УДК 517.956.223

А. В. Заворотинский (Черниговский нац. пед. ун-т имени Т.Г.Шевченка)

СЛАБО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ С ПАРАМЕТРОМ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И НЕИЗВЕСТНЫМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ. ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ.

A certain a class of elliptic boundary value problems is considered in domain. The elliptic operator polinomialy depends on parameter and the boundary conditions contain additional functions defined on the boundary of the domain. For these problems the definition of weakly ellipticity with a parameter is introduced. By means of method Vishik-Iyusternik fundamental decisions of a problem are under construction and their estimations are received.

Исследуются эллиптические краевые задачи в эвклидовой области, для которых эллиптическое уравнение зависит полиномиально от параметра, а краевые условия содержат дополнительные неизвестные функции на границе. Построена фундаментальна система решений этой задачи и получены её оценки в прстранствах Соболева.

Введение. Эллиптические операторы с параметром играют важную роль в теории эллиптических уравнений и её приложений. Среди них отдельный интерес представляют слабо эллиптические краевые задачи, рассмотренные Волевичем [1–3]. Данный класс задач является обобщением эллиптических с параметром задач, рассмотренных Агмоном [4] и Аграновичем-Вишиком [5]. Слабо эллиптические задачи тесно связаны со смешаной задачей для параболических уравнений, не разрешённых относительно старшей производной по времени [6]. Эллиптические задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области были исследованы в работах [7–9]. Такие задачи возникают в теории упругости, гидродинамики и, как вспомогательные, в теории эллиптических задач в не гладких областях и при исследовании гиперболических задач. Автору была поставлена задача исследовать слабо эллиптические с параметром граничные задачи с неизвестными дополнительными функциями на границе области.

В настоящей работе посторена фундаментальная система решений слабо эллиптической с параметром граничной задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области и его оценка. Статья состоит из 4 пунктов. В п.1 даётся постановка задачи. В п.2 приведён основной результат работы. В п.3 приводятся вспомогательные утверждения, которые касаются разрешимости модельной краевой задачи на полуоси. В п.4 дано доказательство основной теоремы. Техника локализации позволяет на основе полученных оценок фундаментальных решений получить априорные оценки в специальных нормах функциональных пространств, зависящих от большого параметра λ. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Пользуясь случаем автор приносит глубокую благодарность $\boxed{\text{Л.Р.Волевичу}}$, М.Л. Горбачуку за постановку задачи и А.А.Мурачу за обсуждение результатов.

1.Постановка задачи. 1.1. Пусть G – ограниченая открытая область в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$. Предполагается, что её граница ∂G является бесконечно гладким многообразием без края размерности $n-1$. Как обычно $\overline{G} := G \cup \partial G$. Рассмотрим следующую краевую задачу, содержащую параметр λ:

$$A(x,D,\lambda)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A_{2m-j}(x,D)u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$(B_j(x',D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x',D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \quad x' \in \partial G, \quad j = 1,\ldots,m+\varkappa. \tag{2}$$

Здесь $\lambda \in [0;\infty)$, $m,\mu,\varkappa \in \mathbb{N}$, $m > \mu$, $A_{2m-j}(x,D)$ – линейный дифференциальный оператор (л.д.о.) в $\overline{G}$, $B_j(x,D)$ – граничный л.д.о. на ∂G, $C_{j,k}(x',D')$ – касательный л.д.о. на ∂G. Коэффициенты этих операторов – комплекснозначные бесконечно гладкие функции, а порядки удовлетворяют условиям

$$\operatorname{ord} A_{2m-j} \le 2m-j, \quad \operatorname{ord} B_j = m_j, \quad \operatorname{ord} C_{j,k} \le m_j + \alpha_k,$$

где $m_j, \alpha_k \in \mathbb{Z}$ и

$$m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \le \ldots m_{m+\varkappa}. \tag{3}$$

Как обычно, $C_{j,k} \equiv 0$ если $m_j + \alpha_k < 0$.

Задача (1), (2) кроме неизвестной функции $u(x)$, $x \in \overline{G}$, содержит $\varkappa$ дополнительных неизвестных функций $\sigma_1(x'),\ldots,\sigma_\varkappa(x')$, $x' \in \partial G$. Поэтому число краевых условий равно $m+\varkappa$.

Сформулируем условия, которым удовлетворяет задача (1) – (2). **1.2.** Пусть $x \in \overline{G}$. Обозначим

$$A^0(x,\xi,\lambda) := \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \lambda^j A^0_{2m-j}(x,\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0;\infty),$$

где $A^0_{2m-j}(x,\xi)$– главный символ оператора $A_{2m-j}(x,D)$. Заметим, что функция $A^0(x,\xi,|\xi|)$ однородная по ξ порядка $2m$.

Условие 1. *Существует $c > 0$,такое что*

$$|A^0(\xi,\lambda)| \ge C|\xi|^{2\mu}(|\lambda| + |\xi|)^{2m-2\mu}. \tag{4}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \ne 0$, $\lambda \in [0;\infty)$.

Это условие *слабой эллиптичности с параметром* оператора $A^0(x,D,\lambda)$ в точке $x \in \overline{G}$. При $\mu = 0$ это условие переходит в известное условие эллиптичности с большим праметром [4, 5, 10].

Предложение 1([2], см. также [3]). *Неравенство* (4) *равносильно следующим условиям:*

$$A^0_{2m}(x,\xi) \ne 0, \quad A^0_{2\mu}(x,\xi) \ne 0, \quad A^0(x,\xi,\lambda) \ne 0, \tag{5}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \ne 0, \lambda \in [0;\infty)$.

