УДК 519.21

Д. В. Гусак (Інститут математики НАН України)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ БАНКРУТСТВА ДЛЯ ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ З ВИПАДКОВИМИ ПРЕМІЯМИ

Earlier many authors obtain corresponding approximations of the ruin probability for classic (semi-continuous) risk processes $\xi(t) = u + Ct - S(t)$ $(u > 0)$ with the linear premium rate function $C(t) = Ct$ and with the claim processes $S(t) = \sum\limits_{k \le N_1(t)} Y_k$ $(N_1(t) = P_{ois}(\lambda_1), 0 < \lambda_1$ – the intensity of claims $Y_k)$. Analogies of some approximations are established for the case, when the premium process is stochastic: $C(t) = \sum\limits_{k \le N_2(t)} X_k (N_2(t) = P_{ois}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – the intensity of premiums $X_k - \exp(b), b > 0)$.

Раніше різними авторами одержані відповідні наближення ймовірності банкрутства для класичних (напівнеперервних) процесів ризику $\xi(t) = u + Ct - S(t)$ $(u > 0)$ з лінійною функцією премій $C(t) = Ct$ і процесом вимог $S(t) = \sum\limits_{k \le N_1(t)} Y_k$ $(N_1(t) = P_{ois}(\lambda_1), 0 < \lambda_1$ – інтенсивність вимог $Y_k)$. В статті наводяться аналоги деяких наближень для випадку, коли преміальний процес випадковий: $C(t) = \sum\limits_{k \le N_2(t)} X_k (N_2(t) = P_{ois}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – інтенсивність премій $X_k - \exp(b), b > 0)$.

Розглянем спочатку резервний процес ризику $R_u(t)$ та надлишковий процес вимог $\zeta(t)$ класичного типу

$$\begin{cases} R_u(t) = u + Ct - S(t), \quad C > 0, \ u > 0, \\ \zeta(t) = S(t) - Ct, \quad S(t) = \sum\limits_{k \le N(t)} Y_k, \end{cases} \tag{1}$$

де $N(t)$ - простий пуассонівський процес з $\lambda > 0$, функція розподілу (ф.р.) вимог Y_k:
$F(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\}, \ x \ge 0, \forall k \ge 1$. Припускаємо, що $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$, тоді коефіцієнт страхової надбавки (safety security loading)

$$\delta = \rho = \frac{C - \lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} > 0, m = \lambda\mu_1 - C, \mu_k = \mathbf{E}Y_1^k, k = \overline{1,3} \tag{2}$$

Імовірність банкрутства визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \mathbf{P}\{R_u(t) < 0 \quad \text{для деякого } t > 0\}, \text{ або} \\ \Psi(u) &= \mathbf{P}\{\zeta(t) > u \quad \text{для деякого } t > 0\} \end{aligned} \tag{3}$$

Введемо позначення для функціоналів $\xi(t) = R_0(t)$ та $\zeta(t)$:

- $\xi^{\pm}(t) = \sup\limits_{0 \le t' \le t} (\inf) \xi(t')$,
- $\xi^{\pm} = \sup\limits_{0 \le t < \infty} (\inf) \xi(t)$,
- $\tau_u^- = \inf\{t > 0 : \quad \xi(t) < -u\}$,

- $\zeta^{\pm}(t) = \sup\limits_{0\le t'\le t} (\inf)\zeta(t')$,
- $\zeta^{\pm} = \sup\limits_{0\le t<\infty} (\inf)\zeta(t)$,
- $\tau^{+}(u) = \inf\{t > 0 : \quad \zeta(t) > u\}$;

$\tau_u^- \doteq \tau^+(u)$ визначають момент 1-го банкрутства.

Імовірність банкрутства $\Psi(u)$ та ймовірність виживання $\phi(u) = 1 - \Psi(u)$ визначаються також через ф.р. абсолютних екстремумів ξ^-, ζ^+.

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\xi^- < -u\} = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\},\ u > 0 \tag{4}$$

Імовірність банкрутства на скінченному інтервалі [0, t] визначається через ф.р. $\xi^-(t)$, $\zeta^+(t)$:

$$\Psi(t,u) = \mathbf{P}\{\xi^-(t) < -u\} = \mathbf{P}\{\tau_u^- < t\} = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) > u\} = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < t\}. \tag{5}$$

Якщо позначити θ_s - показниково розподілену випадкову величину з параметром $s > 0$, тоді перетворення Лапласа-Карсона $\Psi(t,u)$ виражається так

$$s\int\limits_0^\infty e^{-st}\Psi(t,u)dt = \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u\} = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < -u)\}.$$

Знайти явний вигляд $\Psi(u)$ (як і $\Psi(t,u)$ не так просто (хіба що у випадку, коли вимоги Y_k показниково розподілені). У загальному випадку виникає потреба у знаходженні практичних оцінок для $\Psi(u)$, зокрема при $u \to \infty$. Одною з перших оцінок для $\Psi(u)$ була одностороння оцінка (так звана нерівність Крамера-Лундберга (див. [1]- [4])

$$\Psi(u) \le e^{-Ru}, \quad u > 0, \qquad R \text{ – показник Крамера–Лундберга} \tag{6}$$

R визначається як мінімальний додатний корінь рівняння Лундберга

$$k(r) = 0,\ k(r) = ln\mathbf{E}e^{r\zeta(1)} = -rC + \lambda(r\widetilde{F}(r) - 1),\ \widetilde{F}(r) = \int\limits_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)dx. \tag{7}$$

