УДК 517.95

М. М. Симотюк (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України)

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ВИЗНАЧНИКА ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

The metric theorems of an estimations of the characteristic determinant of the two-point problem for linear partial differential equation with constant coefficients are proved.

Встановлено метричні оцінки знизу для характеристичного визначника двоточкової задачі для лінійного рівняння із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Вступ. Нехай $A_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня N_j, $N_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$; Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(ik, x) = ik_1x_1 + \ldots + ik_px_p$; $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ $(\omega, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma = \max\limits_{0\le j\le 2n-1} \{N_j/(2n-j)\})$ — поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma})}, \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|,$$

$C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,\cdot)/\partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$, норму в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою $\left\|u; C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\right\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{t\in[0,T]} \left\|\partial^j u(t,\cdot)/\partial t^j; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right\|$.

Умови розв'язності у просторах $C^{2n}([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задачі

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{2n-1} A_j(D_x)\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega_p, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \dfrac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \ j = 1, \ldots, n, \ \ x \in \Omega_p, \\ U_{n+j}[u] \equiv \dfrac{\partial^{2j-1}u(t,x)}{\partial t^{2j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \ j = 1, \ldots, n, \ x \in \Omega_p, \end{cases} \tag{2}$$

залежать від властивостей визначника

$$\Delta(k,T) = \det \|U_j[f_q(t,k)]\|^{2n}_{j,q=1}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3}$$

де $f_1(t,k), \ldots, f_{2n}(t,k)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння

$$L\,(d/dt, k)\, y(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j, q = 1, \ldots, 2n$ (δ_{jq} — символ Кронекера). Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник (3) є відмінним від нуля, то задача (1), (2) має єдиний формальний розв'язок, який зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j,q=1}^{2n} \frac{\Delta_{jq}(k,T)}{\Delta(k,T)} f_q(t,k)\varphi_{jk}\exp(ik,x), \tag{5}$$

де $\Delta_{jq}(k,T), j,q = 1,\ldots,2n,$ — алгебричне доповнення елемента $U_j[f_q(t,k)]$ у визначнику $\Delta(k,T)$, а φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x), j = 1,\ldots,2n$. Якщо $\Delta(k,T) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, і, крім того, існують такі сталі $\sigma, \delta \in \mathbb{R}$, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k,T)| \geq (1+|k|)^{-\sigma} \exp(-\delta T|k|^{\gamma}), \tag{6}$$

то на основі відомих оцінок [12, с. 162] для функцій $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, можна встановити збіжність ряду (5) в шкалі просторів $C^{2n}([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi_j \in W^{\gamma}_{\alpha_0,\beta_0}$, $j = 1,\ldots,2n$, для певних $\alpha_0,\beta_0 \in \mathbb{R}$. Тому важливо дослідити питання про можливість виконання нерівності (6). Це і є метою даної роботи. Зауважимо, що раніше метричні оцінки знизу для характеристичних визначників крайових задач з умовами вигляду (2) встановлено у роботах [3, 4] тільки для таких рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t парного порядку. Для таких рівнянь характеристичний визначник допускає факторизацію, кожен множник якої оцінюється знизу на підставі леми 2.4 із [8, розділ 1]. Однак для рівняння (1), яке містить похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків, характеристичний визначник (3), взагалі кажучи, не допускає факторизації. Це зумовлює значні труднощі при встановленні оцінки (6). Цим пояснюється відсутність робіт, присвячених дослідженню оцінки (6) для загального рівняння (1). Зауважимо, що для встановлення оцінки (6) у даній роботі застосовано апарат міри та розмірності Гаусдорфа [1, 8, 13].

Формулювання основного результату. Для формулювання отриманого результату введемо такі позначення: $C(2n,n)$ — множина всіх таких наборів натуральних чисел $\omega = (i_1,\ldots,i_n)$, що $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq 2n$; $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{m(k)}(k)$, $m(k) \leq 2n$, — різні корені рівняння

$$L(\lambda,k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

кратностей $n_1(k),\ldots,n_{m(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k)+\ldots+n_{m(k)}(k) = 2n$;

$$m_0(k) = 0, \quad m_j(k) = n_1(k)+\ldots+n_j(k), \quad j = 1,\ldots,m(k);$$

$$g_q(t,k) = t^{\alpha(q)} \exp(\lambda_{\beta(q)}(k)t), \quad q = 1,\ldots,2n, \tag{8}$$

де $\alpha(q) = q - m_{\beta(q)-1}(k) - 1$, $q = 1,\ldots,2n$, а індекс $\beta(q)$, $q = 1,\ldots,2n$, однозначно визначається з умови $m_{\beta(q)-1}(k) < q \leq m_{\beta(q)}(k)$.

