УДК 517.97

О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева (Одесский нац. ун-т)

УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

In this paper we consider discrete equations with delay , as a modeling tool for real processes that most closely reflects the behavior of system, which is influenced by the background. Method of investigation, the averaging method for systems of discrete equations with dependence on a small parameter. We prove theorems on averaging of systems with periodic and nonperiodic functions of discrete equations. The examples of the use of the averaging method and are estimates of the solutions of the original and averaged systems.

У роботі розглядаються системи дискретних рівнянь із запізненням, як інструмент моделювання реальних процесів, які точніше відображають поведінку систем, на які впливає передісторія. Методом дослідження є метод усереднення рівнянь, які містять залежність від малого параметру. Проводиться доведення теорем про усереднення систем з періодичними та неперіодичними правими частинами дискретних рівнянь. Розглядаються приклади застосування методу усереднення та наводяться оцінки близькості розв'язків заданих та усереднених систем.

В работе рассматриваются системы дискретных уравнений с запаздыванием, как инструмент моделирования реальных процессов, которые наиболее точно отображают поведение систем, на которые влияет предыстория. Методом исследования выбран метод усреднения уравнений, содержащих малый параметр. Доказываются теоремы об усреднении систем с периодическими и непериодическими правыми частями уравнений. Рассматриваются примеры применения метода усреднения и приводятся оценки близости решений исходных и усредненных систем.

Введение. В настоящее время в теории дискретных уравнений сформировалось направление – дискретные уравнения с запаздыванием. Уравнения этого типа, по сути, являются дискретными уравнениями более высокого порядка или сравнительно легко сводятся к последним. Однако такое сведение в большинстве случаев не упрощает поставленную проблему. Величина запаздывания является существенным фактором, влияющим на поведение решения дискретного уравнения и на его устойчивость. Поэтому для дискретных уравнений с запаздыванием целесообразно развивать специальные методы исследования.

В работе рассматриваются дискретные уравнения с запаздыванием, содержащие малый параметр. Для построения решений применяется метод усреднения, формулируются и доказываются теоремы, гарантирующие близость решений заданной и усредненной систем в периодическом и непериодическом случаях на асимптотически большом промежутке времени.

1. Постановка задачи. Пусть движение объекта описывается системой дискретных уравнений с запаздыванием:

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f\left(i, x_i, x_{i-1}\right), \qquad (1)$$
$$x_{-1} = x^1, \quad x_0 = x^0,$$

где $x_i \in D \subset R^n$ – фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)$ – заданная вектор-функция, $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E\left(s\right)$ – целая часть числа s, заданные значения x^0, x^1 определяют начальное и предшествующее состояние, характеризующее влияние запаздывания на текущее состояние системы.

2. Лемма замораживания для систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием. Рассмотрим вспомогательную систему дискретных уравнений с запаздыванием, равным нулю,

$$z_{i+1} = z_i + \varepsilon \cdot f\left(i, z_i, z_i\right), \quad z_0 = x^0 \tag{2}$$

и докажем лемму "замораживания".

Лемма 1. *Пусть в области $Q = \{\, i \in I;\ \ x,\, y \in D \,\}$ выполнены условия:*

1) функция $f\left(i, x, y\right)$ ограничена константой M и удовлетворяет условию Липшица по x, y с постоянной λ;

2) решение $z = z_i$, $\ i \in I$ системы (2) при $z_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.

Тогда существуют такие $C > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и для любого $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$ справедлива оценка:

$$\|x_i - z_i\| \leq C\varepsilon,$$

где x_i и z_i – решения систем уравнений (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Представим уравнения (1) и (2) в виде

$$x_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f\left(j, x_j, x_{j-1}\right), \qquad z_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f\left(j, z_j, z_j\right)$$

и оценим их разность с учетом выполнения условия 1) леммы:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{i} \|f\left(j, x_j, x_{j-1}\right) - f\left(j, z_j, z_j\right)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \left[\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - z_j\|\right] \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \left[\|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - x_j\| + \|x_j - z_j\|\right] = \varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \left[\, 2 \cdot \|x_j - z_j\| + \|x_{j-1} - x_j\|\right].$$