Пізніше при відповідних умовах на $\zeta(t)$ одержані односторонні узагальнення (6)

$$\Psi(u) \le ce^{-Ru},\ 0 < c < 1,\ u > 0, \tag{8}$$

та двосторонні нерівності (див теорему 6.3 в [1], або теорему 5.6 в [5])

$$c_- e^{-Ru} \le \Psi(u) \le c_+ e^{-Ru}, \tag{9}$$

$$c_{\mp} = \inf_{x\ge0}(\sup)\frac{\overline{F}(x)}{\int\limits_0^\infty e^{R(y-x)}dF(x)}, \quad 0 < c_- < c_+ < 1.$$

Показник Крамера–Лундберга R також нелегко знайти, оскільки рівняння (7) (яке може бути і трансцендентним, див. далі приклад 1) не завжди піддається розв'язанню. Тому використовуються різні способи обчислення наближень R, сталих c, $c_{\pm}$ в термінах

$$m_k = \mathbf{E}\zeta(1)^k, (k \le 3), \text{ або } \mu_k = \mathbf{E}y_1^k, \text{ та } \rho = \delta = \frac{|\mathbf{E}\zeta(1)|}{\lambda\mu_1} > 0.$$

Співвідношення для $\Psi(u)$ наводяться в додатку IV в [5], його наближення при $u \to \infty$ в додатку V в [5] в основному для класичного випадку

а) $C(t) = Ct, C > 0$ $\zeta(t) = S(t) - Ct$ – класичний процес ризику (див.(1)).

Ми розглянемо випадок випадкових премій

б)$C(t) \neq Ct$,

$$\zeta(t) = S(t) - C(t), S(t) = \sum_{k \le N_1(t)} Y_k,\ C(t) = \sum_{k \le N_2(t)} X_k, \tag{10}$$

$$K(r) = \lambda_1 r \widetilde{F}(r) - \lambda_2 r (r+b)^{-1}.$$

де $N_{1,2}(t) - P_{ois}(\lambda_{1,2})$ – незалежні пуассонівські процеси з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0, (\lambda = \lambda_1 + \lambda_2)$ премії $X_k > 0$- показниково розподілені з параметром $b > 0$, $(X_k = \exp(b))$. Зауважимо, що коефіцієнт страхової надбавки для випадку б) відрізняється від (2) і має вигляд

$$\rho = \frac{|m|}{\mathbf{E}S(1)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 b \mu_1}{\lambda_1 b \mu_1} = \frac{q - pb\mu_1}{pb\mu_1} > 0,\ p = \frac{\lambda_1}{\lambda},\ q = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{11}$$

Завдання полягає в тому, щоб одержати аналоги деяких наближень імовірності банкрутства, раніше одержаних в [1–3] для випадку а), і для процесів (10) з випадковими преміями (випадок б)).

Почнем з наближень $\Psi_0(u)$ при $C = 1$ і $\Psi_1(u) = \Psi_R(u)$ при $\forall C > 0$ – наближення Реньї (див. таблицю V в Додатках [5]). Для цього замінимо процес $\zeta(t)$ в (10) "наближеним" процесом із задачі (20.2) в [6] або [7] зі складовою $C(t) = \sum\limits_{k \le N_2(t)} X_k,\ X_k = \exp(b)$ – показниково розподілені з $b > 0, \mathbf{E}C(1) = \lambda_2 b^{-1}$ (по суті $S(t)$ заміняється на $S_0(t)$),

$$\zeta_0(t) = S_0(t) - C(t), S_0(t) = \sum_{k \le N_0(t)} Y_k^0, N_0(t) = P_{ois}(\lambda_0), Y_k^0 = \exp(a), a > 0. \tag{12}$$

Припускаємо, що $\mathbf{E}S_0(1)^k = \mathbf{E}S(1)^k$ $(k = 1, 2)$, $m = \mathbf{E}\zeta(1) = \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 b^{-1} < 0$. Тоді мають місце співвідношення

$$\begin{cases} \lambda_1\mu_1 = \lambda_0 a^{-1} \\ \lambda_1\mu_2 = 2\lambda_0 a^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = a\lambda_1\mu_1 \\ \lambda_1\mu_2 = 2\lambda_1\mu_1 a^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\mu_1}{\mu_2}, \\ \lambda_0 = \frac{2\lambda_1\mu_1^2}{\mu_2}, \end{cases} \quad \lambda_0 + \lambda_2 = \frac{2\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2}{\mu_2},$$

що встановлюють зв'язок між параметрами $\zeta(t)$ та $\zeta_0(t)$.

Рівняння Лундберга для $\zeta_0(t)$ при $\mathbf{E}\zeta_0(1) < 0$ зводиться до лінійного і визначає корінь $r = \rho_+^0 > 0$:

$$\frac{\lambda_0}{a - r} = \frac{\lambda_2}{b + r} \Rightarrow \rho_+^0 = \frac{ab|m|}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{2\mu_1|m|b}{\mu_2(\lambda_0 + \lambda_2)} = \frac{2\mu_1|m|b}{2\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2}, \tag{13}$$

$$p_+^0 = \frac{\rho_+^0}{a} = \frac{b|m|}{\lambda_0 + \lambda_2},\ q_+^0 = 1 - \frac{b|m|}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{b + b\lambda_1\mu_1}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1\mu_1(2\mu_1 + \mu_2 b)}{2\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2}.$$

Отже згідно з (3.105) в [5] ρ_+^0 визначає розподіл $\zeta_0^+ = \sup\limits_{0 \le t < \infty} \zeta_0(t)$ і має місце

Пропозиція 1. *Якщо за "наближення" $\zeta(t)$ в (10) вибрати процес $\zeta_0(t)$ в (12), то корінь $r = \rho^0_+$ рівняння Лундберга для $\zeta_0(t)$ визначає розподіл ζ^+_0 (а отже і відповідне наближення $\Psi_0(u)$)*

$$\Psi(u) \sim \Psi_0(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+_0 > u\} = q^0_+ e^{-\rho^0_+ u},\ \rho^0_+ = ap^0_+,\ u > 0. \tag{14}$$

