УДК 519.17

М. Ф. Семенюта (Кіровоградська льотна академія НАУ)

Циклічні розклади графа K_{19}

In this article considers the tasks of construction and enumeration of cyclic decompositions of graph K_{19} on 9-edges graphs. The lower valuations for the number of nonisomorphic (K_{19}, G)-decompositions are found, when G is the prism and $G = B$ is the periwinkle.

В даній роботі розглядаються задачі побудови і переліку циклічних розкладів графа K_{19} на 9-реберні графи. Знайдено нижню оцінку числа неізоморфних циклічних (K_{19}, G)-розкладів, де G=П - призма, G=В - барвінок.

Вступ. Розклади графів знаходять застосування при побудові ефективних кодів, плануванні експериментів і комунікаційних схем та в багатьох інших задачах [1]. Наприклад, такі практичні задачі [2], як відбір оптимального, у певному розумінні, комбінаторного об'єкта з множини існуючих; побудова та перевірка гіпотез про комбінаторні конструкції; цілеспрямований пошук хімічних сполук, найкращих механічних систем, ефективних кодів і т. ін., пов'язані з конструктивним переліком комбінаторних конфігурацій.

Дослідження розкладів повних графів на графи малих порядків розпочалося в середині минулого сторіччя з робіт А. Котціга, А. Роса та продовжуються до теперішнього часу. Найбільшого успіху досягнуто, якщо в якості компонент розкладу виступають цикли, зірки, колеса, дерева. В статті розглянуто задачі побудови і переліку циклічних розкладів графа K_{19} на 9-реберні графи. За мету поставлено знайти нижню оцінку числа неізоморфних розкладів K_{19} на графи, ізоморфні 9-реберному графу G та їх списки для випадків, коли G=П - трикутна призма і $G = B$ - барвінок.

Постановка проблеми та попередні відомості. Будемо розглядати скінченні неорієнтовані графи. Під (H, Q)-розкладом графа H на графи із сукупності $Q = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ розуміємо розбиття множини ребер графа H на такі підмножини, що породжені ними підграфи (компоненти розкладу) попарно пореберно не перетинаються і кожний з них ізоморфний одному з елементів множини Q. Загальна кількість компонент у розкладі - це розмір (або ранг) розкладу.

У 70-х роках минулого століття розпочалося вивчення розкладів графів на підграфи із заданої множини. Серед основних дослідників можна назвати Н.деБрьойна, П.Ердьоша, Л.Байнеке, Д.Босака, А.Роса, С.Знама, Р.Вільсона [3], [4] та багатьох інших. В теорії розкладів виділяють три види задач: 1) визначення умов існування, 2) знаходження способів побудови 3) розробка методів переліку розкладів. Перші результати пов'язані із знаходженням умов існування розкладів та методів їх побудови. Найбільш досліджені розклади повних графів. Існування розкладів повних графів на графи малих порядків підсумовані в роботах [5], [6]. Розробка методів комп'ютерного переліку разом з рекурсивними методами, методами породження комбінаторних об'єктів та із застосуванням інваріантів дозволила одержати значні досягнення в розв'язанні задач 2 та 3. Автором ці задачі розглянуто в наступному розділі відносно циклічних розкладів повного графа на 9-реберні графи.

Означення 1. *Розкладом графа K_n на графи, ізоморфні графові G, називають розбиття множини ребер графа K_n на підмножини, кожна з яких породжує підграф (компоненту розкладу), ізоморфний G, і кожне ребро K_n належить одній і тільки одній компоненті розкладу. Такий розклад називатимемо (K_n, G)-розкладом.*

Означення 2. *(K_n, G)-розклад називають циклічним, якщо всі його компоненти одержуються з однієї базової (або кількох базових) дією на неї степенями деякої циклічної підстановки α вершин графа K_n. Вказана циклічна підстановка називається твірною розкладу, а її степені суть автоморфізми (K_n, G)-розкладу.*

Кожна базова компонента циклічного (K_n, G)-розкладу під дією степенів підстановки α породжує орбіту, причому дві різні орбіти не перетинаються. Для існування такого розкладу, де $G = (V, E)$, $|E| = q$ необхідно виконання умови $n(n-1) \equiv 0(mod 2q)$.

