УДК 519.21

І. І. Дубовецька, М. П. Моклячук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

МІНІМАКСНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

The problem of mean square optimal estimation of the functional $A_N\zeta = \int\limits_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$ depending on the unknown values of periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$ from observations of the process $\zeta(t)+\theta(t)$ for $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, where $\theta(t)$ is uncorrelated with $\zeta(t)$ periodically correlated process, is considered. Formulas for calculating spectral characteristic and mean square error of optimal linear estimation of the functional are proposed. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed for the given sets of admissible spectral densities.

Досліджується задача оптимального в середньоквадратичному сенсі лінійного оцінювання функціонала $A_N\zeta = \int\limits_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$ від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, де $\theta(t)$ - некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. Виведені формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала для різних класів спектральних щільностей.

Вступ. Методи дослідження задач оцінювання невідомих значень стаціонарних процесів (задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації) розроблені у роботах А. М. Колмогорова [1], Н. Вінера [2], А. М. Яглома [3, 4], Ю. А. Розанова [5]. Ці методи базуються на припущенні, що точні значення спектральних щільностей процесів відомі. У тому випадку, коли повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренандер [6] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. М. П. Моклячук [7], М. П. Моклячук та О. Ю. Масютка [8] досліджували задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації для стаціонарних процесів і послідовностей.

Дослідження періодично корельованих процесів розпочато у статті Є. Г. Гладишева [9], де проведено аналіз властивостей кореляційної функції та зображень періодично корельованих процесів. Зв'язок між періодично корельованими та нескінченновимірними стаціонарними процесами досліджував А. Макагон [10], [11].

У даній статті досліджується задача середньоквадратичного оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\zeta = \int_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$ від невідомих значень стохастичного процесу $\zeta(t)$ з класу $\mathbf{Y}$ середньоквадратично неперервних періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, за результатами спостережень процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, де $\theta(t)$ - некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. Знайдені формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала

$A_N\zeta$ у тому випадку, коли спектральні щільності породжених стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ відомі. Якщо ж повна інформація про значення спектральних щільностей відсутня, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний підхід до розв'язування задач оцінювання. Для заданих класів допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$.

1. Періодично корельовані процеси та відповідні векторні стаціонарні послідовності.

Означення 1. *[9] Середньоквадратично неперервний стохастичний процес $\zeta:\mathbb{R}\to H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathsf{E}\zeta(t)=0$, називається періодично корельованим з періодом T, якщо його кореляційна функція $K(t+u,u)=\mathsf{E}\zeta(t+u)\overline{\zeta(u)}$ для всіх $t,u\in\mathbb{R}$ та деякого фіксованого T задовольняє умову*

$$K(t+u,u)=\mathsf{E}\zeta(t+u)\overline{\zeta(u)}=\mathsf{E}\zeta(t+u+T)\overline{\zeta(u+T)}=K(t+u+T,u+T).$$

Нехай $\zeta(t)$, $\theta(t), t\in\mathbb{R}$, - некорельовані між собою періодично корельовані стохастичні процеси. Побудуємо дві послідовності стохастичних функцій

$$\{\zeta_j(u)=\zeta(u+jT), u\in[0,T), j\in\mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

$$\{\theta_j(u)=\theta(u+jT), u\in[0,T), j\in\mathbb{Z}\}. \tag{2}$$

Кожна з послідовностей (1), (2) утворює $L_2([0,T);H)$-значну стаціонарну послідовність $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, відповідно, із кореляційними функціями

$$B_\zeta(l,j)=\langle\zeta_l,\zeta_j\rangle_H=\int_0^T \mathsf{E}[\zeta(u+lT)\overline{\zeta(u+jT)}]du=\int_0^T K_\zeta(u+(l-j)T,u)du=B_\zeta(l-j),$$

$$B_\theta(l,j)=\langle\theta_l,\theta_j\rangle_H=\int_0^T \mathsf{E}[\theta(u+lT)\overline{\theta(u+jT)}]du=\int_0^T K_\theta(u+(l-j)T,u)du=B_\theta(l-j),$$

де $K_\zeta(t,s)=\mathsf{E}\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$, $K_\theta(t,s)=\mathsf{E}\theta(t)\overline{\theta(s)}$ - кореляційні функції періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, та $\theta(t)$.