Значення q^0_+ та ρ^0_+ згідно з (13) виражаються в термінах моментів $\zeta(t)$ 1-го й 2-ого порядків. Після заміни в (14) q^0_+ на $q_+ = \Psi(0)$ (див. табл. II в [5]) одержується наближення

$$\Psi(u) \sim \Psi^0_R(u) = q_+ e^{-\frac{2\mu_1|m|bu}{2\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2}}, u \to \infty, q_+ = p(1+b\mu_1) = \frac{1+p\rho}{1+\rho}. \tag{15}$$

Отже, одержане наближення (14) для $\zeta(t)$ є аналогом наближення $\Psi_0(u)$ (з $C = 1$), а (15) – аналогом наближення $\Psi_R(u)$ ($\forall C > 0$) у таблиці V [5].

Щоб одержати аналог наближення Де Вільдера (див. $\Psi_3(u)$ в таблиці V [5]) за "наближення" до $\zeta(t)$ в (10) виберем процес $\zeta_0(t) = S_0(t) - C_0 t (C_0 > 0, S_0(t).(12))$ так, щоб $\mathbf{E}\zeta_0(1)^k = \mathbf{E}\zeta(1)^k$ ($k = \overline{1,3}, m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$). Тоді похідні кумулянт $k(r) = \mathbf{E}e^{r\zeta(1)}$ і $k_0(r) = \mathbf{E}e^{r\zeta_0(1)}$ задовольняють умову: $k^{(i)}(0) = k_0^{(i)}(0)(i = \overline{1,3})$, з якої випливає система рівнянь для визначення невідомих параметрів (λ_0, C_0, a)

$$\begin{cases} \lambda^0_1 a^{-1} - C_0 = m\ (m = k'(0) = \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 b^{-1}) \\ 2\lambda^0_1 a^{-2} = k_2\ (k_2 = \lambda_1\mu_2 + 2\lambda_2 b^{-2}) \\ 6\lambda^0_1 a^{-3} = \lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3} = k_3. \end{cases}$$

Для розв'язання системи визначимо з 1-го рівняння $C_0 = |m| + \lambda^0_1 a^{-1}$ і позначимо $x = \lambda^0_1 a^{-2}$. З двох останніх рівнянь визначаються невідомі x та $a : x = \frac{1}{2}k_2$, $a = 6x(\lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})^{-1}$. Звідси визначаються всі невідомі параметри

$$a = \frac{3k_2}{2(\lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})}, \lambda^0_1 = \frac{k_2^3}{2(\lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})}, C_0 = |m| + \frac{3k_2^2}{2(\lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})}. \tag{16}$$

Єдиний додатний корінь рівняння Лундберга ($k_0(r) = 0$), що зводиться до лінійного: $C_0(r - a) + \lambda^0_1 = 0 \Rightarrow \rho^0_+ = a - \lambda^0_1 C_0^{-1}$ визначає розподіл ζ^+_0 (див. (3.105) в [5]), а отже і відповідне наближення для $\Psi(u)$. Таким чином справедлива

Пропозиція 2. *У випадку б) для процесу $\zeta(t)$ в (10) імовірність банкрутства $\Psi(u)$ визначається аналогом наближення Де Вільдера*

$$\Psi(u) \sim \Psi_2(u) = \Psi^0_{DV}(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+_0 > u\} = q^0_+ e^{-\rho^0_+ u}, u > 0 \tag{17}$$

$$\rho^0_+ = a - \lambda^0_1 C_0^{-1}, q^0_+ = \lambda^0_1 (aC_0)^{-1}\ (\textit{див. табл. II в [5], у випадку а) } q_+ = \frac{\lambda\mu}{C}),$$

де значення параметрів a, λ_0, C_0 згідно з (16) визначається через перші три моменти процесу $\zeta(t)$ ($\mu_k = \mathbf{E}Y_1^k, \mathbf{E}X_1^k = k!b^{-k}, k = \overline{1,3}$). Кінцеві значення q^0_+, ρ^0_+ див. далі в табл. V в [5] 2.б).

Для виведення аналога наближення Беекмана–Боверса $\Psi_3(u) = \Psi_{BB}(u)$ (див. табл. V в [5]) розглянемо при $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$ умовну імовірність банкрутства

$$H(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u|\zeta^+ > 0\} = \frac{\Psi(u)}{q_+}\ (0 < q_+ = \Psi(0)). \tag{18}$$

Оскільки $H(0) = 1, H(\infty) = 0$, то $H(u)$ можна замінити хвостом гамма-розподілу $G(x) = G_{\alpha,\beta}(x)$, перші два моменти якого

$$\mu_* = \int\limits_{x\geq 0} xdG(x) = \frac{\alpha}{\beta},\ \sigma_*^2 = \int\limits_{x\geq 0} (x-\mu_*)^2 dG(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

збігаються з відповідними моментами ζ^+. Для обчислення цих моментів використаємо формулу Полячека–Хінчина для випадку б) (див. далі 1 б) у таблиці IV в [5])

$$\varphi_+(z) = \mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}_0(z)},\ p_+ = \mathbf{P}\{\zeta^+ = 0\} = 1 - q_+; \tag{19}$$

$$\widetilde{\varphi}_0(z) = \frac{1}{q_+}\int\limits_0^\infty e^{-xz} dF_*(x),\ \overline{F}_*(0) = \int\limits_0^\infty dF_*(x) = q_+,\ \widetilde{\varphi}_0(0) = 1,$$

$$dF_*(x) = dF(x) + b\overline{F}(x)dx,\ \overline{F}(x) = p\mathbf{P}\{Y_1 > x\}, x > 0.$$