Означення 3. *Два (K_n, G)-розклади R_1 та R_2 називаються ізоморфними, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами вершин цих розкладів, яка переводить кожну компоненту розкладу R_1 у деяку компоненту розкладу R_2.*

При ізоморфізмі двох циклічних (K_n, G)-розкладів існує підстановка множини вершин графа K_n, яка здійснює відображення орбіт цих розкладів. Автоморфізм (K_n, G)-розкладу - це його ізоморфізм на себе. Таким чином, кожний автоморфізм (K_n, G)-розкладу є підстановкою множини вершин графа K_n, під дією якої кожна компонента цього розкладу переходить в себе або в іншу, зберігаючи відношення інцидентності.

Нехай $D(\sigma)$ непорожня множина D, на якій задана еквівалентність σ; $S(\tau)$ непорожня множина S з визначеною на ній еквівалентністю τ. Нехай f функція, яка задана на D і набуває значень в S. Функція f є інваріантом над $D(\sigma)$, якщо з $d_1(\sigma)d_2$ випливає $f(d_1)(\tau)f(d_2)$ для довільних d_1, d_2 з D. Надалі використовуємо поняття інваріанта у випадках, коли D скінченна множина комбінаторних конфігурацій (зокрема розкладів графів), σ ізоморфність у цій множині. Розрізнююча спроможність інваріанта полягає у наступному: якщо $f(d_1)(\tau)f(d_2)$ не виконується, маємо, що d_1, d_2 не σ-еквівалентні.

Для розрізнення комбінаторних конфігурацій використовують числові інваріанти (наприклад, такі, як хроматичне число, діаметр, радіус, порядок групи автоморфізмів графів), специфікаційні, графічні та інші інваріанти. Опишемо один із специфікаційних інваріантів, який застосовано при розв'язуванні задач ототожнення-розрізнення в множині (K_n, G)-розкладів наступного розділу. Нехай K_n - граф з множиною вершин V і множиною ребер E; R - один з його розкладів на копії, що ізоморфні графу G, а P_i та P_j - деякі компоненти цього розкладу.

Означення 4. *Граф Γ_{ij} з множиною вершин $V(\Gamma_{ij}) = V(P_i) \cup V(P_j) \subseteq V$ і множиною ребер $E(\Gamma_{ij}) = E(P_i) \cup E(P_j) \subseteq E$ називають графом переплетень компонент P_i та P_j деякого (K_n, G)-розкладу.*

Розглянемо список усіх можливих попарно неізоморфних графів переплетень цього розкладу, записаних у певному порядку. Позначимо потужність одержаного списку k. Складові цього списку називаються типами переплетення компонент розкладу.

Означення 5. *Індексом компоненти P деякого розкладу R називають вектор $(s_1, s_2, ..., s_k)$, де s_i - кількість таких компонент у розкладі, які утворюють тип переплетення i з компонентою P. Очевидно, $s_1 + s_2 + ... + s_k = t - 1$, де t - число компонент у розкладі.*

Тоді таблиця

$$T(R) = \begin{pmatrix} s_1(1) & s_2(1) & \dots & s_k(1) & | & m_1 \\ s_1(2) & s_2(2) & \dots & s_k(2) & | & m_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1(p) & s_2(p) & \dots & s_k(p) & | & m_p \end{pmatrix}$$

в якій m_j означає число компонент у розкладі R, що мають індекс $(s_1(j), s_2(j), ..., s_k(j))$, є специфікаційним інваріантом у множині (K_n, G)-розкладів відносно ізоморфності розкладів. Індекси компонент у цій таблиці попарно різні і розташовані в порядку лексикографічного зростання.

Означення 6. *Якщо всі пари компонент розкладу мають тип переплетення i, то такий розклад називають i-гомогенним, індекси всіх його компонент однакові і мають вигляд* $(0, 0, \dots, 0, s_i, 0, ..., 0)$.

Для циклічного розкладу R всі його компоненти мають один і той самий індекс, а тому $p = 1$ і $T(R)$ - таблиця-рядок.