Якщо у $L_2([0,T);\mathbb{R})$ визначити ортонормований базис

$$\{\widetilde{e}_k=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}u/T}, k=1,2,3,\dots\},\quad \langle\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_k\rangle=\delta_{kj},$$

то стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ можна подати у вигляді

$$\zeta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_{kj}\widetilde{e}_k,\quad \zeta_{kj}=\langle\zeta_j,\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\zeta_j(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T}dv, \tag{3}$$

$$\theta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_{kj}\widetilde{e}_k,\quad \theta_{kj}=\langle\theta_j,\widetilde{e}_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T\theta_j(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T}dv. \tag{4}$$

Компоненти ζ_{kj} та θ_{kj} стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ задовольняють умови [12]:

$$\mathsf{E}\zeta_{kj} = 0, \quad \|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\zeta_{kj}|^2 \leq P_1, \quad \mathsf{E}\zeta_{kl}\overline{\zeta_{nj}} = \langle R_\zeta(l-j)e_k, e_n\rangle,$$

$$\mathsf{E}\theta_{kj} = 0, \quad \|\theta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\theta_{kj}|^2 \leq P_2, \quad \mathsf{E}\theta_{kl}\overline{\theta_{nj}} = \langle R_\theta(l-j)e_k, e_n\rangle,$$

де $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ - базис у просторі ℓ_2. Кореляційні функції $R_\zeta(j)$ та $R_\theta(j)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ є операторними функціями в ℓ_2. Кореляційні оператори $R_\zeta(0) = R_\zeta$, $R_\theta(0) = R_\theta$ - ядерні і їх ядерні норми задовольняють обмеження

$$\|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta e_k, e_k\rangle \leq P_1, \quad \|\theta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\theta e_k, e_k\rangle \leq P_2.$$

Стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ мають спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ - додатні операторнозначні функції в ℓ_2 змінної $\lambda \in [-\pi, \pi)$, якщо їх кореляційні функції $R_\zeta(j)$ та $R_\theta(j)$ можна записати у вигляді

$$\langle R_\zeta(j)e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle f(\lambda)e_k, e_n\rangle d\lambda,$$

$$\langle R_\theta(j)e_k, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle g(\lambda)e_k, e_n\rangle d\lambda, \quad k, n = 1, 2, \dots.$$

Для майже всіх $\lambda \in [-\pi, \pi)$ спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ є ядерними операторами з інтегровними ядерними нормами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(\lambda)e_k, e_k\rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta e_k, e_k\rangle = \|\zeta_j\|_H^2 \leq P_1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle g(\lambda)e_k, e_k\rangle d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\theta e_k, e_k\rangle = \|\theta_j\|_H^2 \leq P_2.$$

2. Класичний метод лінійної інтерполяції періодично корельованих процесів. Вивчатимемо задачу середньоквадратичного оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\zeta = \int_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt$$

від невідомих значень стохастичного процесу $\zeta(t)$ з класу $\mathbf{Y}$ середньоквадратично неперервних періодично корельованих процесів $\zeta(t)$, за результатами спостережень процесу $\zeta(t) + \theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$. Процес $\theta(t)$ - некорельований із $\zeta(t)$ періодично корельований процес. Функція $a(t), t \in \mathbb{R}$, задовольняє умову $\int_0^{(N+1)T} |a(t)|dt < \infty$.