З (19) випливає, що шукані моменти ζ^+ виражаються через

$$|\widetilde{\varphi}_0'(0)| = \frac{p}{q_+}(\mu_1 + \frac{b\mu_2}{2}),\ \widetilde{\varphi}_0''(0) = \frac{p}{q_+}(\mu_2 + \frac{b\mu_3}{3}),\ p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

а саме

$$m_+ := \mathbf{E}\zeta^+ = \frac{q_+}{p_+}|\widetilde{\varphi}_0'(0)|,\ m_+^2 = (\frac{q_+}{p_+}\widetilde{\varphi}_0'(0))^2,$$

$$\mathbf{E}(\zeta^+)^2 = 2\frac{q_+^2}{p_+^3}\widetilde{\varphi}_0'(0)^2 + \frac{q_+}{p_+}\widetilde{\varphi}_0''(0) = \frac{2m_+^2}{p_+q_+} + \frac{q_+}{p_+}\widetilde{\varphi}_0''(0), \tag{20}$$

$$D\zeta^+ = m_+^2\frac{2 - p_+q_+}{p_+q_+} + \frac{p}{p_+}(\mu_2 + \frac{b\mu_3}{3}),\ q_+ = p(1 + b\mu_1).$$

З умови рівності моментів ζ^+ та ф.р. $G(x)$:

$$\frac{\alpha}{\beta} = m_+,\ \frac{\alpha}{\beta^2} = D\zeta^+ \Rightarrow \beta = \frac{m_+}{D\zeta^+},\ \alpha = m_+\beta = \frac{m_+^2}{D\zeta^+}. \tag{21}$$

Згідно з (20) $m_+, D\zeta^+$ виражаються через перші три моменти вимог: $\mathbf{E}Y_1^k = \mu_k$ і премій $\mathbf{E}X_1^k = k!b^{-k}$ $(k = \overline{1,3})$.

Залежність α і β від страхової надбавки (11)

$$\rho = \frac{q - pb\mu_1}{pb\mu_1} = \frac{p_+}{q - p_+} = \frac{p_+}{q_+ - p}$$

у випадку б) складніша ніж у випадку а).

Отже, в термінах α і β – виражених через перші моменти вимог і премій має місце

Пропозиція 3. *Для процесу $\zeta(t)$ з (10) при $m_k = \mathbf{E}\zeta(1)^k < \infty$, $(k = \overline{1,3})$, $m_1 < 0$ має місце аналог наближення Беекмана–Боверса*

$$\Psi(u) \sim \Psi_3(u) = \Psi^0_{BB}(u) = p(1+b\mu_1)\int_{\beta u}^{\infty}\Gamma(\alpha)^{-1}y^{\alpha-1}e^{-y}dy, \tag{22}$$

параметри якого α, β визначаються в (21).

Ф.р. $F(x)$, хвости яких мають уповільнене спадання порівняно з показниковим при $x \to \infty$ називають розподілами з важкими хвостами. Зокрема, таке спадання мають хвости розподілів:

Вейбула–Гнєденко: $\overline{F}(x) = \exp\{-x^\beta\}$ $(0 < \beta < 1), x > 0$;

розподіл Парето: $\overline{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}$ $(\alpha > 0), x > 0$;

логнормальний розподіл: $\overline{F}(x) = \overline{\Phi}(\frac{\log x - m}{\sigma})(\sigma^2, m > 0), x > 0$.

Останнє наближення $\Psi_9(u)$ для "важких хвостів"можна одержати за допомогою перших двох формул (1)–(2) з Додатку IV в [5] у обох випадках а), б). Згідно з позначеннями в [1], [3] та асимптотичними співвідношеннями в [1,p.IX, c.254]

$$\overline{\overline{F}}(x) = \mu_1\overline{F}_I(x),\ \overline{F}_I(x)^{*n} \approx n\overline{F}_I(x),\ n \geq 2. \tag{23}$$

Клас розподілів з важкими хвостами називають підпоказниковим (subexponential)і позначають через S.

Теорема. *а) Якщо для процесу $\zeta(t)$ в (1) ф.р. $F(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\} \in S$, тоді при $m < 0$*

$$\Psi(u) \sim \Psi_9(u) = \rho^{-1}\overline{F}_I(u) = \frac{1}{\rho\mu_1}\overline{\overline{F}}(u), u \to \infty; \rho = \frac{C - \lambda\mu_1}{\mu_2}; \tag{24}$$

б) Якщо для $\zeta(t)$ в (10) премії $X_k = \exp(b)$ $(b > 0), F(x) \in S$, тоді при $m < 0$

$$\Psi(u) \sim \Psi^0_9(u) = \frac{1}{p_+}\overline{F}_*(u) = \frac{\lambda}{b|m|}\overline{F}_*(u), u \to \infty,\ p_+ = \frac{q\rho}{1+\rho}, \tag{25}$$

$$\overline{F}_*(x) = \overline{F}(x) + b\overline{\overline{F}}(x), x > 0,\ \overline{\overline{F}}(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy.$$

Доведення. Обмежимось доведенням для випадку б), оскільки для випадку а) його можна знайти в [1]- [2]. Зауважимо, що $\overline{F}_*(x)$ після "нормування" стає "хвостом" ф.р.

$$\overline{\Phi}_I(x) = q_+^{-1}\overline{F}_*(x),\ \overline{F}_*(0) = q_+ = \Psi(0). \tag{26}$$

Згідно з 2.б) в таблиці IV, що наводиться далі, має місце обернення формули Полячека–Хінчина для випадку б):

$$\Psi(u) = p_+\sum_{n>0}\overline{F}_*(u)^{*n},\ u > 0, q_+ = \frac{1+p\rho}{1+\rho} = p(1+b\mu_1),\ p = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{27}$$

