УДК 512.64+512.56

Бондаренко В. М. (Институт математики НАН Украины),
Степочкина М. В. (Житомирский нац. агроэкол. ун-т),
Червяков И. В. (Институт математики НАН Украины)

ОБ *M*-ОСОБЫХ *P*-КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ МУЛЬТИЦЕПНОГО ТИПА

In this paper we study a class of partially ordered sets which are min-equivalent to Kleiner partially ordered sets.

В этой работе мы изучаем некоторый класс частично упорядоченных множеств, min-эквивалентных критическим частично упорядоченным множествам Клейнера.

В работе [1] М. М. Клейнер доказал, что частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество S имеет конечный представленческий тип тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножеств вида $(1,1,1,1), (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5)$ и $(\text{И}, 4)$; эти ч. у. множества называются теперь критическими (ч.у.) множествами Клейнера. Из этого результата и результата Ю. А. Дрозда о ч. у. множествах конечного представленческого типа [2] следует, что критические множества Клейнера являются критическими и относительно слабой положительности (положительности на множестве неотрицательных векторов) квадратичной формы Титса ч. у. множеств, причем других таких ч. у. множеств нет.

В работе [3] доказано, что ч. у. множество является P-критическим (критическим относительно положительности формы Титса) тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно критическому множеству Клейнера (такая эквивалентность введена первым из авторов в [4]); это позволило описать все P-критические ч. у. множества (см. ту же работу [3]). Типом P-критического ч. у. множества назовем соответствующее критическое множество Клейнера. Будем говорить, что P-критическое ч. у. множество имеет мультицепной тип, если его типом является примитивное ч. у. множество.

Минимаксная эквивалентность, которая еще называется (min, max)-эквивалентностью, равносильна min-эквивалентности. P-критическое ч. у. множество назовем M-стандартным, если оно min-эквивалентно критическому множеству Клейнера по некоторой последовательности (своих элементов) без повторений, и M-особым в противоположном случае (более подробно см. в пункте 1).

В этой статье мы описываем все M-особые P-критические ч. у. множества мультицепного типа.

1. Предварительные сведения. Все ч. у. множества предполагаются конечными, а под ч. у. подмножествами (которые будем называть просто подмножествами) всегда подразумеваются полные подмножества.

Напомним некоторые определения и утверждения из работы [4].

Пусть S — ч. у. множество и a — его минимальный элемент. Через $S_a^\uparrow$ будем обозначать ч. у. множество, которое совпадает с S как обычное множество, с тем же отношением порядка на $S \setminus \{a\}$, но при этом элемент a является уже максимальным, причем a сравнимо с x в $S_a^\uparrow$ тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^\uparrow)_y^\uparrow$, $S_{xyz}^{\uparrow\uparrow\uparrow}$ вместо $((S_x^\uparrow)_y^\uparrow)_z^\uparrow$ и т. д.

Ч. у. множество T называется min-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если $T = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ $(p \geq 0)$; здесь естественно подразумевается, что указанное выражение имеет смысл, т. е. для каждого $i \in \{1,\ldots,p\}$, элемент x_i является минимальным элементом в $S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}$ (если $p = 0$, то $T = S$). Заметим, что среди $x_1, x_2, \ldots, x_p$ могут быть одинаковые элементы.

Понятие min-эквивалентности можно естественным образом продолжить до понятия min-изоморфизма, считая, что ч. у. множества S и S' min-*изоморфны*, если существует ч. у. множество T, min-эквивалентное S и изоморфное S'.

Конечная последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ элементов ч. у. множества S называется min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ имеет смысл ($p = 0$ не исключается). В этом случае будем также писать $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначается через $\mathcal{P}(S)$, а множество всех min-допустимых последовательностей без повторений — через $\mathcal{P}_1(S)$. Подмножество в S, состоящее из всех элементов x_i последовательности $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}_1(S)$, обозначается через $[\alpha]_S$. Отметим, что для min-эквивалентных ч. у. множеств S и T не всегда существует последовательность α без повторений такая, что $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$ (см. п. 6 [3]).