Последнее слагаемое под знаком суммы можно оценить, если представить систему (1) в виде

$$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \varepsilon \cdot \|f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)\| \leq \varepsilon M$$

при $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$. Тогда

$$\varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \|x_{j-1} - x_j\| \leq \varepsilon\lambda \cdot \left(\|x_{-1} - x_0\| + \sum_{j=0}^{i-1} \|x_{j+1} - x_j\| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \cdot \left(\left\|x^1 - x^0\right\| + \varepsilon M N \right) = \varepsilon\lambda \cdot \left(\Delta + ML\right),$$

где $\Delta = \|x^1 - x^0\|$. Следовательно,

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq 2\varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{i} \|x_j - z_j\| + \varepsilon\lambda \left(\Delta + ML\right).$$

Применив дискретный аналог леммы Гронуолла-Беллмана, получим:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML)\cdot e^{2\lambda L}.$$

Так как разность $\|x_{i+1} - z_{i+1}\|$ должна быть не больше ρ, то найдется такое ε_1, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_1$ выполняется:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML)\cdot e^{2\lambda L} \le \rho,$$

то есть справедливо утверждение леммы, где

$$C = \lambda\,(\Delta + ML)\cdot e^{2\lambda L}, \qquad \varepsilon_1 \le \frac{\rho}{\lambda\,(\Delta + ML)}\cdot e^{-2\lambda L}.$$

Лемма доказана.

3. Усреднение систем дискретных уравнений с периодическими правыми частями. Пусть в системе (1) функция $f\,(i, x_i, x_{i-1})$, является функцией периодической по i с периодом p, то есть для любого $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$ справедливо равенство

$$f\,(\ i + p,\ x_i, x_{i-1}\ ) = f\,(\ i,\ x_i, x_{i-1}\,)\,.$$

Множество $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ..., N\ \}$ разобьем на отрезки длиной p точками деления $kp,\ \ k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, выбор значений k определим из условия $kp \le \frac{L}{\varepsilon}$, поэтому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ системе (1) поставим в соответствие усредненную систему вида:

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon p\cdot f_0\,(w_k)\ , \qquad w_0 = x^0, \tag{3}$$

$$y_i = w_k + \frac{(i - kp)\,(w_{k+1} - w_k)}{p}, \quad i \in [kp,\ (k+1)\,p)\,, \tag{4}$$

где

$$f_0\,(w) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} f\,(\ j,\ w,\ w). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{\ i \in I;\ \ x, y \in D\ \}$ выполняются условия 1)-2) леммы и, кроме того:*

1) функция $f\,(i, x, y)$ является p-периодической по i;

2) решение $w = w_k,\quad k \in I_k$ системы (3) при $w_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе с ρ-окрестностью принадлежит области D.

Тогда для любого $L > 0$ существуют такие $C > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и для любого $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\,(L\varepsilon^{-1})$ справедливо:

$$\|x_i - y_i\| \le C\varepsilon, \tag{6}$$

где x_i – решение системы (1), y_i – решение системы (3), (4), $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Доказательство. Оценим разность $\|x_i - y_i\|$, где x_i – решение системы (1), y_i – решение системы (3), (4), $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Из неравенства треугольника следует

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \le \|x_{i+1} - z_{i+1}\| + \|z_{i+1} - y_{i+1}\|\,, \tag{7}$$

где z_i – решение замороженной системы (2), $z_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства отдельно. По лемме существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $\varepsilon \le \varepsilon_1$ справедливо:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML)\cdot e^{2\lambda L}. \tag{8}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (7) и для любого $k \in I_k$ и $i \in [kp,\ (k+1)\,p)$ получим

$$\|z_{i+1} - y_{i+1}\| \le \|z_{i+1} - z_{kp}\| + \|z_{kp} - y_{kp}\| + \|y_{kp} - y_{i+1}\|\,. \tag{9}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (9). Для этого систему (2) представим в виде

$$z_{i+1} = z_{kp} + \varepsilon\sum_{j=kp}^{i} f\,(j, z_j, z_j),$$

тогда

$$\|z_{i+1} - z_{kp}\| \le \varepsilon\sum_{j=kp}^{i}\|f\,(j, z_j, z_j)\| \le \varepsilon p\cdot M. \tag{10}$$