Запишемо функціонал $A_N\zeta$ у такому вигляді

$$A_N\zeta = \int\limits_0^{(N+1)T} a(t)\zeta(t)dt = \sum_{j=0}^{N}\int\limits_0^{T} a_j(u)\zeta_j(u)du,$$

$$a(u+jT) = a_j(u),\ \zeta(u+jT) = \zeta_j(u),\ u \in [0,T).$$

Враховуючи розклад (3) стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, функціонал $A_N\zeta$ можна подати наступним чином

$$A_N\zeta = \sum_{j=0}^{N}\int\limits_0^{T} a_j(u)\zeta_j(u)du = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}\zeta_{kj} = \sum_{j=0}^{N} \vec{a}_j^{\top}\vec{\zeta}_j,$$

де

$$\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1,2,\dots),$$

$$\vec{a}_j = (a_{kj}, k = 1,2,\dots) = (a_{1j}, a_{3j}, a_{2j}, \dots, a_{2k+1,j}, a_{2k,j}, \dots)^{\top},$$

$$a_{kj} = \langle a_j, \widetilde{e}_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_0^{T} a_j(v)e^{-2\pi i\{(-1)^k\left[\frac{k}{2}\right]\}v/T}dv.$$

Будемо вважати, що послідовність векторів $\{\vec{a}_j, j = 0,1,\dots,N\}$ задовольняє умову

$$\|\vec{a}_j\| < \infty, \quad \|\vec{a}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{kj}|^2, \quad j = 0,1,\dots,N. \tag{5}$$

За умови (5) функціонал $A_N\zeta$ має скінченний другий момент.

Нехай спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, відповідно, задовольняють умову мінімальності

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} Tr\left[(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]d\lambda < \infty. \tag{6}$$

Умова (6) є необхідною та достатньою для неможливості безпомилкової інтерполяції невідомих значень послідовності $\{\zeta_j + \theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ [5].

Позначимо через $L_2(f)$ гільбертів простір векторних комплекснозначних функцій $b(\lambda) = \{b_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, інтегрованих в квадраті за мірою із щільністю $f(\lambda) = \{f_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} b^{\top}(\lambda)f(\lambda)\overline{b(\lambda)}d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k,n=1}^{\infty} b_k(\lambda)\overline{b_n(\lambda)}f_{kn}(\lambda)d\lambda < \infty.$$

Через $L_2^{N-}(f)$ позначимо підпростір в $L_2(f)$, породжений функціями $e^{ij\lambda}\delta_k, \delta_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$, $k = 1,2,\dots$, $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,N\}$, де $\delta_{kk} = 1, \delta_{kn} = 0$ для $k \neq n$.

Кожна лінійна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ від спостережень послідовності $\{\zeta_j + \theta_j\}$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$ має вигляд

$$\hat{A}_N\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^\top(e^{i\lambda})(Z^\zeta(d\lambda) + Z^\theta(d\lambda)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(e^{i\lambda})(Z_k^\zeta(d\lambda) + Z_k^\theta(d\lambda)), \qquad (7)$$

де $Z^\zeta(\Delta) = \{Z_k^\zeta(\Delta)\}_{k=1}^\infty$ та $Z^\theta(\Delta) = \left\{Z_k^\theta(\Delta)\right\}_{k=1}^\infty$ - ортогональні випадкові міри послідовностей $\{\zeta_j\}$ та $\{\theta_j\}$, відповідно, $h(e^{i\lambda}) = \left\{h_k(e^{i\lambda})\right\}_{k=1}^\infty$ - спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_N\zeta$. Функція $h(e^{i\lambda}) \in L_2^{N-}(f+g)$.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h; f, g)$ оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюється за формулою

$$\Delta(h; f, g) = E|A_N\zeta - \hat{A}_N\zeta|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left[A_N(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})\right]^\top f(\lambda) \overline{\left[A_N(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})\right]} + h^\top(e^{i\lambda}) g(\lambda) \overline{h(e^{i\lambda})} \right) d\lambda,$$

$$A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} \vec{a}_j e^{ij\lambda}.$$