Після підстановки (23) у (27) одержимо

$$\Psi(u) = p_+\sum_{n\geq 1} q_+^n\overline{\Phi}_I(u)^{*n}. \tag{28}$$

Враховуючи, що $\overline{\Phi}_I^{*n}(u) \approx n\overline{\Phi}_I(u)$ і формулу

$$\sum_{n\geq 1} nx^n = x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = x(\sum_{n\geq 0} x^n)' = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{29}$$

із (28) одержимо співвідношення

$$\Psi(u) \approx p_+\overline{\Phi}_I(u)\sum_{n>0} nq_+^n = \frac{q_+}{p_+}\overline{\Phi}_I(u) = \frac{1}{p_+}\overline{F}_*(u), u \to \infty. \tag{30}$$

Згідно з наслідком 20.4 в [6] або [7] $p_+ = b|m|\lambda^{-1}$, тоді з (30) випливає (25).

Зауважимо, що в таблиці V наближення $\Psi_8(u)$ в [5] справедливе для обох випадків а) і б) з відповідними значеннями $q_+ = \Psi(0)$: а) $q_+ = \frac{\lambda_1\mu}{C}$; б) $q_+ = p(1+\mu_1 b)$.

Отже, таблиці IV-V в [5] після доповнення новими результатами, одержаними для випадку б), мають такий вигляд.

IV. **Основні формули для** $\Psi(u) = 1-\phi(u) = \overline{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < \infty\}$

1. Узагальнення формули Полячека-Хінчина

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1-q_+\tilde{\varphi}_0(z)};\ \tilde{\varphi}_0(z) := \mathbf{E}[e^{-z\gamma^+(0)} \mid \zeta^+ > 0],$$

а) $\tilde{\varphi}_0(z) = \mu^{-1}\int\limits_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx;\ \overline{F}(x) = \int\limits_x^\infty dF(x);$

б) $\tilde{\varphi}_0(z) = q_+^{-1}\int\limits_0^\infty e^{-zx}dF_*(x), F_*(x) = F(x) + b\overline{F}(x), x \geq 0.$

2. Обернення формули Полляченка-Хінчина (див (5.16) та (6.60) в [5])

а)для напівнеперервного знизу процесу вимог $\zeta(t)$ $(q_+ = \lambda\mu C^{-1})$

$$\Psi(u) = p_+\sum_{n>0} q_+^n\mu^{-n}\overline{\overline{F}}(u)^{*n},\ \overline{\overline{F}}(u) = \int\limits_u^\infty \overline{F}(x)dx,\ u > 0;$$

б) для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$ $(p_+ = b|m|\lambda^{-1})$

$$\Psi(u) = p_+\sum_{n>0}\overline{F_*}(u)^{*n},\ \overline{F_*}(u) = \overline{F}(u) + b\overline{\overline{F}}(u),\ u > 0, \mathbf{E}X_k = b^{-1}.$$

3. Формула, що випливає з мартингальності $X(t) = \mathbf{E}e^{-R_+\zeta(t)}$ $(k(R_+) = 0)$.

$$\Psi(u) = e^{-R_+u}g_+(u,R_+), \quad g_+(u,z) = \mathbf{E}[e^{-z\gamma^+(u)},\ \zeta^+ > u];$$

а) для напівнеперервного знизу надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$

$$g_+(u,z) = \frac{\lambda}{C}\int\limits_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(u+x)dx + \frac{\lambda}{\mid m\mid}\int\limits_{+0}^u\int\limits_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(u-y+x)dxd\phi(y);$$

б) для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$

$$g_+(u,z) = \int\limits_0^\infty e^{-zx}F_*'(u+x)dx + \frac{\lambda}{b\mid m\mid}\int\limits_{+0}^u\int\limits_0^\infty e^{-yz}F_*'(u-y+x)dxd\phi(y);$$

$$F_*^{'}(x) = F^{'}(x) + b\overline{F}(x),\ \overline{F}(x) = p\overline{F_1}(x),\ F_1(x) = P\{Y_1 < x\},\ x > 0, p = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

.

4. Формула для $\Psi(u)$ в термінах "хвостів" 2-го порядку $\overline{\overline{F}}(x)$:
а)$\Psi(u) = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int\limits_0^u \overline{\overline{F}}(u-z)\phi^{'}(z)dz, \Psi(0) = q_+ = \frac{\lambda\mu_1}{C};$
б) $\Psi(u) = \overline{F_*}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int\limits_0^u \overline{F_*}(u-y)\phi'(y)dy,$
$\Psi(0) = q_+ = p(1 + b\mu_k^{'}), \mu_k^{'} = \mathbf{E}(Y_1)^k, k = 1, 2.$
5. Асимптотична формула (див. значення $\Psi(0)$ в (15), (16))

$$\Psi(u) = e^{-R_+ u}(\Psi(0) + o(1)) \quad (u \to \infty)$$

а) $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu_1}{c}$; б) $\Psi(0) = \overline{F_*}(0) = p(1 + b\mu_1^{'})$.
V. **Деякі наближення $\Psi_k(u) \sim \Psi(u)$ ($u \to \infty$) в термінах**
$\mu_n = \int\limits_0^\infty x^n dF(x),\ \ n = \overline{1,3},\ \ m = \mathbf{E}\zeta(1),\ $ (а) $\rho = \frac{C-\lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} = \frac{p_+}{q_+} > 0;$
б) $\rho = \frac{q-pb\mu_1}{pb\mu_1} = \frac{p_+}{q_+-p} > 0$).
1. Наближення Реньї $\Psi_1(u) = \Psi_R(u)$
а) $\Psi_R(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2(1+\rho)}} = q_+ e^{-\frac{2\mu_1|m|}{\mu_2 C}u},\ \ q_+ = \Psi(0) = \frac{\lambda\mu_1}{C}.$
б) $\Psi_R^0(u) = q_+ e^{-\frac{2\mu_1|m|bu}{2\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2}},\ q_+ = \Psi_R^0(0) = p(1 + b\mu_1),\ p = \frac{\lambda_1}{\lambda},\ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$
2. Наближення Крамера–Лундберга Ф. $\Psi_2(u) = \Psi_{CL}(u)$ $(R_+ > 0)$

