УДК 517.9

О.В. Карпенко (Нацiональний технiчний унiверситет України "КПI")

ПРО ЗВ'ЯЗОК МIЖ КОЛИВНIСТЮ РОЗВ'ЯЗКIВ НЕЛIНIЙНИХ ДИФЕРЕНЦIАЛЬНИХ ТА РIЗНИЦЕВИХ РIВНЯНЬ

It is established the conditions of preservation of oscillation of the solutions of non-linear differential equations and non-linear difference equations provided that the corresponding solutions of linear differential equations and linear difference equations have such property.

Отримано умови збереження коливностi розв'язкiв нелiнiйних диференцiальних та нелiнiйних рiзницевих рiвнянь, при наявностi такої властивостi у вiдповiдних розв'язкiв лiнiйних диференцiальних та лiнiйних рiзницевих рiвнянь.

Вступ.

Важливим методом дослiдження диференцiальних рiвнянь є перехiд до рiзницевих рiвнянь, якi отримуються з диференцiальних замiною похiдної вiдповiдним рiзницевим вiдношенням. Iнтенсивне вивчення рiзницевих рiвнянь почалося в другiй половинi XX столiття, яке було зумовлено в першу чергу розвитком технiчних наук та обчислювальної технiки. На сьогоднiшнiй день дослiдження даних рiвнянь залишається актуальною задачею, оскiльки вони є зручними математичними моделями для багатьох прикладних процесiв - бiологiчних, економiчних, фiнансових. Це пов'язане з тим, що за реальними моделями ми спостерiгаємо непостiйно, а в конкретнi дискретнi моменти часу.

Якiснi властивостi розв'язкiв (стiйкiсть, обмеженiсть, перiодичнiсть тощо) диференцiальних та вiдповiдних їм рiзницевих рiвнянь, а також зв'язок мiж ними вивчалися в роботах багатьох авторiв [1, 3, 6, 7, 9, 10].

Питання збереження коливностi розв'язкiв при переходi вiд диференцiальних до вiдповiдних рiзницевих рiвнянь розглядалося у роботах [2], [5].

Щодо нелiнiйних рiзницевих рiвнянь та коливностi їх розв'язкiв, вiдмiтимо працi [11], [8].

Ця праця присвячена дослiдженню зв'язку мiж коливними властивостями розв'язкiв нелiнiйних диференцiальних та вiдповiдних їм рiзницевих рiвнянь. А саме, отримано умови, при яких iз коливностi розв'язку лiнiйної системи рiзницевих рiвнянь випливає коливнiсть вiдповiдного розв'язку нелiнiйного диференцiального рiвняння. Вивчена також обернена задача.

Дана робота складається зi вступу та двох частин. В першiй частинi приводиться постановка задачi та необхiднi означення. Основнi результати викладенi в другiй частинi.

1. Постановка задачi. Розглянемо нелiнiйне диференцiальне рiвняння:

$$\ddot{x} + p(t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $t \in [0, a]$.

Вiдносно функцiй $f(t, x, y)$ та $p(t)$ будемо вважати, що при $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, a]$:

1) $f(t, x, y)$ неперервна за сукупнiстю змiнних;

2) $f(t, x, y)$ має лiнiйний рiст за x i y, тобто $\exists N > 0$ така, що виконується нерiвнiсть

$$| f(t, x, y) | \leq N(1+ | x | + | y |);$$

3) $p(t) \geq 0$;

4) $p(t)$ задовольняє умову Ліпшиця на $[0, a]$.

Рівняння (1) будемо розглядати при початкових даних $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, які належать компакту $(x_0, y_0) \in K$, що не містить точку $(0, 0)$.

При $\varepsilon = 0$ рівняння (1) перетворюється до вигляду

$$\ddot{x} + p(t)x = 0. \tag{2}$$

Відповідне для (2) різницеве рівняння має вигляд

$$\triangle_k^2 x + h^2 p(kh) x(kh) = 0, \tag{3}$$

де $\triangle_k x = x((k+1)h) - x(kh)$, $\triangle_k^2 x = \triangle_k(\triangle_k x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $h > 0$– крок різницевого рівняння.

Відповідні до рівнянь (2) і (3) системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -p(t)x; \end{cases} \tag{4}$$

та

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + h y_k^h, \\ y_{k+1}^h = y_k^h - h p(kh) x_k^h, \end{cases} \tag{5}$$

де $x_0^h = x_0$, $y_0^h = y_0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Поряд із системою (5) розглянемо і нелінійну систему

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + h y_k^h, \\ y_{k+1}^h = y_k^h - h p(kh) x_k^h - \varepsilon h f(kh, x_k^h, y_k^h). \end{cases} \tag{6}$$

Приведемо необхідні в подальшому означення.

Означення 1. *Розв'язки систем (4) та (5) назвемо відповідними, якщо* $x(0) = x_0^h = x_0$, $y(0) = y_0^h = y_0$.

Означення 2. [5] Скажемо, що розв'язок x_k^h рівняння (3) має в точці t_k зміну знаку, якщо виконується одна з умов:

1) $x_k^h x_{k+1}^h < 0$;

2) $x_k^h = 0, \quad x_{k-1}^h x_{k+1}^h < 0$.

Означення 3. [5] Якщо на деякому інтервалі розв'язок x_k^h рівняння (3) має не менше двох змін знаку, то його будемо називати коливним на цьому інтервалі.

Означення 4. [4] Розв'язок $x(t)$ рівняння (2) назвемо коливним на даному проміжку, якщо він перетворюється в нуль не менше, ніж у двох точках.