Спектральна характеристика $h(f, g)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\zeta$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки

$$\Delta(f, g) = \Delta(h(f, g); f, g) = \min_{h \in L_2^{N-}(f+g)} \Delta(h; f, g) = \min_{\hat{A}_N\zeta} E|A_N\zeta - \hat{A}_N\zeta|^2. \qquad (8)$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ є розв'язком оптимізаційної задачі (8). Використавши класичний метод проекцій А.М. Колмогорова [1], можна вивести формули для обчислення величини середньокваратичної похибки $\Delta(f, g)$ та спектральної характеристики $h(f, g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, відповідно, відомі. Тоді

$$\begin{aligned} h^\top(f, g) &= \left(A_N^\top(e^{i\lambda}) f(\lambda) - C_N^\top(e^{i\lambda})\right) [f(\lambda) + g(\lambda)]^{-1} = \\ &= A_N^\top(e^{i\lambda}) - \left(A_N^\top(e^{i\lambda}) g(\lambda) + C_N^\top(e^{i\lambda})\right) [f(\lambda) + g(\lambda)]^{-1}, \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\Delta(f, g) = \langle \mathbf{a}_N, \mathbf{R}_N \mathbf{a}_N \rangle + \langle \mathbf{c}_N, \mathbf{B}_N \mathbf{c}_N \rangle, \qquad (10)$$

де

$$C_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} \vec{c}_j e^{ij\lambda}, \mathbf{a}_N = \{\vec{a}_j\}_{j=0}^N, \mathbf{c}_N = \{\vec{c}_j\}_{j=0}^N = \mathbf{B}_N^{-1} \mathbf{D}_N \mathbf{a}_N,$$

$\langle a, b \rangle$ - скалярний добуток в ℓ_2, матриці $\mathbf{B}_N = \{B_N(j, l)\}_{j,l=0}^N$, $\mathbf{D}_N = \{D_N(j, l)\}_{j,l=0}^N$, $\mathbf{R}_N = \{R_N(j, l)\}_{j,l=0}^N$ задаються елементами :

$$B_N(j, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}\right]^\top e^{i(l-j)\lambda} d\lambda,$$

$$D_N(j,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}d\lambda,$$

$$R_N(j,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}g(\lambda)\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}d\lambda, \quad j,l=0,1,\ldots,N.$$

Теорема 1. *Нехай $\{\zeta(t), t\in\mathbb{R}\}$ та $\{\theta(t), t\in\mathbb{R}\}$ - некорельовані між собою періодично корельовані стохастичні процеси такі, що стаціонарні послідовності $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, побудовані за співвідношеннями (1), (2), відповідно, мають спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, які задовольняють умову мінімальності (6). Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j, j=0,1,\ldots,N\}$, які визначають функціонал $A_N\zeta$, задовольняють умову (5). Тоді спектральна характеристика $h(f,g)$ і середньоквадратична похибка $\Delta(f,g)$ лінійної оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)+\theta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, обчислюються за формулами (9) та (10). Оптимальна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ обчислюється за формулою (7).*

Наслідок 1. *Нехай $\{\zeta(t), t\in\mathbb{R}\}$ - періодично корельований стохастичний процес такий, що стаціонарна послідовність $\{\zeta_j, j\in\mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), має спектральну щільність $f(\lambda)$, що задовольняє умову мінімальності*

$$\int_{-\pi}^{\pi} Tr\left[(f(\lambda))^{-1}\right]d\lambda < \infty. \tag{11}$$

Нехай коефіцієнти $\{\vec{a}_j, j=0,1,\ldots,N\}$, які визначають функціонал $A_N\zeta$, задовольняють умову (5). Тоді спектральна характеристика $h(f)$ та середньоквадратична похибка $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процеса $\zeta(t)$ при $t\in\mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$ обчислюються за формулами

$$h^{\top}(f) = A_N^{\top}(e^{i\lambda}) - C_N^{\top}(e^{i\lambda})[f(\lambda)]^{-1}, \tag{12}$$

$$\Delta(f) = \langle \mathbf{c}_N, \mathbf{a}_N\rangle, \tag{13}$$

де $\mathbf{a}_N = \{\vec{a}_j\}_{j=0}^N, \mathbf{c}_N = \{\vec{c}_j\}_{j=0}^N = \mathbf{B}_N^{-1}\mathbf{a}_N$, матриця $\mathbf{B}_N = \{B_N(j,l)\}_{j,l=0}^N$ задається елементами:

$$B_N(j,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[(f(\lambda))^{-1}\right]^{\top}e^{i(l-j)\lambda}d\lambda, \quad j,l=0,1,\ldots,N.$$