Отметим, что первые два неравенства в (5) означают эллиптичность операторов $A^0_{2m}(x,\xi)$ и $A^0_{2\mu}(x,\xi)$.

1.3. Пусть $x' \in \partial G$ и U – достаточно малая окресность точки x' из топологии в ∂G. Выберем в U локальные координаты $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ такие, что x_n –

расстояние от точки $x \in U$ до границы ∂G. Запишем в этих координатах символы $A^0_{2m-j}(x', \xi)$ и $A^0(x, \xi, \lambda)$ для каждого $\lambda \in [0; \infty)$. Полученные полиномы обозначим через $A^0_{2m-j}(\xi)$ и $A^0(\xi, \lambda)$ соответственно.

Предположим, что выполняется условие 1 в точке $x = frm[o]--x'$. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\lambda \in [0; \infty)$. Тогда уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ и $A^0_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$ не имеют вещественных τ-корней. Обозначим через $m^{\pm}(\xi', \lambda)$ и $\mu^{\pm}(\xi', \lambda)$ число корней советственно первого и второго уравнений, лежащих в полуплоскости $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C} : \Im\tau \gtrless 0\}$. Но тогда числа $m^{\pm}(\xi', \lambda)$ на самом деле не зависят от ξ' и λ, обозначим их через $m^{\pm}$, и $m^+ + m^- = 2m$. Поскольку корни уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ непрерывно зависят от λ, то числа $m^{\pm}$ совпадают с числом нулей в верхней (нижней) полуплоскости уравнения $A^0_{2m}(\xi', \tau) = 0$, отвечающего $\lambda = 0$.

Условие 2. *Для каждого* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ *выполняются равенства*

$$m^+(\xi') = m^-(\xi') = m, \quad \mu^+(\xi') = \mu^-(\xi') = \mu$$

Это условие *правильной слабой эллиптичности с параметром* оператора $A^0(x', D, \lambda)$ в точке $x' \in \partial G$.

Заметим, что при $n \geq 3$ равенство $\mu^+(\xi') = \mu^-(\xi')$ выполняется автоматически [3].

1.4. Как и прежде, $x' \in \partial G$. Запишем в локальных координатах главные символы операторов $B_j(x', D)$ и $C_{j,k}(x', D')$. Полученные полиномы обозначим соответственно через $B^0_j(\xi)$ и $C^0_{j,k}(\xi)$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \equiv (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

В задаче (1), (2) отбросим младшие члены дифференциальных операторов, положим $f \equiv 0$, перейдем к локальным координатам в окрестности точки ξ' и применим преобразование Фурье по переменным $x_1, \cdots, x_{n-1}$. Получим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (1) на полуоси $t := x_n > 0$:

$$A^0(\xi', D_t, \lambda)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{6}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{7}$$

Здесь гладкая функция $v(t)$ и числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$ искомые, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ – произвольно заданные комплексные числа. Задача (6),(7) зависит от двух параметров $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\lambda \in [0, \infty)$. Она называется *граничным символом* задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$.

Нас будут интересовать решения, удовлетворяющие условию

$$v(t) \to 0, \quad \text{при} t \to \infty \tag{8}$$

Условие 3. *Для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, $\lambda > 0$ *и* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (6),(7),(8) *имеет единственное решение* $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$.

Это аналог условия Лопатинского для краевой задачи (1), (2) при фиксированном λ.

1.5. В следующих двух условиях идет речь о разрешимости краевой задачи для оператора $A^0(\xi', D_t, \lambda)$ в предельных случаях $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to 0$ (ср. с [3]).

Пусть $r \in \{m, \mu\}$.Рассмотрим следующую краевую задачу

$$A^0_{2r}(\xi', D_t)v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{9}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, r + \varkappa. \tag{10}$$

Условие 4. *Для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (9),(10),(8) *имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa)$ при $r = m$.*

Условие 5. *Для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (9),(10),(8) *имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \dots, \sigma_\varkappa)$ при $r = \mu$.*

1.6. Поскольку при $\lambda \neq 0$ уравнение $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$A^0_{2\mu}(\xi', z) + \lambda^{-1} A^0_{2\mu+1}(\xi', z) + \dots + \lambda^{2\mu-2m} A^0_{2m}(\xi', z) = 0,$$

при больших $|\lambda|$ имеются 2μ корней уравнения $A^0(\xi', \tau, \lambda) = 0$, близких к корням уравнения $A^0_{2\mu}(\xi', \tau) = 0$. Сделаем замену $\varepsilon = \lambda^{-1}$. Поскольку при $\varepsilon = 0$ оператор $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ совпадает с оператором $A^0_{2\mu}(\xi', D_t)$ порядка $2\mu < 2m$, то при малых $\varepsilon > 0$ требуются поправки к решению задачи (6),(7), позволяющие удовлетворить оставшимся $m - \mu$ краевым условиям. Из метода Вишика–Люстерника [3, 11] вытекает, что эти поправки являются решением следующей краевой задачи:

$$A^0(0, D_t, 1)v(t) = 0, t > 0; \tag{11}$$

$$(B^0(0, D_t)v(t))|_{t=0} = \varphi_j, j = \mu + \varkappa + 1, \dots, m + \varkappa. \tag{12}$$

Условие 6. *Для любых $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \dots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача* (11),(12),(8) *имеет единственное решение $v(t)$.*

1.7. Определение. *Краевая задача* (1),(2) *называется слабо эллиптической с параметром если в поизвольной точке $x \in \overline{G}$ выполняется условие 1 и в произвольной точке $x' \in \partial G$ выполняются условия 2 – 6.*

Из условий 1-3 следует, что при произвольных фиксированных $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ и $\lambda \in [0; \infty)$ краевая задача (1),(2) эллиптическая как задача без параметра, но с дополнительными неизвестными функциями на границе области [7, 8].