Оценим третье слагаемое в правой части неравенства (9). Для этого из соотношений (3), (4) при любом $k \in I_k$ получим следующие равенства для $i \in [kp,\ (k+1)\,p)$: $y_{kp} = w_k$; $y_{kp+1} = y_{kp} + \varepsilon\cdot f_0\,(y_{kp})$; $y_{kp+2} = y_{kp} + 2\varepsilon\cdot f_0\,(y_{kp})$; $\ldots\, y_{i+1} = y_{kp} + (i+1-kp)\cdot\varepsilon\cdot f_0\,(y_{kp})$; или $y_{i+1} = y_{kp} + \varepsilon\cdot\sum\limits_{j=kp}^{i} f_0\,(y_{kp})$, откуда

$$\|y_{i+1} - y_{kp}\| \le \varepsilon\cdot\sum_{j=kp}^{i}\|f_0\,(y_{kp})\|.$$

Учитывая соотношение (5), дополнительно получим

$$\|y_{i+1} - y_{kp}\| \le \varepsilon p\cdot M. \tag{11}$$

В правой части неравенства (9) осталось оценить второе слагаемое $|z_{kp} - y_{kp}|$ на промежутке $[kp,\ (k+1)\cdot p]$ для любого $k \in I_k$. Для этого соответствующие системы представим в виде

$$z_{(k+1)p} = z_{kp} + \varepsilon\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f\,(j, z_j, z_j), \qquad y_{(k+1)p} = y_{kp} + \varepsilon\cdot\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f_0\,(y_{kp}).$$

Далее получим

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \le \|z_{kp} - y_{kp}\| + \varepsilon\left\|\sum_{j=kp}^{(k+1)p-1}\left(f\,(j, z_j, z_j) - f_0\,(y_{kp})\right)\right\| \le$$

$$\leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f(j, z_j, z_j) - f(j, y_{kp}, y_{kp})\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} f(j, y_{kp}, y_{kp}) - p \cdot f_0(y_{kp}) \right\|.$$

В полученном неравенстве третье слагаемое в силу соотношения (5) обращается в ноль, поэтому при выполнении условий теоремы, имеем

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \leq \|z_{kp} - y_{kp}\| +$$

$$+\varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f(j, z_j, z_j) - f(j, z_{kp}, z_{kp})\| + \varepsilon \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \|f(j, z_{kp}, z_{kp}) - f(j, y_{kp}, y_{kp})\| \leq$$

$$\leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + \varepsilon\lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2\|z_j - z_{kp}\| + \varepsilon\lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} 2\|z_{kp} - y_{kp}\| \leq$$

$$\leq \|z_{kp} - y_{kp}\| + 2\varepsilon\lambda \sum_{j=kp}^{(k+1)p-1} \varepsilon p \cdot M + 2\varepsilon\lambda p \cdot \|z_{kp} - y_{kp}\| \leq$$

$$\leq 2(\varepsilon p)^2 \lambda M + (1 + 2\varepsilon p\lambda) \cdot \|z_{kp} - y_{kp}\|.$$

Итак, получили неравенство

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \leq (1 + 2\varepsilon p\lambda) \cdot \|z_{kp} - y_{kp}\| + 2(\varepsilon p)^2 \lambda M. \tag{12}$$

Из неравенства (12) получим оценку для $\|z_{kp} - y_{kp}\|$, для этого введем обозначения $\beta_k = \|z_{kp} - y_{kp}\|$, $a = (1 + 2\varepsilon p\lambda)$, $b = 2(\varepsilon p)^2 \lambda M$ и запишем неравенство (12) в виде

$$\beta_{k+1} \leq a \cdot \beta_k + b. \tag{13}$$

Преобразуем неравенство, учитывая, что оно является рекуррентным

$$\beta_{k+1} \leq a \cdot \beta_k + b \leq a \cdot (a \cdot \beta_{k-1} + b) + b \leq a^2 \cdot \beta_{k-1} + ab + b \leq$$

$$\leq a^2 \cdot (a \cdot \beta_{k-2} + b) + ab + b \leq a^3 \cdot \beta_{k-2} + a^2 b + ab + b \leq ... \leq$$

$$\leq a^{k+1}\beta_0 + a^k b + ... + a^2 b + ab + b = a^{k+1}\beta_0 + b \cdot \left(a^k + ... + a^2 + a + 1\right).$$