В работе [3] введено понятие P-критического ч. у. множества как ч. у. множества, критического относительно положительности квадратичной формы Титса (т. е. само ч. у. множество имеет неположительную форму Титса, а все его собственные подмножества — положительную). Согласно одному из результатов этой же работы ч. у. множество S является P-критическим тогда и только тогда, когда оно min-эквивалентно критическому множеству Клейнера $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_5$:

$\mathcal{K}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, где все элементы попарно несравнимы;

$$\mathcal{K}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\};$$

$$\mathcal{K}_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\};$$

$$\mathcal{K}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\};$$

$$\mathcal{K}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 7 \prec 8, 5 \prec 8\}.$$

При этом два различных ч. у. множества Клейнера не являются min-эквивалентными.

Типом P-критического ч. у. множества S назовем соответствующее критическое множество Клейнера. Мы говорим в этом случае, что S имеет *мультицепной тип*, если его типом является ч. у. множество, являющееся объединением попарно непересекаемых цепей (линейно упорядоченных множеств), т. е. одно из ч. у. множеств $\mathcal{K}_i$ при $i \neq 5$.

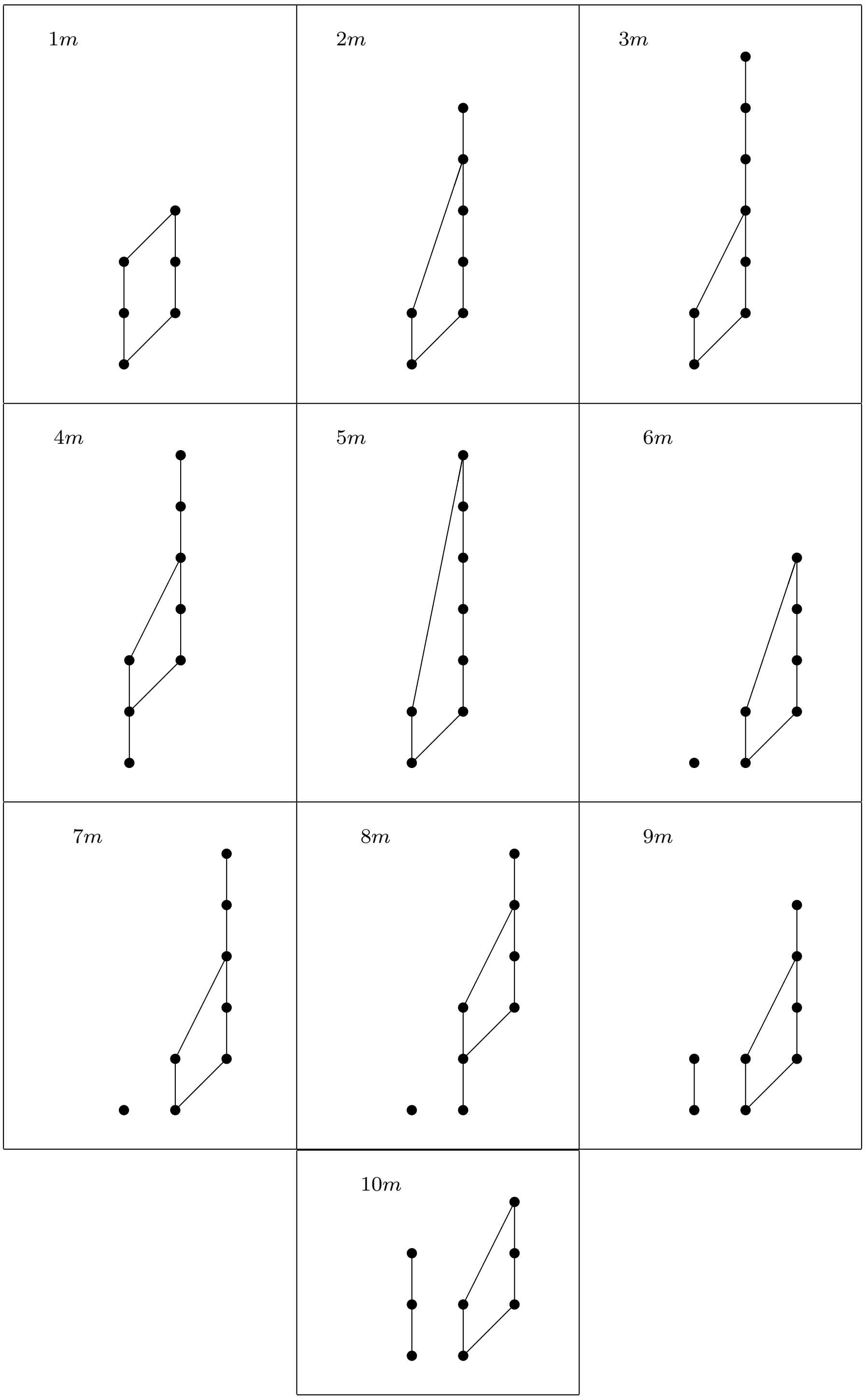
P-критическое ч. у. множество S назовем *M-стандартным*, если оно имеет вид $\mathcal{K}^{\uparrow}_{\alpha}$ для некоторого критического множества Клейнера $\mathcal{K}$ и некоторой последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, и *$M$-особым* в противоположном случае.