а) $\Psi_{CL}(u) = \frac{|m|}{k'(R_+)}e^{-R_+ u},\ \ R_+$ - корінь рівняння $k(R_+) = 0$ (k(r) див. (7)).
б) $\Psi_{CL}^0(u) = \frac{|m|}{2qk'(R_+)}e^{-R_+ u}$, (k(r) див. (10), $q = \frac{\lambda_2}{\lambda}$).
3. Наближення Де Вільдера $\Psi_3(u) = \Psi_{DV}(u)$
а) $\Psi_{DV}(u) = \frac{3\mu_2^2}{3\mu_2^2+2\mu_1\mu_3\rho}\exp\{-\frac{6\mu_1\mu_2\rho u}{3\mu_2^2+2\mu_1\mu_3\rho}\};\ \Psi_{DV}(0) < 1;$
б) $\Psi_{DV}^0(u) = q_+^0 e^{-\rho_+^0 u}; q_+^0 = \frac{2k_2^2 k_3}{3(2|m|k_3+3k_2^2)},\ k_2 = \lambda_1\mu_2 + 2\lambda_2 b^{-1},$
$\rho_+^0 = \frac{3k_2}{2k_3}\frac{2k_3(3|m|-k_2^2)+9k_2}{3(2k_3|m|+3k_2^2)}, k_3 = \lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3}.$
4. Наближення Беекмана-Боверса $\Psi_4(u) = \Psi_{BB}(u)$
а) $\Psi_{BB}(u) = \frac{1}{1+\rho}\int\limits_{\beta u}^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-x}dx,\ \ \alpha = \frac{1+\rho}{1+(c-1)\rho}\ \beta = \frac{2\mu_1\rho}{\mu_2+(c-\mu_2)\rho},\ c = \frac{4\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2};$
б) $\Psi_{BB}^0(u) = q_+\int\limits_{Bu}^\infty \Gamma(\alpha)^{-1}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ \ q_+ = p(1 + b\mu_1),$
$\alpha = \mathbf{E}(\zeta^+)^2(D\zeta^+),\ \beta = \mathbf{E}\zeta_+(D\zeta^+)^{-1}; (\mathbf{E}(\zeta^+)^{1,2}, D\zeta^+$ див.(20)–(21)).
5. Експоненційне наближення $\Psi_5(u) = \Psi_E(u)$

$$\Psi_E(u) = \exp\{-1 - \frac{2\rho\mu_1 u - \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \frac{4}{3}\rho\mu_1\mu_3}}\},\ \Psi_E(0) = \exp\{(1 + \frac{4\rho\mu_1}{3\mu_2\mu_3})^{-1/2} - 1\}.$$

6. Дифузійне наближення $\Psi_6(u) = \Psi_D(u)$
$\Psi_D(u) = e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2}}$ ($\Psi_D(0) = 1$ не дає нічого для $\Psi(0) = q_+$).
7. Наближення Ове Лундберга (сина Ф. Лундберга) $\Psi_7(u) = \Psi_{OL}(u)$
$\Psi_{OL}(u) = \Psi_D(u)[1 + (\rho u - \frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{4\rho\mu_1^2\mu_3}{3\mu_2^3}],\ \ \Psi_{OL}(0) = 1 - \frac{4\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2} < 1.$

8. Наближення подібне до $\Psi_{CL}(u)$
$\Psi_8(u) = \Psi_*(u) = \Psi(0)e^{-R_+ u}$,
а) $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu_1}{C}$,
б) $\Psi(0) = \overline{F_*}(0) = p(1+b\mu_1)$ (R_+ - корінь рівняння Лундберга $\mathcal{L}_0$: $k(R_+) = 0$)
9. Наближення для випадку "важких" хвостів $\overline{F}(x)$: $\Psi_9(u) = \Psi_{**}(u)$,
а) $\Psi_{**}(u) = (\rho\mu_1)^{-1}\overline{\overline{F}}(u) = \frac{1}{\rho}\overline{F}(u), \quad (\rho\mu_1)^{-1} = \lambda \mid m \mid^{-1}$,
б) $\Psi^0_{**}(u) = \frac{1}{p_+}\overline{F}_*(u) = \frac{\lambda}{b|m|}\overline{F}_*(u)$, $\overline{F}_*(u) = \overline{F}(u) + b\overline{F}(u)$, $p_+ = \frac{q\rho}{1+\rho}$ (ρ див. в (11)

Приклад 1. *Нехай $\zeta(t) = S(t) - t$ ($> 0,\ t \geq 0$) - класичний процес ризику, стрибки (вимоги) якого Y_k в $S(t) = \sum\limits_{k\leq N(t)} Y_k$ мають подвоєну гауссову щільність*

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\{Y_k < x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}; \Phi^0_I(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz, x > 0.$$

$N(t)$ -пуассонівський процес з інтенсивністю $\lambda > 0$, х.ф. стрибків Y_k

$$\varphi_0(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha Y_k} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{i\alpha x - \frac{x^2}{2}}dx.$$