Методи побудови в сукупності із застосуванням інваріантів у багатьох випадках приводять до розв'язання задач переліку комбінаторних об'єктів. Під конструктивним переліком комбінаторних об'єктів деякого виду розуміють конструктивну побудову повного списку попарно неізоморфних об'єктів цього виду, наприклад, (K_n, G)-розкладів. Формою розв'язку задачі переліку комбінаторних конфігурацій є список, в якому всі перелічувані конфігурації розташовані в порядку лексикографічного зростання. Для отримання такого списку (K_{19}, G)-розкладів нами розроблено алгоритм на основі шаблонного представлення графа G порядку n. Граф G задається за допомогою двох об'єктів, перший з них є перестановкою $a_1, a_2, \dots, a_n$ стандартної множини вершин, а другий об'єкт являє собою шаблон графа G, тобто список пар номерів ij, $i < j$, де вказана пара належить шаблону тільки у випадку, коли $a_i a_j$ - ребро заданого графа. Якщо граф G має нетотожній автоморфізм, то його шаблонне представлення не єдине; тоді обирають одне, яке називають стандартним шаблонним представленням. Для забезпечення однозначності шаблонного запису графа G будемо застосовувати умови стандартності, які мають вигляд системи строгих нерівностей та призначені забезпечити певний порядок нумерації вершин у вершинних орбітах графа G.

Неізоморфні циклічні розклади графа K_{19} на компоненти певних видів. Подамо результати, що стосуються (K_{19}, G)-розкладів, де G=П та $G = B$ 9-реберні графи (призма та барвінок, відповідно). Розмір циклічного (K_n, G)-розкладу дорівнює $n(n-1)/2q$, а число його базових компонент обчислюється за формулою $(n-1)/2q$, де $q = V(G)$. За множину вершин графа K_{19} вибираємо стандартну множину 1, 2, $\dots$, 19 , а за циклічну підстановку - стандартну підстановку $\alpha = (1, 2, \dots, 19)$. Застосуємо наступні міркування: розглянемо коло з 19 точками, що поділяють його на рівні дуги. Занумеруємо ці точки числами від 1 до 19, які будемо вважати вершинами графа K_{19}. Впишемо граф G у коло, одержимо конфігурацію, названу проекцією G в коло або базовою компонентою, яка відповідає підстановці α. Щоб одержати циклічний (K_{19}, G)-розклад, довжини всіх ребер базової компоненти повинні бути попарно різні. Під довжиною ребра (i, j) тут розуміємо число $d(i, j) = min(|i - j|, 19 - |i - j|)$.

Нехай граф G=П. Будемо позначати через $(abc–def)$ призму П, де a, b, c, d, e, f – вершини призми, abc, def її основи, вершини різних основ з'єднані ребрами ad, be, cf. Шаблон представимо наступним чином: $(ab, ac, ad, bc, be, cf, de, df, ef)$. Нехай P - довільна компонента циклічного розкладу R графа K_{19} на копії призми П. Розглянемо інваріант $T(R)$, описаний у попередньому розділі. Індексом компоненти P є вектор $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де x_s - кількість таких компонент у певному розкладі R, які з компонентою P мають s спільних вершин, $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, і $T(R) = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, при цьому $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$. Для знаходження різних циклічних $(K_{19}, П)$-розкладів R автором розроблено алгоритм 1.

Алгоритм 1. Знаходження різних циклічних (K_{19},П)-розкладів.

Вхідні дані. Граф П, заданий своїм шаблоном.

Вихідні дані. Список вершин компоненти циклічного (K_{19},П)-розкладу; кортеж довжин; список чисел, які є кількістю спільних вершин даної компоненти з іншими в розкладі; інваріант $T(R)$.

Крок 1. Заповнюємо масив m елементами $m[i] = i$, де $i = 1, 2, \dots, 6$.

Крок 2. Будуємо шаблон mn графа П.

$mn[1] := 1$; $mn[2] := 2$; $mn[3] := 1$; $mn[4] := 3$; $mn[5] := 1$; $mn[6] := 4$;
$mn[7] := 2$; $mn[8] := 3$; $mn[9] := 2$; $mn[10] := 5$; $mn[11] := 3$; $mn[12] := 6$;
$mn[13] := 4$; $mn[14] := 5$; $mn[15] := 4$; $mn[16] := 6$; $mn[17] := 5$; $mn[18] := 6$.