Здесь $\beta_0 = \|z_0 - y_0\| = 0$ в силу равных начальных условий $z_0 = y_0 = x^0$ для решений системы (2) и (3), (4) соответственно, а сумма в скобках представляет собой сумму k слагаемых геометрической прогрессии. Окончательно, из неравенства (13) получим

$$\beta_{k+1} \leq b \cdot \frac{a^k - 1}{a - 1}. \tag{14}$$

Вернемся к исходным переменным и применим к неравенству (12) полученную оценку (14)

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \leq 2(\varepsilon p)^2 \lambda M \cdot \frac{(1 + 2\varepsilon p\lambda)^k - 1}{1 + 2\varepsilon p\lambda - 1} =$$

$$= 2\left(\varepsilon p\right)^2 \lambda M \cdot \frac{\left(1+2\varepsilon p\lambda\right)^k - 1}{2\varepsilon p\lambda} = \varepsilon pM \cdot \left(\left(1+2\varepsilon p\lambda\right)^k - 1\right).$$

Учитывая, что $(1+\alpha)^k = \left((1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{\alpha k} \sim e^{\alpha k}$ при $\alpha \to 0$, можно найти такое $\varepsilon_2 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ будут эквивалентны выражения $(1+2\varepsilon p\lambda)^k \sim e^{2\varepsilon p\lambda k}$, окончательно получим оценку

$$\left\|z_{(k+1)p} - y_{(k+1)p}\right\| \leq \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\varepsilon p\lambda k} - 1\right) \leq \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} - 1\right) \tag{15}$$

С учетом полученных оценок (10), (11), (15) неравенство (9) примет вид

$$\left\|z_{i+1} - y_{i+1}\right\| \leq 2\varepsilon p \cdot M + \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} - 1\right) \leq \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right). \tag{16}$$

По условию теоремы должно выполняться неравенство $\|z_{i+1} - y_{i+1}\| < \rho$, тогда найдется такое ε_3, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$ выполняется:

$$\left\|z_{i+1} - y_{i+1}\right\| \leq \varepsilon p \cdot M \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right) < \rho.$$

С учетом оценок (8), (16) неравенство (7) принимает вид:

$$\left\|x_{i+1} - y_{i+1}\right\| \leq \varepsilon\lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L} + \varepsilon pM \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right) = \varepsilon C.$$

Выберем в качестве $\varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right\}$.

Таким образом, справедливо утверждение теоремы (6), где

$$C = \lambda\left(\Delta + ML\right) \cdot e^{2\lambda L} + pM \cdot \left(e^{2\lambda L} + 1\right). \tag{17}$$

Теорема доказана.

4. Усреднение систем дискретных уравнений с непериодическими правыми частями. Пусть в системе (1) функция $f\left(i, x_i, x_{i-1}\right)$ не является периодической. Выберем целочисленное значение $h\left(\varepsilon\right)$, обладающее свойствами

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h\ \left(\varepsilon\right) = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon \cdot h\ \left(\varepsilon\right) = 0. \tag{18}$$

Множество $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ..., N\ \}$ разобьем на отрезки длиной $h\left(\varepsilon\right)$ точками деления $k \cdot h\left(\varepsilon\right),\quad k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, выбор значений k определим из условия $kh \leq \frac{L}{\varepsilon}$, поэтому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ системе (1) поставим в соответствие усредненную систему вида:

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon h \cdot \overline{f}\left(w_k\right)\ , \qquad w_0 = x^0, \tag{19}$$

$$y_i = w_k + \frac{\left(i - kh\right)\left(w_{k+1} - w_k\right)}{h}, \quad i \in \left[kh,\ \left(k+1\right)h\right), \tag{20}$$

где

$$\overline{f}\left(w\right) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(\ j,\ w,\ w\right), \tag{21}$$

Сходимость в (21) означает, что найдется монотонно убывающая функция $s\left(h\right)$ такая, что $\lim\limits_{h\to\infty} s\left(h\right) = 0$, и будет справедливо неравенство

$$\left\|\overline{f}\left(w\right) - \frac{1}{h}\sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(\ j,\ w,\ w\right)\right\| \leq s\left(h\right). \tag{22}$$