Оптимальна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ обчислюється за формулою

$$\hat{A}_N\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} h^{\top}(e^{i\lambda})Z^{\zeta}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} h_k(e^{i\lambda})Z_k^{\zeta}(d\lambda).$$

3. Мінімаксний (робастний) метод інтерполяції. Щоб користуватись формулами (9), (10), (12), (13) для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$, потрібно знати спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стаціонарних послідовностей $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, які побудовані за співвідношеннями (1), (2), відповідно. У тому випадку, коли спектральні щільності точно не відомі, але задана множина $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний підхід до задач оцінювання функціоналів від невідомих значень процесу. Ми шукаємо оцінку, яка дає найменшу похибку одночасно для всіх спектральних щільностей із заданого класу D.

Означення 2. *Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими у D для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$, якщо*

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 3. *Для заданої множини пар спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ називається мінімаксною (робастною), якщо*

$$h^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D} L_2^{N-}(f+g), \quad \min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h^0; f, g).$$

Виходячи із цих означень та співвідношень (9), (10), (12), (13), можна переконатись у справедливості наступних лем.

Лема 1. *Спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, які задовольняють умову (6), найменш сприятливі в класі D для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$, якщо коефіцієнти Фур'є функцій*

$$(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \quad f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}, \quad f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} g^0(\lambda)$$

задають матриці $\mathbf{B}_N^0, \mathbf{D}_N^0, \mathbf{R}_N^0$, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D} \left(\langle \mathbf{a}_N, \mathbf{R}_N \mathbf{a}_N\rangle + \langle (\mathbf{B}_N)^{-1} \mathbf{D}_N \mathbf{a}_N, \mathbf{D}_N \mathbf{a}_N\rangle\right) =$$

$$= \langle \mathbf{a}_N, \mathbf{R}_N^0 \mathbf{a}_N\rangle + \langle (\mathbf{B}_N^0)^{-1} \mathbf{D}_N^0 \mathbf{a}_N, \mathbf{D}_N^0 \mathbf{a}_N\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ обчислюється за формулою (9) за умови, що $h(f^0, g^0) \in H_D$.

Лема 2. *Спектральна щільність $f^0(\lambda) \in D_f$, яка задовольняє умову (11), найменш сприятлива в класі D_f для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $(f^0(\lambda))^{-1}$ задають матрицю $\mathbf{B}_N^0$, яка визначає розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f\in D_f} \langle (\mathbf{B}_N)^{-1} \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N\rangle = \langle (\mathbf{B}_N^0)^{-1} \mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N\rangle.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ обчислюється за формулою (12) за умови, що $h(f^0) \in H_D$.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f^0, g^0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f^0, g^0) \leq \Delta(h; f^0, g^0), \forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f^0, g^0)$, $h(f^0, g^0) \in H_D$ та (f^0, g^0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\Delta(h(f^0, g^0); f, g) \to sup, \quad (f, g) \in D, \tag{14}$$

$$\Delta(h(f^0, g^0); f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + C_N^0(e^{i\lambda}))^\top(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}f(\lambda)\times$$

$$\times(f^0(\lambda)+g^0(\lambda))^{-1}\overline{(A_N(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + C_N^0(e^{i\lambda}))}d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(A_N(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - C_N^0(e^{i\lambda}))^\top\times$$

$$\times(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}g(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}\overline{(A_N(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - C_N^0(e^{i\lambda}))}d\lambda.$$

Лема 3. *Нехай $f^0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (11) та є розв'язком задачі на умовний екстремум*

$$\Delta(h(f^0); f) \to sup, \quad f(\lambda) \in D_f,$$

$$\Delta(h(f^0); f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(C_N^0(e^{i\lambda}))^\top(f^0(\lambda))^{-1}f(\lambda)(f^0(\lambda))^{-1}\overline{(C_N^0(e^{i\lambda}))}d\lambda. \tag{15}$$

Тоді $f^0(\lambda)$ є найменш сприятливою спектральною щільністю для оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями процесу $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$. Спектральна характеристика $h^0 = h(f^0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$, обчислена за формулою (12), є мінімаксною, якщо $h(f^0) \in H_D$.