Крок 3. Будуємо кортеж довжин mg відповідно до шаблону. Для $i = 1, 2, \dots, 9$ покладаємо $mg[i] = m[mn[2i - 1]] - m[mn[2i]]$. Якщо $mg[i] < 0$, то покладаємо $mg[i] = -mg[i]$, якщо ж $mg[i] > 9$, тоді $mg[i] := 19 - mg[i]$.

Крок 4. Якщо кортеж довжин mg містить однакові елементи, то методом перебору шукаємо масив m, елементи якого задовольняють умову $mg[i] \neq mg[j]$ для будь-яких i, j, що набувають значення від 1 до 9 і $i \neq j$. Якщо такий масив m знайдено, то m - базова компонента циклічного (K_{19},П)-розкладу, інакше переходимо до кроку 8.

Крок 5. Будуємо орбіту компоненти m і шукаємо число спільних вершин компоненти m з іншими компонентами орбіти.

Крок 6. Знаходимо специфікаційний інваріант - масив $T(R)$.

Крок 7. Виводимо одержані результати.

Крок 8. Вихід.

Алгоритм реалізовано з використанням програмного середовища Delphi. Результатом роботи програми є список з 1024 різних циклічних (K_{19},П)-розкладів, кожний з них представлено базовою компонентою, набором довжин ребер у відповідності до шаблону, числом спільних вершин базової компоненти з кожною компонентою її орбіти, інваріантом $T(R)$. На основі цього спуску складено таблицю 1, в якій подано розклади з різними значеннями $T(R)$.

Таблиця 1. Список (K_{19},П)-розкладів з різними значеннями $T(R)$

Базова призма	Набір довжин	Число спільних вершин	$T(R)$
1 2 4 - 5 11 16	1,3,4,2,9,7,6,8,5	212221212212122212	0 6 12 0 0 0
1 2 4 - 6 10 16	1,3,5,2,8,7,4,9,6	121322112211223121	0 8 8 2 0 0
1 2 5 - 6 8 17	1,4,5,3,6,7,2,8,9	213311211112113312	0 10 4 4 0 0
1 2 9 - 10 8 13	1,8,9,7,6,4,2,3,5	311111331133111113	0 12 0 6 0 0

З проведеного дослідження одержано наступний результат.

Теорема 1. *З точністю до ізоморфізму існують не менше, ніж чотири циклічних (K_{19},П)-розклади.*

Стандартний запис компоненти (K_{19}, B)-розкладу, являє собою кортеж $(aefg\ bcd)$, де a, b, c, d, e, f, g - вершини компоненти, $ac, ae, ag, bc, bg, cd, de, ef, fg$ - ребра використані у шаблоні. За результатами роботи програми, яка побудована за модифікацією алгоритму 1 (змінено довжина масиву m на одиницю та шаблон відповідно до графа B), одержано 3548 різних циклічних (K_{19}, B)-розкладів, на яких інваріант $T(R)$ набуває 11 різних значень, поданих у таблиці 2. Інваріант $T(R)$ вводиться аналогічно відповідному інваріанту для призм.

Таблиця 2. Список (K_{19}, B)-розкладів з різними індексами.

Базова призма	Набір довжин	Число спільних вершин	$T(R)$
1 2 4 9 19 12 6	1,3,8,2,4,5,9,7,6	233222232232222233	0 0 12 6 0 0
1 2 4 9 15 19 12	1,3,8,2,9,5,6,4,7	223222242242222322	0 0 14 2 2 0 0
1 2 4 8 13 19 10	1,3,7,2,8,4,5,6,9	232213233332312232	0 2 8 8 0 0 0
1 2 4 8 18 10 16	1,3,7,2,5,4,4,9,8,6	142223232232322241	0 2 10 4 2 0 0
1 2 5 10 4 11 19	1.4,9,3,2,5,6,7,8	422222124421222224	0 2 12 0 4 0 0
1 2 4 8 18 10 15	1,3,7,2,6,4,9,8,5	133133232232331331	0 4 4 10 0 0 0
1 2 4 8 14 19 10	1,3,7,2,8,4,6,5,9	231314223322413132	0 4 6 6 2 0 0
1 2 4 15 9 18 6	1,3,5,2,4,8,6,9,7	134142222222241431	0 4 8 2 4 0 0
1 2 5 12 10 16 11	1,4,8,3,9,7,2,6,5	311332134431233113	0 6 2 8 2 0 0
1 2 4 9 5 17 8	1,3,8,2,6,5,4,7,9	314412321123214413	0 6 4 4 4 0 0
1 2 6 14 4 16 18	1,5,6,4,3,8,9,7,2	152331312213133325	0 6 4 6 0 2 0

Представлені в таблиці 2 списки обґрунтовують наступну теорему.