Теорема 2. *Пусть в области* $Q = \{\ i \in I;\ \ x,\, y \in D\ \}$ *выполняются условия 1)-2) леммы и, кроме того:*

1) равномерно относительно $w \in D$ *и* q *существует предел (21);*

2) решение $w = w_k, \quad k \in I_k$ *системы (19) при* $w_0 = x^0 \in D' \subset D$ *вместе с* ρ*-окрестностью принадлежит области* D.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0\,(\ \eta,\ L\ ) > 0$*, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и для любого* $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\,(L\varepsilon^{-1})$ *справедливо:*

$$\|x_i - y_i\| \leq \eta, \tag{23}$$

где x_i *– решение системы (1),* y_i *– решение системы (19), (20),* $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Доказательство. Оценим разность $\|x_i - y_i\|$, где x_i – решение системы (1), y_i – решение системы (19), (20), $x_{-1} = x^1$, $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Из неравенства треугольника следует

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \|x_{i+1} - z_{i+1}\| + \|z_{i+1} - y_{i+1}\|\,, \tag{24}$$

где z_i – решение замороженной системы (2), $z_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$.

По лемме существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ справедливо:

$$\|x_{i+1} - z_{i+1}\| \leq \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML) \cdot e^{2\lambda L}. \tag{25}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части неравенства (24) для любого $k \in I_k$ и $i \in [kh,\ (k+1)\,h)$ получим

$$\|z_{i+1} - y_{i+1}\| \leq \|z_{i+1} - z_{kh}\| + \|z_{kh} - y_{kh}\| + \|y_{kh} - y_{i+1}\|\,. \tag{26}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (26).

$$\|z_{i+1} - z_{kh}\| \leq \varepsilon \sum_{j=kh}^{i} \|f\,(j, z_j, z_j)\| \leq \varepsilon h \cdot M. \tag{27}$$

Оценим третье слагаемое в правой части неравенства (26). Ранее было получено, что при любом $k \in I_k$ для $i \in [kh,\ (k+1)\,h)$:

$$\|y_{i+1} - y_{kh}\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=kh}^{i} \left\|\overline{f}\,(y_{kh})\right\| \leq \varepsilon h \cdot M. \tag{28}$$

В правой части неравенства (26) оценим второе слагаемое $\|z_{kp} - y_{kp}\|$ на промежутке $[kh,\ (k+1) \cdot h]$ для любого $k \in I_k$. Для этого соответствующие системы представим в виде

$$z_{(k+1)h} = z_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f\,(j, z_j, z_j), \qquad y_{(k+1)h} = y_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \overline{f}\,(y_{kh}).$$

Далее получим

$$\left\|z_{(k+1)h} - y_{(k+1)h}\right\| \leq \|z_{kh} - y_{kh}\| + \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(f\,(j, z_j, z_j) - \overline{f}\,(y_{kh})\right) \right\| \leq$$

$$\leq \|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|f(j,z_j,z_j)-f(j,y_{kh},y_{kh})\|+$$
$$+\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}f(j,y_{kh},y_{kh})-h\cdot\overline{f}(y_{kh})\right\|.$$

При выполнении условий теоремы и в силу соотношения (22) имеем

$$\left\|z_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|f(j,z_j,z_j)-f(j,z_{kh},z_{kh})\|+$$
$$+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|f(j,z_{kh},z_{kh})-f(j,y_{kh},y_{kh})\|+\varepsilon h\cdot s(h)\leq$$
$$\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}2\|z_j-z_{kh}\|+\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}2\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon h\cdot s(h)\leq$$
$$\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+2\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|z_j-z_{kh}\|+2\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon hs(h)\leq$$
$$\leq\|z_{kh}-y_{kh}\|+2\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\varepsilon h\cdot M+2\varepsilon\lambda h\cdot\|z_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon hs(h)\leq$$
$$\leq 2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h)+(1+2\varepsilon h\lambda)\cdot\|z_{kh}-y_{kh}\|.$$