Задача на умовний екстремум (14) еквівалентна такій задачі на безумовний екстремум

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f^0, g^0); f, g) + \delta((f, g)|D) \to inf,$$

де $\delta((f, g)|D)$ - індикаторна функція множини D. Розв'язок (f^0, g^0) останньої задачі визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(f^0, g^0)$ [13], яка є необхідною та достатньою для того, щоб точка (f^0, g^0) належала множині мінімумів опуклої функції. $\partial\Delta_D(f^0, g^0)$ - субдиференціал опуклого функціоналу $\Delta_D(f, g)$ в точці $(f, g) = (f^0, g^0)$.

4. Найменш сприятливі спектральні щільності на множині D_0^-.

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$, за умови, що спектральна щільність $f(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), належить множині

$$D_0^- = \left\{f(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{-1}(\lambda)d\lambda = P\right\},$$

де $P = \{p_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$ - задана додатно визначена матриця з $detP \neq 0$.

За допомогою методу невизначених множників Лагранжа знаходимо, що розв'язок $f^0(\lambda)$ задачі (15) на умовний екстремум задовольняє рівняння

$$\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} C_N^0(e^{i\lambda}) \left(C_N^0(e^{i\lambda})\right)^* \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} = \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} \vec{\alpha}\vec{\alpha}^* \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top}, \quad (16)$$

де $\vec{\alpha} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ - вектор множників Лагранжа,

$$C_N^0(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} \vec{c}_j^{\,0} e^{ij\lambda}, \quad \mathbf{c}_N^0 = \{\vec{c}_j^{\,0}\}_{j=0}^{N} = (\mathbf{B}_N^0)^{-1}\mathbf{a}_N,$$

матриця $\mathbf{B}_N^0$ побудована із коефіцієнтів Фур'є матричної функції $\left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top}$:

$$B_N^0(j,l) = R^{\top}(j-l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^{\top} e^{i(l-j)\lambda} d\lambda, \qquad j,l = 0,1,\dots,N.$$

Коефіцієнти Фур'є $R(j) = R^*(-j), j = 0,1,\dots,N$, знайдені з рівності

$$\mathbf{B}_N^0 \vec{\alpha}_N = \mathbf{a}_N,$$

для $\vec{\alpha}_N = (\vec{\alpha}, \vec{0}, \dots, \vec{0})^{\top}$, задовольняють співвідношення (16) та $\mathbf{B}_N^0 \mathbf{c}_N^0 = \mathbf{a}_N$. З виведених рівнянь отримуємо, що

$$R(j) = P(\vec{a}_0)^{-1}\vec{a}_j^{\top}, \quad j = 0,1,\dots,N,$$

де $\left[(\vec{a}_0)^{-1}\right]^{\top} \cdot \vec{a}_0 = 1$. Як наслідок маємо рівність $R(0) = P$.

Нехай послідовність $\{\vec{a}_j, j = 0,1,\dots,N\}$ визначена таким чином, що матрична функція $(f^0(\lambda))^{-1} = \sum_{j=-N}^{N} R(j)e^{ij\lambda}$ є додатно визначеною та має ненульовий дискримінант. Тоді $(f^0(\lambda))^{-1}$ можна зобразити у вигляді [14]

$$(f^0(\lambda))^{-1} = \left(\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-ij\lambda}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-ij\lambda}\right)^*.$$

Отже, $f^0(\lambda)$ - спектральна щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N, яка задається рівнянням

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \vec{\zeta}_{l-j} = \vec{\varepsilon}_l,$$

де $\vec{\varepsilon}_l$ -векторна послідовність білого шуму. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ обчислюється за формулою

$$h(f^0) = -\sum_{j=1}^{N} \overline{R(j)}(P^T)^{-1}\vec{a}_0 e^{-ij\lambda}. \quad (17)$$