Напомним, что двойственным к ч. у. множеству S называется ч. у. множество S^{op}, такое что $S^{\mathrm{op}} = S$ как обычные множества и при этом $x < y$ в S^{op} тогда и только тогда, когда $x > y$ в S. Два ч. у. множества называются *антиизорфными*, если одно из этих ч. у. множеств изоморфно ч. у. множеству, которое двойственно к другому.

2. Основной результат.

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *M-особые P-критические ч. у. множества мультицепного типа исчерпываются (с точностью до изоморфизма) ч. у. множествами M_1, $M_2, \ldots, M_{10}$, указанными в нижеследующей таблице под номерами $1m, 2m, \ldots,$ $10m$, и двойственными к M_2, M_3, M_4, M_7, M_9 ч. у. множествами (ч. у. множества $M_1, M_5, M_6, M_8, M_{10}$ самодвойственны).*



Прежде, чем перейти к доказательству этой теоремы, напомним еще некоторые определения и утвеждения работы [3].

Пусть, как и ранее, S — ч. у. множество. Подмножество $X \subseteq S$ называется *нижним*, если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ и $y \in X$. Для подмножеств X и Y ч. у. множества S будем писать $X < Y$, если $x < y$ для любых $x \in X, y \in Y$ (очевидно, что $X < \varnothing$ и $\varnothing < Y$). Несравнимые элементы ч. у. множества обозначаются символом $\lessgtr$.

Из следствий 5 и 9 [3] имеем, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$; кроме того, если X — подмножество S, то $X = [\alpha]_S$ для некоторой последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее. Следовательно для нижнего подмножества X можно определить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$, полагая $S^{\uparrow}_X = S^{\uparrow}_{\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей такая, что $[\alpha]_S = X$. В силу предложения 6 [3] $a < b$ в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $a < b$ в S и либо $a, b \in X$, либо $a, b \notin X$;

b) $a \lessgtr b$ в S и $b \in X, a \notin X$.

Из сказанного, в частности, имеем, что если Z — нижнее подмножество в X такое, что $Z < S \setminus X$, то Z является нижним подмножеством и в $S^{\uparrow}_X$.

В [3] указан алгоритм описания всех (с точностью до изоморфизма) ч. у. множеств, min-эквивалентных любому фиксированному ч. у. множеству S. Он состоит из следующих трех шагов.

I. Описать все нижние подмножества $X \neq S$ в S, и для каждого из них построить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$.

II. Описать все пары (Y, X), состоящие из собственного нижнего подмножества Y в S и непустого нижнего подмножества X в Y такого, что $X < S \setminus Y$; для каждой такой пары построить ч. у. множество $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_Y)^{\uparrow}_X$.

III. Среди полученных в I и II ч. у. множеств выбрать по одному из каждого класса изоморфных множеств.

Отметим, что в I случай $X = \varnothing$ не исключается, а случай $X = S$ исключается (в обоих случаях $S^{\uparrow}_X = S$).

Перебор случаев в указанном алгоритме можно уменьшить. Два нижних подмножества X и X' называются *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(X) = X'$ (как ч. у. подмножества). Аналогично, две указанные в II пары (Y, X) и (Y', X') назовем *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(Y) = Y'$ и $\varphi(X) = X'$. Очевидно, что подмножества в I и пары подмножеств в II достаточно рассматривать с точностью до сильного изоморфизма.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Нам понадобится следующее утверждение, которое описывает все нижние подмножества критических ч. у. множеств.