Основним результатом даної роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа, $\rho \in (0;1]$) чисел $T > 0$ нерівність* (6) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при*

$$\sigma > \gamma + (p+\gamma)(\xi-1)/\rho, \quad \delta \geq \Lambda, \quad \gamma = \max_{0 \leq j \leq 2n-1} \{N_j/(2n-j)\},$$

де $\xi = C^n_{2n}(1+n(\nu-1))$, $\nu = \max\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \max\limits_{1\leq j \leq m(k)} n_j(k)$,

$$\Lambda = -\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} |k|^{-\gamma} \min\left\{\mathrm{Re}\,\left(\lambda_{\beta(i_1)}(k)+\ldots+\lambda_{\beta(i_n)}(k)\right) : (i_1,\ldots,i_n) \in C(2n,n)\right\}.$$

Зауважимо, що теорема 1 даної роботи посилює результати, отримані в [14].

Допоміжні твердження. Для квазімногочлена

$$Q(t)=\sum_{j=1}^{m}\exp(\mu_j t)p_j(t), \tag{9}$$

де $\mu_j\in\mathbb{C}$, $j=1,\ldots,m$, $\mu_j\neq\mu_r$, $j\neq r$, а $p_j(t)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів (n_j-1), $j=1,\ldots,m$, відповідно, будемо використовувати такі позначення: $N_Q=n_1+\ldots+n_m$, $B_Q=1+\max\limits_{1\le j\le m}|\mu_j|$, $\Lambda_Q=\min\limits_{1\le j\le m}\mathrm{Re}\mu_j$,

$$E(Q,\varepsilon,[0,T_0]):=\{t\in[0,T_0]:|Q(t)|\le\varepsilon\exp(\Lambda_Q t)\}.$$

Наступне твердження є безпосереднім наслідком результатів праці [5].

Лема 1. *Якщо $Q(0)\neq 0$, то існують такі додатні сталі C_1,C_2,C_3 (які залежать тільки від N_Q,T_0), що для квазімногочлена $Q(t)$ вигляду (9), довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0=C_1Q(0)B_Q^{-N_Q}$, множину $E(Q,\varepsilon,[0,T_0])$ можна покрити не більш ніж C_2B_Q проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $C_3\Big(\varepsilon B_QQ^{-1}(0)\Big)^{1/(N_Q-1)}$.*

Наступні леми описують структуру визначника (3) як функції змінної T.

Лема 2. *Для визначника* (3) *виконується така рівність:*

$$\Delta(k,T)\Big|_{T=0}=(-1)^{n(3n+1)/2},\quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Доведення. Оскільки

$$\Delta(k,T)=(-1)^{n(3n+1)/2}\det\left\|f_{2q}^{2j-1}(T,k)]\right\|_{j,q=1}^{n},\quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

і $f_{2q}^{(2j-1)}(0,k)=\delta_{2j-1,2q}$, $j,q=1,\ldots,n$ (згідно з вибором фундаментальної системи $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$), то

$$\Delta(k,T)\Big|_{T=0}=(-1)^{n(3n+1)/2}\det\|\delta_{2j-1,2q}\|_{j,q=1}^{n}=(-1)^{n(3n+1)/2},\quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Лема 3. *Визначник $\Delta(k,T)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, як функція змінної T, є квазімногочленом вигляду*

$$\sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)}\exp(\Lambda_{\beta(\omega)}(k)T)P_\omega(k,T), \tag{10}$$

де $P_\omega(k,T)\equiv\det\left\|\left(d/dT+\lambda_{\beta(i_j)}\right)^{2q-1}\left[T^{\alpha(i_j)}\right]\right\|_{j,q=1}^{n}$, $\Lambda_{\beta(\omega)}(k)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{\beta(i_j)}(k)$, а індекси $\beta(i_1),\ldots,\beta(i_n)$ та степені $\alpha(i_1),\ldots,\alpha(i_n)$ визначаються формулами (8). Для порядку $N_\Delta(k)\equiv\sum\limits_{\omega\in C(2n,n)}(\gamma_k(\omega)+1)$ квазімногочлена (10), де $\gamma_k(\omega)$ — степінь $P_\omega(k,T)$ як многочлена від T, виконується нерівність

$$N_\Delta(k)\le C_{2n}^{n}\left(1+n(n^+(k)-1)\right), \tag{11}$$

де $n^+(k)=\max\limits_{1\le j\le m(k)}n_j(k)$ — максимальна кратність коренів полінома $L(\lambda,k)$.

Доведення. Нехай $\Delta_1(k,T) \equiv \det \|U_j[g_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{2n}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, де функції $g_1(t,k),\ldots,g_{2n}(t,k)$ визначені формулами (8). Визначники $\Delta(k,T)$ та $\Delta_1(k,T)$ пов'язані рівністю

$$\Delta(k,T) = \Delta_1(k,T)/\det J_k,$$

де J_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, — матриця переходу від фундаментальної системи розв'язків $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$ рівняння (4) до системи розв'язків $g_1(t,k),\ldots,g_{2n}(t,k)$. Розкриваючи визначник $\Delta_1(k,T)$ за правилом Лапласа за мінорами останніх n рядків, дістаємо, що

$$\Delta_1(k,T) = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)} (-1)^{l_\omega} M_\omega(k) \exp(\Lambda_{\beta(\omega)}(k)T) P_\omega(k,T), \tag{12}$$

де $l_\omega = i_1+\ldots+i_n+(n+1)+\ldots+2n$, $M_\omega(k)$ — мінор n-го порядку визначника $\Delta_1(k,T)$, який відповідає першим n рядкам та n стовпцям, номери яких не дорівнюють числам $i_1,\ldots,i_n$. З рівності (12) випливає перше твердження леми.

