УДК 519.8

А. Ю. Брила, В. І. Гренджа (Ужгородський нац. ун-т)

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ

The method of finding of attainable optimum solutions of linear problem of lexicographical multicriteria optimization with alternative criteria by reduce it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічної багатокритеріальної оптимізації з альтернативними критеріями шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

Вступ. У [1,2] розглянуто підхід до розв'язання лінійної задачі лексикографічної оптимізації, який ґрунтується на зведенні її до однокритеріальної задачі лінійного програмування з використанням відповідної лінійної згортки критеріїв. У даній статті результати, отримані у [2], застосовуються для розв'язання деяких задач лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.

1. Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями

Задачі лексикографічної оптимізації виникають у випадку, коли рішення приймається на основі декількох строго ранжированих критеріїв. Але часто також трапляються ситуації, коли рішення необхідно приймати, враховуючи тільки один або декілька критеріїв якнайвищого рангу, що задовольняють наперед заданим вимогам. Дану задачу будемо називати задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями. Прикладом такої задачі може бути задача планування виробництва в залежності від відбору одного із q споживачів.

Розглядається деяке підприємство, яке може випускати n видів продукції з використанням m видів ресурсів.

Нехай

b_i– запаси ресурсу i-го виду;

a_{ij}– кількість ресурсу i-го виду, яка необхідна для випуску однієї одиниці продукції j-го виду;

ρ_j– найменша кількість продукції j-го виду, яка обов'язково повинна випускатися підприємством;

c_{lj}– ціна однієї одиниці продукції j-го виду, яку пропонує l-товий споживач;

m_l– мінімальна величина доходу підприємства, при якій може бути вибрано l-го споживача.

Кожному споживачу за деякими правилами присвоюється ранг. Перший споживач має найвищий ранг, а q-товий – найнижчий. Ранг i-го споживача вище за ранг j-го тоді і тільки тоді, коли $i < j$.

Вимагається скласти оптимальний план виробництва продукції, який дозволяє одержати максимально можливий дохід в залежності від вибору споживача якнайвищого рангу.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_j – кількість продукції j-го виду, що буде виготовлятися підприємством. Тоді обмеження на мінімально необхідні об'єми випуску продукції та обмеження на наявні запаси ресурсів описуються наступними умовами

$$x_j \geq \rho_j, \; j = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, 2, ..., m. \tag{2}$$

Множину векторів $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють обмеженням (1),(2) позначимо X. Дохід підприємства за умови вибору l-го споживача визначається функцією

$$c_l(x) = c_{l1}x_1 + c_{l2}x_2 + ... + c_{l\,n}x_n, \; l \in \{1, 2, ..., q\}.$$

Таким чином, кожному l-тому споживачу відповідає критерій $c_l(x)$, $l \in \{1, 2, ..., q\}$. За умовою задачі, дохід від реалізації продукції вибраному l-товому споживачу повинен бути не меншим, ніж m_l, тобто

$$c_l(x) \geq m_l, \; l \in \{1, 2, ..., q\}. \tag{3}$$

Критерій $c_l(x)$, що задовольняє умові (3), назвемо допустимим.

Оскільки споживачі, а отже і критерії, строго упорядковані за рангами, то дану задачу можна було б розглядати як задачу лексикографічної максимізації [3]

$$\max{}^L c(x), \; x \in X, \tag{4}$$

де $c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x))$. Однак, у даній задачі вимагається вибрати тільки один критерій якнайвищого рангу, який задовольняє умові (3). Якщо на множині X обмеження (3) для критерію вищого рангу не виконується, то цей критерій (а отже і відповідне обмеження) необхідно виключити з розгляду і шукати допустимий критерій якнайвищого рангу серед критеріїв нижчого рангу.

Нехай функціонал

$$L(x) = \bar{\alpha}_1 c_1(x) + \bar{\alpha}_2 c_2(x) + ... \bar{\alpha}_q c_q(x),$$

де числа $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_q$ вибрано згідно [2], задає лексикографічний порядок віддачі переваги на множині крайніх точок множини X. Тоді розв'язок задачі лінійного програмування [2]

$$\max L(x), \, x \in X,$$

є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації (4).