Як х.ф. $\zeta(\theta_s)$ так і кумулянта $\psi(\alpha) = ln\mathbf{E}e^{i\alpha\zeta(\theta_s)}$ є трансцендентними функціями: $\psi(\alpha) = \lambda(\varphi_0(\alpha) - 1) - i\alpha C$, $\varphi(s,\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\zeta(\theta_s)} = \frac{s}{s-\psi(\alpha)}$. Дійсно після підстановки $i\alpha = r$, знаходимо:

$$\varphi_0(-ir) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{2rz-z^2}{2}}dz = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{r^2-(z-r)^2}{2}}dz = \lambda e^{\frac{r^2}{2}}(\Phi^0_I(r) + 1),$$

$$k(r) = \lambda e^{\frac{r^2}{2}}(\Phi^0_I(r) + 1) - \lambda - Cr. \qquad (31)$$

Коефіцієнт страхової надбавки (2) виражається через $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$, $\mu = \mathbf{E}Y_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, λ, C.

$$m = k'(0) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}} - C, \delta = \rho = \frac{|m|}{\lambda\mu} = \frac{C - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0. \qquad (32)$$

При $C = \lambda = 1$ $\delta = \rho = \frac{1-\mu}{\mu} > 0$ і виконання умови (32) забезпечує умову $\Psi(u) < 1$. Щоб знайти наближення ймовірності банкрутства слід розв'язати рівняння Лундберга (7), яке в даному прикладі зводиться до трансцендентного рівняння

$$e^{\frac{r^2}{2}}(\Phi^0_I(r) + 1) = 1 + r. \qquad (33)$$

Додатний розв'язок (33) визначає показник Лундберга $R_+ = \rho_+ > 0$. Наближення для $R_+ = \rho_+ \approx 0,4$ знаходиться графічним способом. Згідно з (20.34) в [6] при $= \lambda = 1$, $p_+ = |m|$, $q_+ = \mu = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Отже

$$\Psi(u) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,4u}, \quad u \to \infty. \qquad (34)$$

Не зменшуючи загальності, знову вважаємо $\lambda = 1$. Тоді згідно з (20.34) в [6] $\delta = \rho = \frac{C-\mu}{\mu} = \frac{p_+}{q_+} = \frac{|m|}{\mu}$. В умовах "чесної гри" ($p_+ = q_+ = \frac{1}{2}$) $= 2\mu = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$, рівняння (7) зводиться до трансцендентного рівняння (з відповідним наближеним розв'язком)

$$e^{\frac{r^2}{2}}(\Phi_I^0(r)+1) = 1 + \frac{4r}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow r = \rho_+ \approx 0,89. \tag{35}$$

Отже, в умовах "чесної гри" : $q_+ = \Psi(0) = \frac{1}{2}$, $R_+ = \rho_+ \approx 0,89$,

$$\Psi(u) \approx \frac{1}{2}e^{-0{,}89u}, \quad u \to \infty. \tag{36}$$

За допомогою обернень формули Поллячека–Хінчина (див.п. 2.а), б) в табл.IV) встановлюються наступні наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $\zeta(t) = S(t) - Ct (C > 0, t \geq 0)$ – класичний процес ризику з показниково розподіленими вимогами*

$$F(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\} = 1 - e^{-ax}, x \geq 0, a > 0, \mu = a^{-1}. \tag{37}$$

Тоді (не вдаючись до розв'язання рівняння Лундберга (7)) за оберненою формулою Полячека–Хінчина (див. п. 2а) в табл.IV)

$$\Psi(u) = p_+ \sum q_+^n \mu^{-n} \overline{F}(u)^{*n} \tag{38}$$

встановлюється співвідношення

$$\Psi(u) = q_+ e^{-ap_+u}, \ q_+ = \lambda\mu C^{-1}, \ p_+ = \frac{|m|}{C} = \frac{aC-\lambda}{aC}. \tag{39}$$

Доведення. Формула Полячека–Хінчина визначає генератрису ζ^+ через умовну генератрису $\gamma^+(0)$ – першого перестрибку через 0,

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+\widetilde{\varphi}_0(z)}, \ \widetilde{\varphi}_0(z) = \mathbf{E}[e^{-z\gamma^+(0)}|\zeta^+ > 0], \tag{40}$$

у випадку а)

$$\varphi_0(z) = \mu^{-1}\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx, \ \overline{F}(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy, \ \overline{F}(x) = \mu_1 \overline{F}_I(x).$$

При умові (37)

$$\overline{F}(x) = e^{-ax}, \ \overline{\overline{F}}(x) = a^{-1}e^{-ax}, \ (\mu_1 = a^{-1}) \tag{41}$$

$$\overline{\overline{F}}(x)^{*n} = (\mu\overline{F}(x))^* = \mu^n\overline{F}(x)^{*n} = \mu^n e^{-ax}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(ax)^r}{r!}$$

Після підстановки (41) в (38) одержується співвідношення

$$\Psi(u) = p_+\sum_{n=1}^\infty q_+^n \overline{F}(u)^{*n} = p_+ e^{-au}\sum_{n=1}^\infty q_+^n \sum_{r=0}^{n-1}\frac{(au)^r}{r!} =$$

$$= q_+ e^{-au} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(aq_+u)^r}{r!} = q_+ e^{-au+aq_+u},$$

з якого випливає (39). Оскільки $\zeta(t)$ не тільки неперервний знизу, а й майже напівнеперервний зверху, то згідно з (3.105) в [5] $ap_+ = \rho_+$ і (39) узгоджується з (20.14) в [6], встановленим з використанням рівняння (7).