Оцінка (11) для $N_\Delta(k)$ випливає з того, що кількість елементів множини $C(2n,n)$ дорівнює C_{2n}^n і того, що для довільного набору $\omega \in C(2n,n)$ степінь $\gamma_k(\omega)$ многочлена $P_\omega(k,T)$ у формулі (12) не перевищує $n(n^+(k)-1)$.

Доведення основного результату (теореми 1). Нехай T_0 — довільне додатне число, $E_{\sigma,\delta}(k,T_0)$ — множина тих чисел $T \in (0,T_0]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k,T)| < (1+|k|)^{-\sigma} \exp(-\delta T|k|^\gamma) \tag{13}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$, а $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ — множина тих значень $T \in (0,T_0]$, які належать до нескінченної кількості множин $E_{\sigma,\delta}(k,T_0)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи, що $(0;+\infty)$ можна покрити зліченною кількістю проміжків вигляду $(0;T_0]$, для доведення теореми досить встановити, що для кожного $T_0 > 0$ множина $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ має нульову ρ-міру Гаусдорфа, якщо $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, де

$$\sigma_1(\rho) = \gamma + (p+\gamma)(\xi-1)/\rho, \quad \xi \geq C_{2n}^n\,(1+n(\nu-1))\,, \quad \nu = \max_{k\in\mathbb{Z}^p}\ \max_{1\leq j\leq m(k)} n_j(k).$$

Нехай $B_\Delta(k) = 1 + \max\{|\Lambda_{\beta(\omega)}(k)| : \omega \in C(2n,n)\}$. Оскільки $|B_\Delta(k)| \leq C_4(1+|k|)^\gamma$, то з лем 1, 2, 3 випливає, що при $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, множину $E_{\sigma,\delta}(k,T_0)$ можна покрити проміжками $I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0)$, $j=1,\ldots,M(k)$, так, що для кількості $M(k)$ цих проміжків виконуються нерівності

$$M(k) \leq C_5 B_\Delta(k) \leq C_6(1+|k|)^\gamma, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{14}$$

а для їхніх довжин — нерівності

$$\begin{aligned} \operatorname{mes} I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0) &\leq C_7\,(1+|k|)^{(\gamma-\sigma)/(N(k)-1)} \leq C_8\,(1+|k|)^{(\gamma-\sigma)/(\xi-1)} \leq \\ &\leq C_9\,(1+|k|)^{-(p+\gamma)/\rho-\varepsilon(\rho)/(\xi-1)}\,,\ k\in\mathbb{Z}^p,\ \varepsilon(\rho)=\sigma-\sigma_1(\rho)>0. \end{aligned} \tag{15}$$

Зауважимо, що для $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, правильним є включення

$$E_{\sigma,\delta}(T_0) = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{|k|\geq N} E_{\sigma,\delta}(k,T_0) \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{|k|\geq N} \bigcup_{j=1}^{M(k)} I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0).$$

Тому при $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$, кожна точка множини $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ належить до нескінченної кількості проміжків $I^j_{\sigma,\delta}(k)$, $j = 1, \ldots, N(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. З нерівностей (14), (15) випливає, що

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j=1}^{M(k)}(\operatorname{mes} I^j_{\sigma,\delta}(k,T_0))^\rho \leq C_{10}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{-p-\rho\varepsilon(\rho)/(\xi-1)} < \infty.$$

Тоді за теоремою 2.1 [1] ρ-міра Гаусдорфа множини $E_{\sigma,\delta}(T_0)$ дорівнює нулеві, якщо $\sigma > \sigma_1(\rho)$, $\delta \geq \Lambda$. Теорему доведено.

Результати роботи можна перенести на випадок задачі з умовами (2) для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

Робота виконана при фінансовій подтримці ДФФД (проект № 41.1/004).

Висновки. У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника задачі з двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Застосовано апарат міри та розмірності Гаусдорфа для встановлення таких оцінок.

1. *Берник В.И., Мельничук Ю.В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа.– Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4.– С. 637–645.
3. *Білусяк Н.І., Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Крайова задача зі змішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 53–63.
4. *Пташник Б.Й., Репетило С.М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2010. – №4. – С. 19–24.
5. *Медвідь О.М., М.М.Симотюк.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. Студії. – 2007. – Т. 28, № 2. – С. 115–140.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
7. *Пташник Б.И., Полищук В.Н., Салыга Б.О.* Малые знаменатели в краевых задачах для гиперболических уравнений // В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 108–111.
8. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– **42**, № 4.– С. 90–95.
10. *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.
11. *Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
13. *Rogers C.A.* Hausdorff measures / Rogers C.A. – Cambridge: Cambridge University Press, 1970. – 179 p.
14. *Symotyuk M.M.* The two-point problem for linear partial differential equation // International conference «NPDE–2003», Alushta, September 15-21, 2003. Book of abstracts. – Donetsk: 2003. – P. 208–209.

Одержано 21.10.2012