Отже, справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай послідовність коефіцієнтів $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \ldots, N\}$, що визначає лінійний функціонал $A_N\zeta$, визначена таким чином, що матрична функція $\sum_{j=-N}^{N} R(j)e^{ij\lambda}$, де*

$$R(j) = R^*(-j) = P(\vec{a}_0)^{-1}\vec{a}_j^\top, j = 0, 1, \ldots, N,$$

додатно визначена та має ненульовий визначник. Тоді найменш сприятлива спектральна щільність у класі D_0^- оптимальної оцінки функціонала $A_N\zeta$ задається формулою

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{j=-N}^{N} R(j)e^{ij\lambda}\right)^{-1}.$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ визначається формулою (17). Найбільше значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}_N\zeta$ обчислюється за формулою

$$\Delta(f^0) = \langle \mathbf{c}_N^0, \mathbf{a}_N \rangle. \tag{18}$$

5. Найменш сприятливі спектральні щільності на множині D_M^-. Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_N\zeta$ за спостереженнями $\zeta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0, (N+1)T]$, за умови, що спектральна щільність $f(\lambda)$ стаціонарної послідовності $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, яка побудована за співвідношенням (1), належить множині

$$D_M^- = \left\{ f(\lambda) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) \cos(m\lambda) d\lambda = P(m), m = 0, 1, \ldots, M \right\},$$

де послідовність матриць $P(m) = \{p_{kn}(m)\}_{k,n=1}^{\infty}$, $m = 0, 1, \ldots, M$, задана таким чином, що $P(m) = P^*(-m)$ та матрична функція $\sum_{m=-M}^{M} P(m)e^{im\lambda}$ додатно визначена і має ненульовий визначник. За допомогою методу невизначених множників Лагранжа знаходимо, що розв'язок $f^0(\lambda)$ задачі (15) на умовний екстремум задовольняє рівняння

$$\begin{gathered} \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top C_N^0(e^{i\lambda}) \left(C_N^0(e^{i\lambda})\right)^* \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top = \\ = \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top \left(\sum_{m=0}^{M} \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}\right) \left(\sum_{m=0}^{M} \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}\right)^* \left[(f^0(\lambda))^{-1}\right]^\top, \end{gathered} \tag{19}$$

де $\vec{\alpha}_m, m = 0, 1, \ldots, M$, - невизначені множники Лагранжа. Рівність (19) виконується, якщо

$$\sum_{j=0}^{N} \vec{c}_j e^{ij\lambda} = \sum_{m=0}^{M} \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}.$$

Розглянемо такі випадки: $M \geq N$ та $M < N$. Нехай $M \geq N$. Тоді коефіцієнти Фур'є функції $(f^0(\lambda))^{-1}$ визначають матрицю $\mathbf{B}_N^0$. Отже екстремальна задача (15) вироджена. Покладемо

$$\vec{\alpha}_{N+1} = \cdots = \vec{\alpha}_M = \vec{0},$$

а $\vec{\alpha}_0, \ldots, \vec{\alpha}_N$ знайдемо з рівняння $\mathbf{B}_N^0 \alpha_0^N = \mathbf{a}_N$, де $\alpha_0^N = (\vec{\alpha}_0, \ldots, \vec{\alpha}_N)^\top$. Тоді найменш сприятлива щільність задовольняє співвідношення

$$(f^0(\lambda))^{-1} = \sum_{m=-M}^{M} P(m) e^{im\lambda} = \left(\sum_{j=0}^{M} A_j e^{-ij\lambda} \right) \left(\sum_{j=0}^{M} A_j e^{-ij\lambda} \right)^* . \qquad (20)$$