Итак, получили неравенство

$$\left\|z_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leq(1+2\varepsilon h\lambda)\cdot\|z_{kh}-y_{kh}\|+2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h). \tag{29}$$

Получили неравенство вида (13), где введены обозначения $\beta_k=\|z_{kh}-y_{kh}\|$, $a=(1+2\varepsilon h\lambda)$, $b=2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h)$, для которого справедливо соотношение (14). Для неравенства (29) получим

$$\begin{gathered}\left\|z_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leq\left(2(\varepsilon h)^2\lambda M+\varepsilon hs(h)\right)\cdot\tfrac{(1+2\varepsilon h\lambda)^k-1}{1+2\varepsilon h\lambda-1}=\\ =\varepsilon h(2\varepsilon h\lambda M+s(h))\cdot\tfrac{(1+2\varepsilon h\lambda)^k-1}{2\varepsilon h\lambda}=\\ =\left(\varepsilon hM+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\right)\cdot\left((1+2\varepsilon h\lambda)^k-1\right)\leq\left(\varepsilon hM+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\right)\cdot\left(e^{2\lambda L}-1\right).\end{gathered} \tag{30}$$

С учетом полученных оценок (27), (28), (30) неравенство (26) примет вид

$$\begin{gathered}\|z_{i+1}-y_{i+1}\|\leq 2\varepsilon h\cdot M+\left(\varepsilon hM+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\right)\cdot\left(e^{2\lambda L}-1\right)\leq\\ \leq\varepsilon h\cdot M\cdot\left(e^{2\lambda L}+1\right)+\tfrac{s(h)}{2\lambda}\left(e^{2\lambda L}-1\right).\end{gathered} \tag{31}$$

По условию теоремы должно выполняться неравенство $\|z_{i+1}-y_{i+1}\|<\rho$, тогда в силу (18) и свойств функции $s(h)$ найдется такое ε_2, что для всех $0<\varepsilon\leq\varepsilon_2$ выполняется:

$$\|z_{i+1}-y_{i+1}\|\leq\varepsilon h\cdot M\cdot\left(e^{2\lambda L}+1\right)+\frac{s(h)}{2\lambda}\left(e^{2\lambda L}-1\right)<\rho.$$

С учетом полученных оценок (25), (31) неравенство (24) принимает вид

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\,(\Delta + ML)\cdot e^{2\lambda L} + \varepsilon h\cdot M\cdot\left(e^{2\lambda L}+1\right) + \frac{s\,(h)}{2\lambda}\left(e^{2\lambda L}-1\right).$$

Выберем в качестве $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, тогда для всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ справедливо утверждение теоремы. Теорема доказана.

5. Практическая реализация метода усреднения дискретных уравнений с запаздыванием. Рассмотрим примеры применения метода усреднения при решении задач, описываемых системами дискретных уравнений с постоянным запаздыванием.

Пример 1. *Пусть движение объекта описывается системой дискретных уравнений с запаздыванием вида*

$$\begin{gathered} x^1_{i+1} = x^1_i + \varepsilon\cdot[(-9\cos^2 6ih + 6\sin 12ih)\cdot x^1_i - \\ -x^1_{i-1} + (12\cos^2 6ih + 4.5\sin 12ih)\cdot x^2_i], \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} x^2_{i+1} = x^2_i + \varepsilon\cdot\left[\left(-12\sin^2 6ih + 4.5\sin 12ih\right)\cdot x^1_i - \right.\\ \left. -\left(9\sin^2 6ih + 6\sin 12ih\right)\cdot x^2_i - x^2_{i-1}\right], \end{gathered} \tag{33}$$

где $x_i = (x^1_i,\ x^2_i) \in D \subset R^2$ – фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\,(L\varepsilon^{-1})$.

Функции, входящие в правые части уравнений системы, являются периодическими с периодом $p = E\left(\frac{\pi}{6h}\right)$ и удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому для нахождения решения системы применим метод усреднения, описанный в пункте 3.