1.8. Наряду с задачами типа (1),(2) можно рассматривать задачи, получающиеся при замене "большого"параметра λ на "малый"параметр $\varepsilon = 1/\lambda > 0$, рассмотренные в работе автора [12]

$$A(x, D, \varepsilon)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A_{2m-j}(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in G,$$

$$(B_j(x', D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \quad x' \in \partial G, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa.$$

2. Основной результат. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$, $\lambda \in [0; \infty)$ и $r = \{1, \dots, m + \varkappa\}$. Рассмотрим следующий граничный символ задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$:

$$A^0(\xi', D_t, \lambda)v_r(t) = 0 \quad t > 0, \tag{13}$$

$$(B_j^0(\xi', D_t)v_r)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^0(\xi')\sigma_k^{(r)} = \delta_{j,r}, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa. \tag{14}$$

Здесь $\delta_{j,r}$ – символ Кронекера.

Из условий 1,2,3 следует, что краевая задача (13), (14) имеет единственное решение

$$v_r(t) = v_r(t, \xi', \lambda), \quad \sigma_k^{(r)} = \sigma_k^{(r)}(\xi', \lambda), \quad k = 1, \dots, \varkappa,$$

такое, что функция $v_r(t)$ со всеми производными экпоненциально убывает при $t \to \infty$.

Система векторов $(v_r(t), \sigma_1^{(r)}, \dots, \sigma_\varkappa^{(r)})$, $r = 1, \dots, \varkappa$, линейно независимая. Она называется *фундаментальной системой решений* (ф.с.р.) граничного символа.

Обозначим через $\| \cdot \|$ норму в пространстве $L_2((0, +\infty))$.

Основных результатом работы является следующая теорема:

Теорема. *Пусть задача* (1),(2) *слабо эллиптическая с параметром и пусть целое число* $l \geq 0$. *Тогда для любых* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\lambda \in [0; \infty)$ *граничный символ задачи* (13),(14) *имеет единственное решение* $(v_r(t), \sigma_1^{(r)}, \dots, \sigma_\varkappa^{(r)})$, *и справедливы оценки для* $v_r(t, \xi', \lambda)$ *ф.с.р.:*

$$||D^l v_r(., \xi', \lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} \leq \tag{15}$$

$$\leq C \begin{cases} |\xi'|^{l-m_r-1/2}, & r \leq \mu + \varkappa, \quad l \leq m_{\mu+\varkappa+1}; \\ |\xi'|^{m_{\mu+\varkappa+1}-m_r}(|\lambda| + |\xi'|)^{l-m_{\mu+\varkappa+1}-1/2}, & r \leq \mu + \varkappa, \quad l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ |\xi'|^{l-m_{\mu+\varkappa}-1/2}(|\lambda| + |\xi'|)^{m_{\mu+\varkappa}-m_r}, & r > \mu + \varkappa, \quad l \leq m_{\mu+\varkappa}; \\ (|\lambda| + |\xi'|)^{l-m_r-1/2}, & r > \mu + \varkappa, \quad l > m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

с константой C, *не зависящей от* ξ' *и* λ.

Доказательство теоремы будет приведено в п.4. Для этого в п.3 мы исследуем условия разрешимости краевой задачи на полуоси $(0; +\infty)$ с дополнительными неизвестными постоянными в краевых условиях.

3. Условия разрешимости краевой задачи на полуоси. В этом пункте мы фиксируем $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для краткости обозначим $B_j^0(D_t) := B_j^0(\xi', D_t)$, $C_{j,k}^0 := C_{j,k}^0(\xi')$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на полуоси:

$$P(D_t)v(t) = 0, \quad t > 0, \tag{16}$$

$$(B_j^0(D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^0 \sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, p + \varkappa, \tag{17}$$

Здесь $p \in \mathbb{N}$ и $P(\tau)$ - произвольный комплексный полином порядка $\operatorname{ord} P \leq 2p$.

Пусть γ — кусочно гладкий контур, лежащий в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Предположим, что точно p корней $\tau_1^+, \dots, \tau_p^+$ этого полинома (с учётом их кратности) лежат внутри области, ограниченной контуром γ (остальные корни находятся вне замыкания этой области). Положим

$$P^\gamma(\tau) := \prod_{j=1}^{p}(\tau - \tau_j^+) = \sum_{k=0}^{p} a_k^\gamma \tau^{p-k}, \quad P_j^\gamma(\tau) := \sum_{k=0}^{j} a_k^\gamma \tau^{j-k}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_\gamma$ пространство решений уравнения $P^\gamma(D_t)v(t) = 0$. Пространство $\mathfrak{M}_\gamma$ имеет размерность p и базис

$$h_k(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{i\tau t}\frac{P^\gamma_{p-k}(\tau)}{P^\gamma(\tau)}\,d\tau, \quad k = 1,\dots,p. \tag{18}$$

Пусть

$$B^\gamma_j(\tau) := \sum_{k=1}^{p} b^\gamma_{j,k}\tau^{j-1}$$

— остаток от деления полинома $B^0_j(\tau)$ на $P^\gamma(\tau)$.