Наслідок 2. *Нехай $\zeta(t) = S(t) - C(t)$ (див.(10)) майже напівнеперервний (і зверху і знизу) процес ризику з показниково розподіленими вимогами Y_k – $\exp(a)$ і преміями $X_k - \exp(b)$ і відповідною кумулянтою*

$$k(r) = \psi(-i\alpha) = \frac{\lambda_1 r}{a-r} + \frac{\lambda_2 r}{b+r},\ \lambda_1, \lambda_2 > 0, p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$m = k'(0) = \lambda_1 a^{-1} - \lambda_2 b^{-1} < 0\ (\mu = a^{-1}).$$

Тоді на підставі формули обернення (27) встановлюються співвідношення

$$\Psi(u) = q_+ e^{-ap_+u},\ u > 0, q_+ = p(1+b\mu). \tag{42}$$

Доведення. В силу виконання умови (37) для $F_1(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\}$ знаходимо, що

$$\overline{F}_*(x) = p(\overline{F}_1(x) + b\overline{\overline{F}}(x)) = q_+ e^{-ax}, q_+ = p(1+ba^{-1}),$$

$$\overline{F}_*(x)^{*n} = q^n + F_1(x)^{*n} = q_+^n e^{-ax} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(ax)^r}{r!}. \tag{43}$$

Підставляючи (43) в (27) знаходимо

$$\Psi(u) = p_+ e^{-ax} \sum_{n\ge 1} q_+^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(au)^r}{r!} = p_+ e^{-au} \sum\nolimits_*; \tag{44}$$

$$\sum\nolimits_* = \sum_{r\ge 0} \frac{(au)^r}{r!} \sum_{n\ge r+1} q_+^n = \frac{q_+}{1-q_+} \sum_{r\ge 0} \frac{(auq_+)^r}{r!} = \frac{q_+}{p_+} e^{-aq_+u}.$$

Після підстановки $\sum_*$ в (44) одержимо (42). Як і в попередньому прикладі $a - aq_+ = ap_+ = \rho_+$, а (42) узгоджується з формулою (3.105) в [5], одержаною з використанням рівняння (7).

Для ілюстрації наближень (14) і (15) розглянемо процес із задач у [6], [7].

Приклад 2. *Нехай $\zeta(t)$ процес із задач 20.9–20.10 в [6] (або в [7], 17.9-17.10).*

$$\zeta(t) = S(t) - C(t),\ S(t) = \sum_{k\le N_1(t)} Y_k,\ \mathbf{E}e^{i\alpha Y_k} = \frac{1}{(1-i\alpha)^2}, \tag{45}$$

$C(t) = \sum\limits_{k\le N_2(t)} X_k,\ X_k = \exp(b)$, *інтенсивності* $N_{1,2}(t)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Щоб знайти $\Psi_R^0(u)$, за наближення для $S(t)$ виберем $S_0(t)$ в (12)

$$S_0(t) = \sum_{k\le N_0(t)} Y_k^0,\ Y_k^0 = \exp(a),\ k_0(r) = lnEe^{r\zeta_0(1)} = r(\frac{\lambda_0}{a-r} - \frac{1}{b+r}).$$

Із співвідношень (12)–(13) при $b = \frac{1}{14}$ *легко знайти значення параметрів:*

$$a = \lambda_0 = 1, \ \rho_+^0 = p_+^0 = \frac{3}{7}, \ q_+^0 = q_+ = \Psi(0) = \frac{4}{7}.$$

Тому наближення (14) і (15) збігаються

$$\Psi(u) \sim \Psi_0(u) = \Psi_R^0(u) = \frac{4}{7}e^{-\frac{3}{7}u}, u \to \infty. \tag{46}$$

Точне співвідношення $\Psi(u)$*, одержане при розв'язанні задачі 20.10 в [6], ((17.10) в [7]) має вигляд*

$$\Psi(u) = \frac{27}{41}e^{-\frac{1}{4}u} - \frac{25}{287}e^{-\frac{12}{7}u} \underset{u \to 0}{\to} \Psi(0) = \frac{4}{7}. \tag{47}$$

При порівнянні ρ_+^0 *з додатними коренями* $r_{1,2} > 0$ *рівняння Лундберга для* $\zeta(t)$ $(k(r) = \ln \mathbf{E}e^{r\zeta(1)} = 0)$ *виясняється, що*

$$r_1 = R = \frac{1}{4} < \rho_+^0 = \frac{3}{7} < r_2 = \frac{25}{7}(0,25 < \rho_+^0 \approx 0,4 < 1,7),$$

тобто, що корінь рівняння $(k_0(r) = 0)$ ρ_+^0 *значно ближче до показника Крамера–Лундберга* $R = 0,25$ *– меншого кореня рівняння* $k(r) = 0$*. Значення* $q_+ = q_+^0 = \frac{4}{7} \approx 0,6$ *близьке до коефіцієнта* $\frac{27}{41} \approx 0,66$ *при домінуючій експоненті* e^{-Ru} *в (47) і при* $u \to \infty$

$$\Psi(u) = \frac{27}{41}e^{-0,25u} + o(e^{-Ru}). \tag{48}$$

Співвідношення (46) можна вважати задовільною практичною оцінкою для $\Psi(u)$ в (47).

1. *Asmussen S.* Ruin probability. World science.Singapore, 2000. -– 385 p.
2. *Grandell J.* Aspects of risk theory.-New-Jork: Springer-Verlag. – 1993, 175 p.
3. *Grandell J.* Simple approximations of ruin probabilities.-Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and problems of Saferty. Insurance and Ruin. -Riga Aviation Univ.,1999. – 47-51.
4. *Гусак Д.В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику.-Київ: Праці Інституту математики НАНУ, т.65: 2007,-460с.
5. *Гусак Д.В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику.-Київ: Праці Інституту математики НАНУ, т.88: 2011,-544с.
6. *Гусак Д.В., та інші.* Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань.-Київ: ВПЦ "Київський ун-т" -2008.-398с.
7. *Gusak D.V. et.al.* Theory of stochastic processes with applications. – New-York, Dordrecht, London: Springer 2010. – 376 p.

Одержано 17.04.2012