Така спектральна щільність $f^0(\lambda)$ є спектральною щільністю стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку M

$$\sum_{j=0}^{M} A_j \vec{\zeta}_{l-j} = \vec{\varepsilon}_l.$$

Нехай $M < N$. Тоді матрицю $\mathbf{B}_N$ визначають коефіцієнти Фур'є функції $(f(\lambda))^{-1}$. Серед них відомі $P(m), m = 0, \ldots, M$, та невідомі $P(m), m = M + 1, \ldots, N$. Невідомі $\vec{\alpha}_m, m = 0, \ldots, M$, та $P(m), m = M + 1, \ldots, N$, знаходимо з рівняння

$$\mathbf{B}_N \alpha_0^M = \mathbf{a}_N, \quad \alpha_0^M = (\vec{\alpha}_0, \ldots, \vec{\alpha}_M, \vec{0}, \ldots, \vec{0})^\top.$$

Якщо послідовність матриць $P(m), m = 0, \ldots, N$, така, що матрична функція $\sum_{m=-N}^{N} P(m) e^{im\lambda}$ додатно визначена і має ненульовий визначник, то найменш сприятлива спектральна щільність $(f^0(\lambda))^{-1}$ визначається формулою

$$(f^0(\lambda))^{-1} = \sum_{m=-N}^{N} P(m) e^{im\lambda} = \left(\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-ij\lambda} \right) \left(\sum_{j=0}^{N} A_j e^{-ij\lambda} \right)^* . \qquad (21)$$

Отже, $f^0(\lambda)$ - щільність стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \vec{\zeta}_{l-j} = \vec{\varepsilon}_l.$$

Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Спектральна щільність (20) стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку M, яка визначається матрицями $P(m), m = 0, 1, \ldots, M$, є найменш сприятливою в класі D_M^- в задачі оптимальної інтерполяції функціонала $A_N \vec{\zeta}$ при $M \geq N$. Якщо ж $M < N$ та розв'язки $P(m), m = M+1, \ldots, N$, рівняння $\mathbf{B}_N \alpha_0^M = \mathbf{a}_N$ з коефіцієнтами $P(m), m = 0, \ldots, M$, утворюють додатно визначену матричну функцію $\sum_{m=-N}^{N} P(m) e^{im\lambda}$ з визначником тотожньо не рівним нулю, то спектральна щільність (21) стохастичної векторної послідовності авторегресії порядку N є найменш сприятливою в класі D_M^-. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f^0)$ визначається формулою (12). Найбільше значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}_N \zeta$ обчислюється за формулою (18).*

Висновки. Запропоновано формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики в задачі оптимальної інтерполяції функціонала $A_N \zeta = \int_0^{(N+1)T} a(t) \zeta(t) dt$, який залежить від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу $\zeta(t)$ за результатами спостережень процесу $\zeta(t) + \theta(t)$ при $t \in \mathbb{R}\backslash[0,(N+1)T]$, де $\theta(t)$ - некорельований з $\zeta(t)$ періодично корельований стохастичний процес. Задача вивчається за умов спектральної визначеності та спектральної невизначеності. Результати отримані з використанням властивостей гільбертового простору, теорії оцінювання векторних стаціонарних послідовностей.

1. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей. – М.: "Наука", 1986. – 534 с.
2. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: Whis engineering applications. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. - 163 p.
3. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 526 p.
4. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 258 p.
5. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы, 2-е изд. доп. – М.: "Наука", 1990. – 272 с.
6. *Grenander U.* A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – **3**. – P. 371–379.
7. *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів: монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 320 с.
8. *Моклячук М. П., Масютка О. Ю.* Мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних процесів: монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 216 с.
9. *Гладышев Е. Г.* Периодически и почти-периодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – **8**, № 2. – С. 184–189.
10. *Makagon A.* Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes // Studia Math. – 1999. – **136**, №1. – P. 71–86.
11. *Makagon A.* Characterization of the spectra of periodically correlated processes // Multivariate Analysis. – 2001. – **78**. – P. 1–10.
12. *Kallianpur G., Mandrekar V.* Spectral theory of stationary H-Valued processes // J. Multivariate Analysis. – 1971. – **1**. – P. 1–16.
13. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: "Наука", 1982. – 144 с.
14. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. – М.: "Мир", 1974. – 576 с.

Одержано 01.10.2012