Введём матрицу $L^\gamma = \left(L^\gamma_{j,k}\right)_{j,k=1,\dots,p+\varkappa}$, где

$$L^\gamma_{j,k} := \begin{cases} b^\gamma_{j,k}, & j = 1,\dots,p+\varkappa; \quad k = 1,\dots,p; \\ C_{j,k-p}, & j = 1,\dots,p+\varkappa; \quad k = p+1,\dots,p+\varkappa. \end{cases}$$

Назовём её *матрицей Лопатинского*, для задачи (16),(17), где

$$v \in \mathfrak{M}_\gamma. \tag{19}$$

Следующая лемма является обобщением известного утверждения в теории эллиптических краевых задач.

Лемма 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Для любых* $\varphi_1,\dots,\varphi_{p+\varkappa} \in \mathbb{C}$ *задача* (16),(17),(19) *имеет единственное решение.*

(ii) *Матрица Лопатинского* L^γ *обратима.*

(iii) *Найдутся полиномы* $N_1(\tau),\dots,N_{p+\varkappa}(\tau)$, *порядка меньше* p, *и такие числа* $\sigma^r_1,\dots,\sigma^r_\varkappa, r = 1,\dots,p+\varkappa$, *что*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{B^0_j(\tau)N_\ell(\tau)}{P^\gamma(\tau)}d\tau + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}\sigma^\ell_k = \delta_{j,\ell}, \quad j,\ell = 1,\dots,p+\varkappa. \tag{20}$$

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из того, что всякое решение задачи (16), (17), (19) является также решением задачи

$$P^\gamma(D_t)v(t) = 0, \quad t > 0,$$
$$(B^\gamma_j(D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}\sigma_k = \varphi_j, \quad j = 1,\dots,p+\varkappa.$$

Следовательно, уравнение

$$L^\gamma w = \mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_{p+\varkappa}) \in \mathbb{C}^{p+\varkappa}$$

имеет единственное решение

$$w = \mathrm{col}\left(v(0),(D_t v)(0),\dots,(D^{p-1}_t v)(0),\sigma_1,\dots,\sigma_\varkappa\right).$$

Последнее равносильно обратимости матрицы L^γ.

Импликация (ii)⇒(iii). Как показано в работе [13, часть 1, раздел 1] справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{z^{\ell-1}P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}dz=\delta_{\ell,k},\quad \ell,k=1\ldots,p. \tag{21}$$

Любое решение уравнения (16), пренадлежащее пространству $\mathfrak{M}_\gamma$ представляется в виде

$$v(t)=\sum_{k=1}^{p}R_k h_k(t), \tag{22}$$

где R_k – некоторые постоянные, которые мы найдем из граничных условий (17).

Подставим решение (22) в граничные выражения (17). Мы получим следующее

$$B^0_j(D_t)v(t)|_{t=0}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^0_{j,k}\sigma_k=\varphi_j,\quad j=1,\ldots,m+\varkappa. \tag{23}$$

Учитывая (18) и (22) мы получим следующее:

$$\begin{gathered}B^0_j(D_t)v(t)|_{t=0}=\\ =B^0_j(D_t)\left(\sum_{k=1}^{p}R_k h_k(t)\right)\Big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{p}R_k B^0_j(D_t)h_k(t)|_{t=0}=\\ =\sum_{k=1}^{p}R_k B^0_j(D_t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}e^{i\tau t}dz\right)\Bigg|_{t=0}=\\ =\sum_{k=1}^{p}R_k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{B^0_j(z)P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{+}(z)}dz.\end{gathered}$$

Интеграл в правой части последнего выражения не изменится если мы заменим $B^0_j(\tau)$ на $B^{\gamma}_j(\tau)$. Учитывая это и равенство (21) мы получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{B^0_j(z)P^{\gamma}_{p-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}dz=\\ \int\limits_{\gamma}\frac{z^{r-1}P^{\gamma}_{m-k}(z)}{P^{\gamma}(z)}dz=\sum_{\ell=1}^{p}b_{j,\ell}\delta_{\ell,k}=b_{j,k}.\end{gathered}$$

Возвращаясь к (23) результате мы получили систему $p+\varkappa$ уравнений для нахождения неизвестных $R_1,\ldots,R_p$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_\varkappa$:

$$\sum_{k=1}^{p}R_k b_{j,k}+\sum_{k=1}^{\varkappa}C^0_{j,k}\sigma_k=\varphi_j,\quad j=1,\ldots,p+\varkappa. \tag{24}$$

Так как матрица Лопатинского обратима, то неизвестные функции однозначно определяются.

Обозначим через $D=(D_{kj})_{k,j=1,\ldots,p+\varkappa}$ – матрицу, обратную матрице Лопатинского L. Если заменить в (24) φ_j соответственно на $\delta_{j,r}$ и учитывая представление (18), (22) мы получим

$$\begin{aligned}N_\ell(\tau)&=\sum_{k=1}^{p}D_{kl}P^{\gamma}_{p-k}(\tau),\quad l=1,\ldots,p+\varkappa;\\ \sigma^{\ell}_k&=D_{p+k,l},\quad k=1,\ldots,\varkappa;\ l=1,\ldots,p+\varkappa.\end{aligned}$$

которые удовлетворяют (20).