Лемма 1. *Все, с точностью до сильного изоморфизма, нижние подмножества в критических множествах Клейнера $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ исчерпываются* (*кроме самих множеств Клейнера*) *следующими ч. у. подмножествами:*

для $\mathcal{K}_1$ — $A_{1,1} = \varnothing$, $A_{1,2} = \{1\}$, $A_{1,3} = \{1, 2\}$, $A_{1,4} = \{1, 2, 3\}$;

для $\mathcal{K}_2$ — $A_{2,1} = \varnothing$, $A_{2,2} = \{1\}$, $A_{2,3} = \{1, 2\}$, $A_{2,4} = \{1, 3\}$, $A_{2,5} = \{1, 2, 3\}$, $A_{2,6} = \{1, 3, 5\}$, $A_{2,7} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{2,8} = \{1, 2, 3, 5\}$, $A_{2,9} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *для* $\mathcal{K}_3$ — $A_{3,1} = \varnothing$, $A_{3,2} = \{1\}$, $A_{3,3} = \{3\}$, $A_{3,4} = \{2,3\}$, $A_{3,5} = \{1,2\}$, $A_{3,6} = \{3,5\}$, $A_{3,7} = \{2,3,4\}$, $A_{3,8} = \{1,2,3\}$, $A_{3,9} = \{2,3,5\}$, $A_{3,10} = \{1,2,5\}$, $A_{3,11} = \{1,2,3,4\}$, $A_{3,12} = \{2,3,4,5\}$, $A_{3,13} = \{2,3,5,6\}$, $A_{3,14} = \{1,2,3,5\}$, $A_{3,15} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{3,16} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{3,17} = \{2,3,5,6\}$, $A_{3,18} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{3,19} = \{1,2,3,4,5,6\}$;

для $\mathcal{K}_4$ — $A_{4,1} = \varnothing$, $A_{4,2} = \{1\}$, $A_{4,3} = \{2\}$, $A_{4,4} = \{4\}$, $A_{4,5} = \{2,3\}$, $A_{4,6} = \{4,5\}$, $A_{4,7} = \{1,2\}$, $A_{4,8} = \{1,4\}$, $A_{4,9} = \{2,4\}$, $A_{4,10} = \{4,5,6\}$, $A_{4,11} = \{1,2,3\}$, $A_{4,12} = \{1,4,5\}$, $A_{4,13} = \{2,4,5\}$, $A_{4,14} = \{2,3,4\}$, $A_{4,15} = \{1,2,4\}$, $A_{4,16} = \{4,5,6,7\}$, $A_{4,17} = \{1,4,5,6\}$, $A_{4,18} = \{2,4,5,6\}$, $A_{4,19} = \{2,3,4,5\}$, $A_{4,20} = \{1,2,4,5\}$, $A_{4,21} = \{1,2,3,4\}$, $A_{4,22} = \{4,5,6,7,8\}$, $A_{4,23} = \{1,4,5,6,7\}$, $A_{4,24} = \{2,4,5,6,7\}$, $A_{4,25} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{4,26} = \{1,2,4,5,6\}$, $A_{4,27} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{4,28} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,29} = \{2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{4,31} = \{1,2,4,5,6,7\}$, $A_{4,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{4,33} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,34} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,35} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$;

для $\mathcal{K}_5$ — $A_{5,1} = \varnothing$, $A_{5,2} = \{1\}$, $A_{5,3} = \{5\}$, $A_{5,4} = \{7\}$, $A_{5,5} = \{1,2\}$, $A_{5,6} = \{5,6\}$, $A_{5,7} = \{1,5\}$, $A_{5,8} = \{1,7\}$, $A_{5,9} = \{5,7\}$, $A_{5,10} = \{1,2,3\}$, $A_{5,11} = \{1,5,6\}$, $A_{5,12} = \{1,2,5\}$, $A_{5,13} = \{1,2,7\}$, $A_{5,14} = \{5,7,8\}$, $A_{5,15} = \{5,6,7\}$, $A_{5,16} = \{1,5,7\}$, $A_{5,17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{5,18} = \{1,2,5,6\}$, $A_{5,19} = \{1,2,3,5\}$, $A_{5,20} = \{1,2,3,7\}$, $A_{5,21} = \{5,6,7,8\}$, $A_{5,22} = \{1,5,6,7\}$, $A_{5,23} = \{1,5,7,8\}$, $A_{5,24} = \{1,2,5,7\}$, $A_{5,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{5,26} = \{1,2,3,4,7\}$, $A_{5,27} = \{1,2,3,5,6\}$, $A_{5,28} = \{1,2,3,5,7\}$, $A_{5,29} = \{1,2,5,6,7\}$, $A_{5,30} = \{1,2,5,7,8\}$, $A_{5,31} = \{1,5,6,7,8\}$, $A_{5,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{5,33} = \{1,2,3,4,5,7\}$, $A_{5,34} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A_{5,35} = \{1,2,3,5,7,8\}$, $A_{5,36} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $A_{5,37} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{5,38} = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $A_{5,39} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

Лемма доказывается перебором всех возможных случаем.