Теорема 2. *З точністю до ізоморфізму існують не менше, ніж одинадцять циклічних (K_{19}, B)-розкладів.*

Для розв'язання задачі конструктивного переліку (K_{19}, G)-розкладів, де $G =$ П та $G = B$ треба мінімізувати знайдені списки. Тому перейдемо до опису ще одного специфікаційного інваріанту $\tilde{T}(R)$, більш чутливого ніж $T(R)$. Породження $\tilde{T}(R)$ відбувається з використанням таких характеристик, як число спільних вершин k, двох компонент розкладу R. Якщо $k = 0$, то кажуть, що має місце тип 1, при $k = 1$ - тип 2. Якщо $k = 2$, то маємо типи 3, 4, 5, при $k = 3$ - типи 6, 7, а при $k = 4$ - тип 8. Тоді $\tilde{T}(R) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$, де x_i - кількість компонент в розкладі R, що мають тип i з деякою компонентою P, крім того $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 18$. В [7] знайдено список 2-упаковок барвінків B в K_{19}, який дає всі можливі типи взаєморозташувань двох компонент (K_{19}, B)-розкладу. З цього результату випливає, що для барвінкових розкладів специфікаційний інваріант $\tilde{T}(R)$ має вигляд семикомпонентного вектора $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ і $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$. Надалі плануємо застосувати інваріант $\tilde{T}(R)$, що надасть можливість одержати більш високу оцінку знизу числа неізоморфних призматичних та барвінкових розкладів і наблизить до розв'язання задачі їх конструктивного переліку.

Висновок. Автором створено алгоритми і програмні реалізації, за допомогою яких одержано нижню оцінку числа неізоморфних циклічних призматичних та барвінкових розкладів графа K_{19}. Алгоритми мають чітко виражений універсальний характер. Це означає, що їх легко пристосувати для побудови списків циклічних розкладів графа K_{19} на будь-які 9-реберні графи. Також запропоновано специфікаційний інваріант $\tilde{T}(R)$ для наближення до повного вирішення задачі конструктивного переліку циклічних призматичних та барвінкових розкладів графа K_{19}.

1. *Colbourn C. J., Dinitz J. H., Stinson D. R.* Applications of combinatorial designs to communications, cryptography and networking// Surveys in combinatorics. - Cambridge University Pres, – 1999. – P. 37-100.
2. *Іванов А. В., Фараджев И.* Конструктивное перечисление систем инцидентности I// Rostock. Math. Kolloq. – 1983. – Vol. 24. –P. 4-22.
3. *Bosak J., Rosa A., Znam S.* On decompositions of complete graphs into factors with given diameters// In: Theory of graphs, Proc. Colloq. Tihany. – 1966, Akad. Kiado – 1968. – P. 37-56.
4. *Wilson R. M.* Decomposition of complete graphs into subgraphs isomorphis to a given graph// Proc. of the Fifth British Comb. Conference. - Utilitas Math., Winnipeg, 1976. – P. 647-659.
5. *Bermond J. C., Schonheim J.* G-decompositions of K_n, where G has four vertices or less // // Discrete Math. – 1977. – Vol. 19, №2. – P. 113–120.
6. *Bermond J. C., Huang C., Rosa A., Sotteau D.* Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices// Ars Combinatoria. – 1980. – Vol. 10. – P. 211–254.
7. *Петренюк Л. П.* О барвинках в полном графе// Материалы VII Международного семинара "Дискретная математика и её приложения"Часть II / Под ред. О. Б. Лупанова. - М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. –2001. С. 241– 242.

Одержано 08.09.2012