Импликация (iii)$\Rightarrow$(i). Выбирем произвольный вектор $\varphi_1, \dots, \varphi_{p+\varkappa} \in \mathbb{C}^{p+\varkappa}$. В силу условия (iii) решением задачи (16), (17), (19) можна представить в виде:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{p+\varkappa} \varphi_r \int_\gamma e^{i\tau t} \frac{N_r(\tau)}{P^\gamma(\tau)} d\tau,$$

$$\sigma_k = \sum_{r=1}^{p+\varkappa} \varphi_r \, \sigma_k^r, \quad k = 1, \dots, \varkappa.$$

Так пространство решений этой задачи и пространство её правых частей имеют одинаковую размерность $p + \varkappa$, то из существования решения следует его единственность. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Элементы матрицы Лопатнского L непрерывно зависят от корней $\tau_1^+, \dots, \tau_p^+ \in \mathbb{C}+$ полинома $P(\tau)$. Поэтому при малом возмущении этих корней матрица L сохраняет свою невырожденность. Следовательно, условия (i),(ii),(iii) лемы 1 инвариантны относительно малых возмущений корней.

Замечание 2. Если контур $\gamma \subset \mathbb{C}+$ охватывает *все* корни полинома $P(\tau)$, лежащие в полуплоскости $\mathbb{C}+$, то $\mathfrak{M}_\gamma$ – пространство *всех* решений уравнения (16), експоненциально убывающих к нулю при $t \to \infty$.

4. Доказательство теоремы. Оценки фигурирующие в теореме зависят от двух параметров λ и $|\xi'|$. Доказательство этих оценок легко редуцируется к случаю одного параметра.

Действительно, по соображениям однородности

$$A(\xi', D_t, \lambda) u(\rho t) = (A(\xi', \rho D_t, \lambda) u)(\rho t) = \rho^{2m} (A(\xi'/\rho, D_t, \lambda/\rho) u)(\rho t).$$

Аналогично

$$B_j(\xi', D_t) u(\rho t) = \rho^{m_k} (B_k(\xi'/\rho, D_t) u)(\rho t),$$
$$C_{j,k}(\xi') \sigma_k(\xi') = \rho^{-m_r - \alpha_k} C_{j,k}(\xi'/\rho) \sigma_k(\xi'/\rho),$$
$$j = 1, \dots, m + \varkappa, \quad k = 1, \dots, \varkappa.$$

Отсюда следует, что функции $v_r(t, \xi', \lambda)$, $\sigma_1^{(r)}(\xi'), \dots, \sigma_\varkappa^{(r)}(\xi')$ и $v_j(rt, \xi'/r, \lambda/r)$, $\sigma_1^{(r)}(\xi'/r), \dots, \sigma_\varkappa^{(r)}(\xi'/r)$ одновременно являются решениями задачи (13), (14). Из единственности решения этой задачи следует, что

$$v_r(\xi', t, \lambda) = \rho^{-m_r} v_r(\xi'/\rho, \rho t, \lambda/\rho), \sigma_k^{(r)}(\xi') = \rho^{-m_r - \alpha_k} \sigma_k^{(r)}(\xi'/\rho),$$

откуда

$$||D^l v_r(., \xi', \lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} = \rho^{l - m_r - 1/2} ||D^l v_r(., \xi'/\rho, \lambda/\rho)||_{L_2(\mathbb{R}^+)}.$$

Полагая $\rho = |\xi'|$ и $\omega = \xi'/|\xi'|$, получим

$$||D^l v_r(., \xi', \lambda)||_{L_2(\mathbb{R}^+)} = |\xi'|^{l - m_r - 1/2} ||D^l v_r(., \omega, \frac{\lambda}{|\xi'|}||_{L_2(\mathbb{R}^+)}.$$

Теорема будет доказана если для $|\omega| = 1$ имеем

$$||D^l v_r(\omega, \cdot, \lambda)||_{L_2((R)^+)} \leq C \times \tag{25}$$

$$\times \begin{cases} 1, & j \le \mu + \varkappa \quad l \le m_{\mu+\varkappa+1}; \\ \lambda^{m_{\mu+\varkappa+1}-l+1/2}, & j \le \mu + \varkappa \quad l > m_{\mu+\varkappa+1}; \\ \lambda^{m_j - m_{\mu+\varkappa}}, & j > \mu + \varkappa \quad l \le m_{\mu+\varkappa}; \\ \lambda^{m_j-l+1/2}, & j > \mu + \varkappa \quad l > m_{\mu+\varkappa}. \end{cases}$$

для $\lambda > 1$, а левая часть ограничена константой для $\lambda \le 1$. Ограниченность при $\lambda \le 1$ легко следует из условий 1-3. Рассмотрим случай больших λ.

Прежде чем доказывать эту оценку, мы приведем необходимый вспомогательный материал. Обозначим корни уравнения $A_{2\mu}(\omega,\tau) = 0$, лежащие в $\mathbb{C}_+$, через $\tau_1^+(\omega), \dots, \tau_\mu^+(\omega)$. Из компактности сферы $\{\omega, |\omega| = 1\}$ следует, что можно указать контур $\gamma_1 \in \mathbb{C}_+$, находящийся на положительном расстоянии от вещественной оси и охватывающий при $|\omega| = 1$ указанные корни.