Оскільки вимагається вибрати тільки один критерій якнайвищого рангу, то дохід z підприємства виражається функцією

$$z = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + ... + \alpha_q c_q(x), \tag{5}$$

де

$$\alpha_l = \bar{\alpha}_l y_l, \; l = 1, 2, ..., q,$$

$$y_l = \begin{cases} 1, \text{якщо вибираємо l−товий критерій}, \\ 0, \; \text{інакше}, \end{cases} \quad l = 1, 2, ..., q,$$

$$\sum_{l=1}^{q} y_l = 1,$$

Природно вважати, що $c_l(x) \geq 0$, $x \in X$, $l = 1, 2, ..., q$. Тоді задача знаходження допустимого критерію якнайвищого рангу та відповідного оптимального плану випуску продукції зводиться до задачі знаходження максимуму функціонала

$$z = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + ... + \alpha_q c_q(x) \to \max \tag{6}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, 2, ..., m, \tag{7}$$

$$x_j \geq \rho_j, \ j = 1, 2, ..., n, \tag{8}$$

$$c_l(x) \geq m_l y_l, \ l = 1, 2, ..., q. \tag{9}$$

$$\alpha_l = \bar{\alpha}_l y_l, \ l = 1, 2, ..., q, \tag{10}$$

$$\sum_{l=1}^{q} y_l = 1, \tag{11}$$

$$y_l \in \{0, 1\}, \ l = 1, 2, ..., q. \tag{12}$$

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (6)-(12) *є розв'язком задачі знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору допустимого критерію якнайвищого рангу.*

Доведення. Припустимо, що $g^{l*} = (x^*, y^*, \alpha^*) \in R^{n+q+q}$ – оптимальний розв'язок задачі (6)-(12), одержаний при виборі допустимого критерію c_{l*}, не є розв'язком задачі знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору допустимого критерію якнайвищого рангу. Це означає, що існує такий допустимий критерій c_k, і відповідний йому допустимий розв'язок $g^k = \left(x^k, y^k, \alpha^k\right)$, ранг якого є вищим за ранг критерію c_{l*} $(k < l^*)$.

Так як c_{l*} є допустимим критерієм, то $y_{l*} = 1$, $\alpha_{l*} = \bar{\alpha}_{l*}$

$$z\left(g^{l*}\right) = \bar{\alpha}_{l*} c_{l*}(x^*).$$

Аналогічно з допустимості критерію c_k випливає, що $y_k = 1$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$,

$$z\left(g^k\right) = \bar{\alpha}_k c_k\left(x^k\right).$$

Враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_q$, одержимо

$$z\left(g^k\right) > z\left(g^{l*}\right),$$

що протирічить оптимальності g^{l*}. Одержане протиріччя доводить теорему.

Зауважимо, що задача знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору d допустимих критеріїв якнайвищого рангу зводиться до задачі (6)-(12), у якій умова (11) замінюється умовою

$$\sum_{l=1}^{q} y_l = d.$$

Якщо ж кількість допустимих критеріїв не обмежується, то обмеження (11) у задачі (6)-(12) необхідно відкинути.

2. Задача лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними критеріями

Розглянемо випадок, коли у задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями для допустимості критерію $c_l(x)$, $l \in D \subset \{1, 2, ..., q\}$, крім виконання умови (3), додатково вимагається, щоб така умова виконувалась хоча б для одного із критеріїв $c_i(x), i \in I_l \subset \{1, 2, ..., q\}$. Задачу знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору $p(p > 1)$ допустимих критеріїв якнайвищого рангу назвемо задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними критеріями.

Нехай $g^* = (x^*, y^*, \alpha^*) \in R^{n+q+q}$ є оптимальним розв'язком задачі

$$z = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + ... + \alpha_q c_q(x) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \geq \rho_j, \ j = 1, 2, ..., n,$$

$$c_l(x) \geq m_l y_l, \ l = 1, 2, ..., q,$$

$$\alpha_l = \bar{\alpha}_l y_l, \ l = 1, 2, ..., q,$$

$$\sum_{l=1}^{q} y_l = p,$$

$$\sum_{j \in I_l} y_j \geq y_l, \ l \in D,$$

$$y_l \in \{0, 1\}, \ l = 1, 2, ..., q.$$

Теорема 2. *x^* є розв'язком задачі знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору p допустимих залежних критеріїв якнайвищого рангу.*

Теорема доводиться аналогічно теоремі 1.

1. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
2. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — №5. — С. 135–138.
3. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.

Одержано 05.05.2012