Множество $I = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ ..., N\ \}$ разобьем на отрезки длиной $p = E\left(\frac{\pi}{6h}\right)$ точками деления kp, $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, выбор значений k определим из условия $kp \le \frac{L}{\varepsilon}$, поэтому $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon p}\right) = E\left(\frac{6Lh}{\varepsilon\pi}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ системе (32), (33) поставим в соответствие усредненную систему вида (3), (4):

$$w^1_{k+1} = w^1_k + \varepsilon p\cdot\left[-5,5\cdot w^1_k + 6\cdot w^2_k\right], \tag{34}$$

$$w^2_{k+1} = w^2_k + \varepsilon p\cdot\left[-6\cdot w^1_k - 5,5\cdot w^2_k\right], \tag{35}$$

$$y^1_i = w^1_k + \frac{(i-kp)\left(w^1_{k+1} - w^1_k\right)}{p},\quad y^2_i = w^2_k + \frac{(i-kp)\left(w^2_{k+1} - w^2_k\right)}{p}, \tag{36}$$

$$i \in [kp,\ (k+1)\,p)\,.$$

Численные решения x^1_i, x^2_i исходной системы (32), (33) и y^1_i, y^2_i усредненной системы (34) – (36) позволили получить следующие оценки близости решений.

$\varepsilon = 0.01$ $\max|x^1_i - y^1_i| = 0.0876$, $\max|x^2_i - y^2_i| = 0.0436$, $\|x_i - y_i\| = 0.1031$.

$\varepsilon = 0.005$ $\max|x^1_i - y^1_i| = 0.0387$, $\max|x^2_i - y^2_i| = 0.0202$, $\|x_i - y_i\| = 0.0479$.

$\varepsilon = 0.001$ $\max|x^1_i - y^1_i| = 0.0073$, $\max|x^2_i - y^2_i| = 0.0079$, $\|x_i - y_i\| = 0.0091$.

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что оценка близости решений имеет вид $\|x_i - y_i\| \le C\varepsilon$, что соответствует выводам теоремы 1.

Пример 2. *Пусть движение объекта описывается дискретным уравнением с запаздыванием вида*

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot \left(-x_{i-1} + \frac{x_i}{1+i} \right). \tag{37}$$

Функция в правой части уравнения не является периодической, для нее выполняются условия теоремы 2, значит к уравнению (37) можно применить метод усреднения, описанный в пункте 4.

Выберем целочисленное значение шага $h(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, *обладающее свойствами (18). Множество* $I = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ ...,N \,\}$ *разобьем на отрезки длиной* $h(\varepsilon)$ *точками деления* $k \cdot h(\varepsilon)$, $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$, *выбор значений* k *определим из условия* $kh \leq \frac{L}{\varepsilon}$, *поэтому* $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right)$.

На множестве значений $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N_k\}$ *системе (37) поставим в соответствие усредненное уравнение вида (19) – (21):*

$$w_{k+1} = w_k + \varepsilon h \cdot [-w_k], \quad y_i = w_k + \frac{(i-kh)(w_{k+1}-w_k)}{h}, \tag{38}$$

где $i \in [kh,\ (k+1)h)$.

Численные решения x_i, *исходного уравнения (37) и* y_i *усредненного уравнения (38) позволили получить следующие оценки близости решений*

$\varepsilon = 0.05 \quad \|x_i - y_i\| = 0.2113.$

$\varepsilon = 0.01 \quad \|x_i - y_i\| = 0.0668.$

$\varepsilon = 0.0001 \quad \|x_i - y_i\| = 0.0033.$

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод, что оценка близости решений имеет вид $\|x_i - y_i\| \leq \eta$, *что соответствует выводам теоремы 2.*

Выводы. В работе рассмотрены дискретные уравнения и системы дискретных уравнений с запаздыванием как инструмент моделирования реальных процессов, точнее отображающий поведение системы, на которую влияет предыстория.

Методом исследования является метод усреднения систем дискретных уравнений, содержащих зависимость от малого параметра. Доказаны теоремы об усреднении систем с периодическими и непериодическими правыми частями дискретных уравнений.

Рассмотрены примеры применения метода усреднения и приведены оценки близости решений исходной и усредненной систем.

1. *Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т.* Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления. // Нелинейные колебания. – 2004. – Т.7, № 2. – С. 241 – 254.
2. *Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л.* Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием. // Междун. научная конф. "Дифференциальные уравнения и их применение". – Ужгород, 2012. – С.42–43.

Получено 31.10.2012