Согласно условию 2 и замечанию 2 леммы 1 найдутся такие функции $\sigma_i^l(\omega)$ и полиномы $N_\ell(\omega,\tau)$ ($\ell = 1, \dots, \mu + \varkappa$; $i = 1, \dots, \varkappa$), что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{B_k(\omega,\tau) N_\ell(\omega,\tau)}{A_{2\mu}^+(\omega,\tau)} d\tau + \sum_{i=1}^{\varkappa} C_{ki}(\omega) \sigma_i^l(\omega) = \delta_{k\ell} \quad k, \ell = 1, \dots, \mu + \varkappa. \tag{26}$$

Следуя $[3, 11]$определим полином

$$Q(\tau) := \frac{A^0(0,\tau,1)}{A_{2\mu}^0(0,\tau)} = \sum_{j=0}^{2m-2\mu} q_j \tau^{2m-2\mu-j}, \quad q_j = \frac{A_{2m-j}^0(0,1)}{A_{2\mu}^0(0,1)}.$$

Обозначим через $\tau_{\mu+1}^+, \dots, \tau_m^+$ корни уравнения $Q(\tau) = 0$ с положительными мнимыми частями, и пусть контур $\gamma_2 \in C_+$ охватывает эти корни. Согласно условию 6 и лемме 1 ($\varkappa = 0$)найдутся такие полиномы $N_\ell(\tau)$, $\ell = \mu + \varkappa + 1, \dots, m + \varkappa$, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{B_k(0,\tau) N_\ell(\tau)}{Q^+(\tau)} d\tau = \delta_{k\ell}, \quad k, \ell = \mu + \varkappa + 1, \dots, m + \varkappa. \tag{27}$$

Обозначим через $\tau_1^+(\omega,\lambda), \dots, \tau_m^+(\omega,\lambda)$ корни уравнения

$$A(\omega,\tau,\lambda) = 0, \tag{28}$$

лежащие в $\mathbb{C}_+$. Согласно $[1, 3]$ указанные выше корни разбиваются на группы $S^{1+}(\omega,\lambda)$ и $S^{2+}(\omega,\lambda)$, причем выбранный выше контур $\gamma_1 \in \mathbb{C}_+$ охватывет множества $S^{1+}(\omega,\lambda)$ при всех $|\omega| = 1$ и достаточно больших $\lambda \ge \lambda_0$. Аналогично контур $\gamma_2 \in \mathbb{C}_+$ охватывает множества $\lambda^{-1} S^{2+}(\omega,\lambda)$ при всех $|\omega| = 1$ и достаточно больших $\lambda \ge \lambda_0$. Более того, в теоретико-множественном смысле

$$S^{1+}(\xi',\lambda) \to S_{2\mu}^+(\xi'), \quad \lambda^{-1} S^{2+}(\xi',\lambda) \to S_b^+, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Через $S_{2\mu}^+(\xi')$ и S_b^+ обозначены множества на комплексной плоскости $\mathbb{C}_+$, отвечающие, соответственно, нулям уравнения $A_{2\mu}(\omega,\tau) = 0$ и уравнения $Q(\tau) = 0$ с положительными мнимыми частями.

В соответствие с разбиением корней мы факторизуем символ $A(\omega,\tau,\lambda)$ (см. [9, предложение 1 из п.III.1.3.]):

$$A(\omega,\tau,\lambda)=A^{1+}(\omega,\tau,\lambda)A^{2+}(\omega,\tau,\lambda)A^{-}(\omega,\tau,\lambda).$$

Согласно условию 5 и лемме 1 задача на полупрямой

$$\begin{gathered} A(\omega,D_t,\lambda)v(t)=0 \quad t>0,\\ B_j(\omega,D_t,\lambda)v(0)+\sum_k^{\varkappa}C_{jk}(\omega)\sigma_k(\omega)=g_j \quad j=1,\dots,\mu+\varkappa,\\ v(t)\in\mathfrak{M}_{\gamma_1}. \end{gathered}$$

однозначно разрешима при достаточно малых $\lambda\geq\lambda_0$. Более того, найдутся такие полиномы $N_\ell(\omega,\tau,\lambda)$ и функции $\sigma_i^l(\omega)$ ($\ell=1,\dots,\mu+\varkappa$; $i=1,\dots,\varkappa$), что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{B_k(\omega,\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A^{1+}(\omega,\tau,\lambda)}d\tau+\sum_{i=1}^{\varkappa}C_{ki}(\omega)\sigma_i^l(\omega)=\delta_{k\ell},\quad k,\ell=1,\dots,\mu+\varkappa. \tag{29}$$

Полезно отметить, что

$$N_\ell(\omega,\tau,\lambda)\to N_\ell(\omega,\tau).\quad \lambda\to\infty,$$

и равенства (29) при $\lambda\to\infty$ переходят в равенства (26).

Согласно условию 6 и лемме 1 задача на полупрямой

$$\begin{gathered} A\left(\tfrac{\omega}{\lambda},D_t,1\right)v(t)=0,\quad t>0,\\ B_j\left(\tfrac{\omega}{\lambda},D_t\right)v(0)=g_j,\quad j=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa,\\ v(t)\in\mathfrak{M}_{\gamma_2} \end{gathered}$$

однозначно разрешима при достаточно больших $\lambda\geq\lambda_0$. Более того, найдутся такие полиномы $N_\ell(\omega,\tau,\lambda)$, $\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa$, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(\frac{\omega}{\lambda},\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A^{2+}(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1)}d\tau=\delta_{k\ell},\quad k,\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa. \tag{30}$$

Полезно отметить, что

$$N_\ell(\omega,\tau,\lambda)\to N_\ell(\tau),\quad \lambda\to\infty,\quad \ell>\mu+\varkappa,$$

и равенства (30) при $\lambda\to\infty$ переходят в равенства (27).

