольняє нерівність

$$\max_{\varphi \in T^m} \|u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)\| \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in T^m} \|B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))\| \|u^{(k)}(\varphi)\| \leq$$

$$\leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \cdot \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\| \cdot L \cdot \|u^{(k)}(\varphi) - u^{(k-1)}(\varphi)\|.$$

Таким чином, вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$L \frac{2K_1}{\gamma_1} h < 1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$.

Покладемо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}(\varphi) = u(\varphi).$$

Переконаємося, що многовид $x = u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи.

Перейшовши до границі, коли $k \rightarrow \infty$ в рівності (22), бачимо, що функція $u(\varphi)$ допускає представлення (15), в якому $G(0, \tau, \varphi, \Lambda + B)$ — функція Гріна-Самойленка системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = [\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u(\varphi))]x.$$

Отже, $u(\varphi_t(\varphi))$ для будь-якого $\varphi \in T^m$ задовольняє рівність

$$\dot{u}(\varphi_t(\varphi)) = [\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))]u(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому многовид $x = u(\varphi)$ є інваріантним многовидом системи (19). Теорему доведено.

Зауважимо, якщо ж дійсні частини всіх власних значень граничної матриці Λ від'ємні, то, як відомо із [4], інваріантні многовиди систем (2), (12) і (19) є асимптотично стійкими.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Балога С. І.* Про існування інваріантної множини одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі. // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. - 2011.- Вип.22, № 2. - С.4 - 12.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.
4. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь. // Нелінійні коливання. - Т. 11, №4. - 2008. - С.520 - 529.

Одержано 10.04.2012