Покажем сначала, что ч. у. множества $M_1, M_2, \dots, M_{10}$ и двойственные к ним ч. у. множества можно получить из критических множеств Клейнера с помощью операции, указанной в пункте II вышеуказанного алгоритма. Заметим, что (в силу результатов работы [3]) отсюда будем следовать, что $M_1, M_2, \dots, M_{10}$ и двойственные к ним ч. у. множества являются P-критическими.

Выделим для ч. у. множеств $\mathcal{K}_i$, $1 < i < 5$ пары $Z = (Y, X)$ нижних собственных подножеств такие, что $X \subseteq Y$ и $X < S \setminus Y$:

для $\mathcal{K}_2$ — $B_{2,1} = (A_{2,9}, \{5\})$;

для $\mathcal{K}_3$ — $B_{3,1} = (A_{3,16}, \{5\})$, $B_{3,2} = (A_{3,19}, \{5\})$, $B_{3,3} = (A_{3,19}, \{5,6\})$;

для $\mathcal{K}_4$ — $B_{4,1} = (A_{4,21}, \{4\})$, $B_{4,2} = (A_{4,27}, \{4\})$, $B_{4,3} = (A_{4,27}, \{4,5\})$, $B_{4,4} = (A_{4,32}, \{4\})$, $B_{4,5} = (A_{4,32}, \{4,5\})$, $B_{4,6} = (A_{4,32}, \{4,5,6\})$, $B_{4,7} = (A_{4,34}, \{2\})$, $B_{4,8} = (A_{4,35}, \{4\})$, $B_{4,9} = (A_{4,35}, \{4,5\})$, $B_{4,10} = (A_{4,35}, \{4,5,6\})$, $B_{4,11} = (A_{4,35}, \{4,5,6,7\})$.

Обозначим через $K'_{i,j}$ ч. у. множество $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{K}_i$ и $(Y, X) = B_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $K'_{2,1} \cong M_1$, $K'_{3,1} \cong M_2^{\mathrm{op}}$, $K'_{3,2} \cong M_6$, $K'_{3,3} \cong M_2$, $K'_{4,1} \cong M_3^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,2} \cong M_7^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,3} \cong M_4^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,4} \cong M_9^{\mathrm{op}}$, $K'_{4,5} \cong M_8$, $K'_{4,6} \cong M_4$, $K'_{4,7} \cong M_5$, $K'_{4,8} \cong M_{10}$, $K'_{4,9} \cong M_9$, $K'_{4,10} \cong M_7$, $K'_{4,11} \cong M_3$.

Отсюда, как видим, следует требуемое утверждение.

Чтоб закончить доказательство нашей теоремы, осталось доказать еще следующее утверждение.

Лемма 2. *P- критические ч. у. множества $M_1, M_2, \dots, M_{10}$ и M_2^{op}, M_3^{op}, M_4^{op}, M_7^{op}, M_9^{op} не являются M-стандартными.*

Доказательство. Предположим противоположное. Тогда существуют ч. у. множество T из тех, что указаны в условии леммы, критическое множество Клейнера $S = \mathcal{K}_i$ и нижнее подмножество X в S такие, что $T = S_X^{\uparrow}$.

Все (с точностью до сильного изоморфизма) нижние подмножества в критических множествах Клейнера $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ указаны в лемме 1.

Если теперь вычислить для каждого из указанных нижних подмножеств $X = A(i, j)$ критического множества Клейнера $S = \mathcal{K}_i$ ч. у. множество $T = S_X^{\uparrow}$ (см. пункт 6 работы [3]), то легко убедиться в том, что среди полученных ч. у. множеств нет ч. у. множеств $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ и двойственные к ним. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Теорема 1 доказана.

1. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, №3. – С. 18-58.
4. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – №1. – С. 24-25.

Получено 29.10.2012