Заметим, что

$$A^2(\omega,\lambda\tau,\lambda)=A^2(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1),\quad B_j(\omega,\lambda\tau)=\lambda^{m_j}B_j(\frac{\omega}{\lambda},\tau).$$

В силу этих соотношений равенства (30) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(\omega,\lambda\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A_2^{+}(\omega,\lambda\tau,\lambda)}d\tau=\lambda^{m_k}\delta_{k\ell},\quad k,\ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa. \tag{31}$$

Вернемся к доказательству оценки (25). Поскольку все корни уравнения (28) с положительными мнимыми частями при $|\omega| = 1$ охватываются контурами γ_1 и $\lambda\gamma_2$, то пространство функций на полупрямой, удовлетворяющих однородному уравнению в (13) является прямой суммой подпространств $\mathfrak{M}_{\gamma_1}$ и $\mathfrak{M}_{\lambda\gamma_2}$. Имеет место

Лемма 2. *Решение* $v_r(\omega, t, \lambda)$ *задачи* (13)-(14) *может быть представлено в виде*

$$v_r(t,\omega,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{M_j^{(1)}(\omega,\tau,\lambda)}{A^{1+}(\omega,\tau,\lambda)} e^{it\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{M_j^{(2)}(\omega,\tau,\lambda)}{A^{2+}(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1)} e^{it\lambda\tau d\tau} \qquad (32)$$

где для функций $M_r^{(1)}$ *и* $M_r^{(2)}$ *выполнены оценки*

$$|M_r^{(1)}(\tau,\omega,\lambda)| \le \begin{cases} C\,, & r \le \mu + \varkappa\,, \\ C\,\lambda^{m_{\mu+\varkappa} - m_r}\,, & r > \mu + \varkappa\,, \end{cases} \qquad (33)$$

$$|M_r^{(2)}(\tau,\omega,\lambda)| \le \begin{cases} C\,\lambda^{-m_{\mu+\varkappa+1}}\,, & r \le \mu + \varkappa\,, \\ C\,\lambda^{-m_r}\,, & r > \mu + \varkappa\,. \end{cases} \qquad (34)$$

Из этих оценок и представления (32) следует, что

$$\|(D_t^l v_j)(\cdot,\omega,\lambda)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \begin{cases} O(1) + O(\lambda^{l - m_{\mu+\varkappa+1} - \frac{1}{2}})\,, & j \le \mu + \varkappa\,, \\ O(\lambda^{m_{\mu+\varkappa} - m_j}) + O(\lambda^{l - m_j - \frac{1}{2}})\,, & j > \mu + \varkappa\,. \end{cases} \qquad (35)$$

Неравенства (25) и соответственно основная теорема непосредственно следуют из этих оценок.

Доказательство. Мы воспользуемся методом предложенным в работах Л.Р.Волевича. Пусть функции $w(t,\omega,\lambda), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$ являются решением задачи (13), в которой δ_{jk} заменены на $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_{m+\varkappa}) \in \mathbb{C}^{m+\varkappa}$. Решение ищется в виде

$$\begin{aligned} w(t,\omega,\lambda) = \textstyle\sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi_\ell(\omega,\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{N_\ell(\tau,\omega,\lambda)}{A^{1+}(\tau,\omega,\lambda)} e^{it\tau} d\tau + \\ + \textstyle\sum_{\ell=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi_\ell(\omega,\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{N_\ell(\tau,\omega,\lambda)}{A^{2+}(\tau,\frac{\omega}{\lambda},1)} e^{it\lambda\tau} d\tau, \end{aligned} \qquad (36)$$

$$\sigma_k = \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi_\ell(\omega,\lambda)\sigma_k^\ell\,, \quad k = 1, \ldots, \varkappa \qquad (37)$$

с подлежащими определению функциями ψ_ℓ.

Функции $N_\ell(\tau,\omega,\lambda)$ и $\sigma_1^\ell, \ldots, \sigma_\varkappa^\ell$ при $\ell = 1, \ldots, \mu+\varkappa$ удовлетворяют соотношениям (29), а при $\ell = \mu+\varkappa+1, \ldots, m+\varkappa$ функции $N_\ell(\tau,\omega,\lambda)$ – соотношениям (30). Применяя к обеим частям (36) граничный оператор $B_k(\omega, D_t)$ и полагая $t = 0$, также учитывая (37) мы получим систему линейных уравнений для неизвестных функций $\psi_k(\omega,\lambda)$:

$$\begin{aligned} \psi_k(\omega,\lambda) + \lambda^{m_k} \sum_{\ell=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} h_{k\ell}(\omega,\lambda)\psi_\ell(\omega,\lambda) &= \phi_k\,, \quad (k = 1, \ldots, \mu+\varkappa)\,; \\ \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} h_{k\ell}(\omega,\lambda)\psi_\ell(\omega,\lambda) + \lambda^{m_k}\psi_k(\omega,\lambda) &= \phi_k\,, \quad (k = \mu+\varkappa+1, \ldots, m+\varkappa)\,. \end{aligned}$$

Здесь мы положили

$$h_{k\ell}(\omega,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{B_k(\frac{\omega}{\lambda},\tau)N_\ell(\omega,\tau,\lambda)}{A^{2+}(\frac{\omega}{\lambda},\tau,1)}\,d\tau,$$

$$(k=1,\dots,\mu+\varkappa;\ \ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa);$$

$$h_{k\ell}(\omega,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{B_k(\omega,\tau)N_\ell(\tau,\omega,\lambda)}{A^{1+}(\tau,\omega,\lambda)}\,d\tau+\sum_{i=1}^{\varkappa}C_{ki}(\omega)\sigma_i^\ell\,,$$

$$(k=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa;\ \ell=1,\dots,\mu+\varkappa)\,.$$

Теперь мы запишем $\psi=(\psi',\psi'')$, где ψ' состоит из первых $\mu+\varkappa$ компонент вектора ψ, а ψ'' состоит из остальных $m-\mu$ компонент. Аналогично $\phi=(\phi',\phi'')$. Этих обозначениях наша система может быть переписана в виде

$$\begin{array}{rcrcl}\psi' & + & \Delta_1H_{12}\psi'' & = & \phi'\,,\\ H_{21}\psi' & + & \Delta_2\psi'' & = & \phi''\,,\end{array}$$

где мы использовали обозначения

$$\Delta_1:=\begin{pmatrix}\lambda^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{m_{\mu+\varkappa}}\end{pmatrix},\quad \Delta_2:=\begin{pmatrix}\lambda^{m_{\mu+\varkappa+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{m_{m+\varkappa}}\end{pmatrix}$$

и

$$H_{12}:=\Big(h_{k\ell}\Big)_{\substack{k=1,\dots,\mu+\varkappa\\ \ell=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa}}\,,\quad H_{21}:=\Big(h_{k\ell}\Big)_{\substack{k=\mu+\varkappa+1,\dots,m+\varkappa\\ \ell=1,\dots,\mu+\varkappa}}\,.$$

Если мы слева умножим второе уравнение на матрицу $\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}$ и вычтем полученное равенство из первого уравнения, то получим

$$(I-\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}H_{21})\psi'=\phi'-\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}\phi''\,.$$

Аналогично мы получим

$$(I-\Delta_2^{-1}H_{21}\Delta_1H_{12})\psi''=-\Delta_2^{-1}H_{21}\phi'+\Delta_2^{-1}\phi''\,.$$

В левых частях написанных выше равенств в скобках стоят матрицы, отличающиеся от единичной на матрицу, элементы которой не превосходят $\lambda^{m_{\mu+\varkappa}-m_{\mu+\varkappa+1}}$. Согласно (3) $m_{\mu+\varkappa+1}-m_{\mu+\varkappa}>0$. Отсюда вытекает, что эти матрицы при достаточно больших $|\lambda|$ имеют обратные, которые мы обозначим через G_1 м G_2, соответственно. Тогда мы получим

$$\begin{array}{rcrcl}\psi' & = & G_1\phi' & - & G_1\Delta_1H_{12}\Delta_2^{-1}\phi''\,,\\ \psi'' & = & -G_2\Delta_2^{-1}H_{21}\phi' & + & G_2\Delta_2^{-1}\phi''\,.\end{array}$$

Если мы возьмем $\phi=e_j\quad(1\le j\le\mu+\varkappa)$, где через e_j обозначен j-й единичный вектор, то получим

$$\psi'_{(j)}=G_1e_j,\quad \psi''_{(j)}=-G_2\Delta_2^{-1}H_{21}e_j,\quad j=1,\dots,\mu+\varkappa.$$

Аналогично для $j > \mu + \varkappa$ получим

$$\psi'_{(j)} = -G_1 \Delta_1 H_{12} \lambda^{-m_j} e_j, \quad \psi''_{(j)} = G_2 \lambda^{-m_j} e_j, \quad j > \mu + \varkappa.$$

Вернемся к представлению (32). Обозначим через $\psi'_{\ell(j)}$ $(\ell = 1, \dots, \mu + \varkappa)$ – компоненты вектора $\psi'_{(j)}$, а через $\psi''_{\ell(j)}$ $(\ell = \mu + \varkappa + 1, \dots, m + \varkappa)$ – компоненты вектора $\psi''_{(j)}$. Тогда

$$M_j^{(1)} = \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi'_{\ell(j)} N_\ell, \quad M_j^{(2)} = \sum_{\ell=\mu+\varkappa+1}^{m+\varkappa} \psi''_{\ell(j)} N_\ell, \quad \sigma_k^j = \sum_{\ell=1}^{\mu+\varkappa} \psi'_{\ell(j)} \sigma_k^\ell, \quad k = 1, \dots, \varkappa.$$

Из написанных выше формул для $\psi'_{(j)}$ и $\psi''_{(j)}$ следует, что при $j \le \mu + \varkappa$

$$\psi'_{\ell(j)} = O(1), \quad \psi''_{\ell(j)} = O(\lambda^{-m_{\mu+\varkappa+1}}),$$

а при $j > \mu + \varkappa$

$$\psi'_{\ell(j)} = O(\lambda^{m_{\mu+\varkappa} - m_j}), \quad \psi''_{\ell(j)} = O(\lambda^{-m_j}).$$

Таким образом, мы приходим к оценкам (33), (34). Лемма доказана.

1. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R. Boundary Value Problems for a Class of Elliptic Operator Pencils// Integ. Eq. Operator Th. 2000. V. 8, P. 410-436.*
2. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R. On Elliptic Operator Pencils with General Boundary Conditions// Integ. Eq. Operator Th. 2001. V. 9, P. 25-40.*
3. *Волевич Л. Р. Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром // Труды московского математического общества, т. 67, —2006. — С. 104—147.*
4. *Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119-147.*
5. *Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. — 1964. — **19**, № 3. — С. 43 — 161.*
6. *Демиденко Г.В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск. Научная книга. 1998, с. 436*
7. *Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. —Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1999. —x+276 p.*
8. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997.*
9. *Гиндикин С. Г., Волевич Л. Р. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. — Москва: УРСС, 1999. — 272 с.*
10. *Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. —Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1996. —xii+415 p.*
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук, — **12** , — 1957. — Вып. 5. — С. 3 — 122.*
12. *Заворотинський А. В. Еліптичні з малим параметром граничні задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Формальний асимптотичний розв'язок . // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (серія "Математика") — 2011. — Т1., №1-2. — С. 40 — 46.*
13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях I. — Москва: ИЛ, 1962. — 208 с.*

Одержано 28.10.2012