У даній роботі вивчаються умови, при яких із коливності першої компоненти розв'язку системи (5) випливає коливність відповідного розв'язку (1) та умови, при яких із коливності розв'язку рівняння (2) випливає коливність першої компоненти відповідного розв'язку (6).

2. Основні результати. Приведемо результат про зв'язок між коливністю розв'язку нелінійного диференціального рівняння та відповідного розв'язку лінійного різницевого рівняння.

Має місце теорема.

Теорема 1. *При виконанні умов 1) - 4) існує таке* $\varepsilon_0 > 0$*, що для довільного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *справедливе твердження:*

якщо перша компонента розв'язку системи (5) має на інтервалі $[0, a]$ *принаймі чотири зміни знаку, то відповідний розв'язок рівняння (1) коливний на* $[0, a]$.

Доведення. Оскільки початкові дані (x_0, y_0) рівняння (2) лежать на компакті K, то з леми 2 [2] випливає, що існує $\triangle > 0$ таке, що амплітуда коливань будь-якого розв'зку з початковими даними $(x_0, y_0) \in K$ обмежена знизу:

$$M_k^x \geq \triangle.$$

Покажемо близькість розв'язків (1) і (2).

Запишемо рівняння (1) у вигляді системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -p(t)x - \varepsilon f(t, x, y). \end{cases}$$

Позначимо $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $z(0) = z_0$.

Тоді

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t)z - \varepsilon f(t, z). \tag{7}$$

Рівняння (2) перепишемо у вигляді

$$\dot{z}_1 = A(t)z_1, \tag{8}$$

де $z_1(0) = z_0$.

Позначимо $X(t, s)$ – матрицант системи (8). Отже

$$z_1(t) = X(t, 0)z_0. \tag{9}$$

Переписавши (7) в інтегральній формі отримаємо

$$z(t) = X(t, 0)z_0 + \varepsilon \int_0^t X(t, s)f(s, z(s))ds. \tag{10}$$

З умови лінійного росту $f(t, x, y)$ маємо також

$$\mid f(t, z) \mid \leq N(1+ \mid z \mid).$$

Тоді для відповідних розв'язків рівнянь (7) і (8) із (9) та (10) отримуємо:

$$\mid z(t) - z_1(t) \mid \leq \varepsilon \int_0^t CN(1+ \mid z(s) \mid)ds, \tag{11}$$

де $\| X(t,s) \| \leq C$, $t,s \in [0,a]$, C – деяка стала.

Оцінимо тепер $z(s)$. Із (10) маємо

$$| z(t) | \leq C \mid z_0 \mid + \varepsilon NCa + \varepsilon NC \int_0^t \mid z(s) \mid ds,$$

що, з урахуванням леми Гронуола-Беллмана приводить при $t \in [0,a]$ до оцінки:

$$| z(t) | \leq (C \mid z_0 \mid + \varepsilon NCa) e^{\varepsilon NCa}.$$

Оскільки $z_0 \in K$, то $\exists R > 0$ така, що $| z_0 | \leq R$. Тоді

$$| z(t) | \leq (CR + \varepsilon NCa) e^{\varepsilon NCa} \equiv B,$$

де B – деяка стала.

Із (11) тоді випливає нерівність

$$| z(t) - z_1(t) | \leq \varepsilon \int_0^t CN(1+B) ds \leq \varepsilon aNC(1+B), \tag{12}$$

що оцінює близькість відповідних розв'язків рівнянь (1) і (2).

Можна показати, що якщо розв'язок системи (5) має три зміни знаку, то відповідний розв'язок рівняння (2) коливний на $[0,a]$.

Тоді якщо розв'язок системи (5) має чотири зміни знаку на $[0,a]$, то розв'язок (2) має принаймі три нулі на цьому інтервалі. Звідси із оцінки (12), леми 2 [2] та відповідності розв'язків рівнянь (1) та (3) випливає, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що розв'язок нелінійного диференціального рівняння (1) має принаймі два нулі на $[0,a]$, тобто є коливним.

Наступний результат показує зв'язок між коливністю розв'язку лінійного диференціального рівняння та відповідного розв'язку системи нелінійних різницевих рівнянь.

Теорема 2. *При виконанні умов 1) - 4) існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливе твердження:*

якщо лінійне диференціальне рівняння (2) має принаймі чотири нулі на $[0,a]$, то відповідний розв'язок системи нелінійних різницевих рівнянь (6) має коливну на $[0,a]$ першу компоненту.

Доведення.

Встановимо оцінку різниці між відповідними розв'язками систем (5) і (6).

З позначенням $\varphi_k^h = \begin{pmatrix} x_k^h \\ y_k^h \end{pmatrix}$ система (6) переписується у вигляді

$$\varphi_{k+1}^h = \varphi_k^h + hA(kh)\varphi_k^h - h \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon f(kh, \varphi_k^h) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $A(kh) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(kh) & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_0^h = \varphi_0$.

Аналогічно з позначенням $\tau_k^h = \begin{pmatrix} x_k^h \\ y_k^h \end{pmatrix}$ система (5) набере вигляду

$$\tau_{k+1}^h = \tau_k^h + hA(kh)\tau_k^h, \tag{14}$$

де $\tau_0^h = \varphi_0 = \tau_0$.

Позначимо $X(n,k)$ – матрицант системи (14). Отже

$$\tau_k^h = X(k,0)\tau_0. \tag{15}$$

Неважко бачити, що розв'язок системи (13) представляється у вигляді

$$\varphi_k^h = X(k,0)\varphi_0 + h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} X(k-1,n) f(nh, \varphi_n^h). \tag{16}$$

Із (15) та (16) маємо

$$\mid \varphi_k^h - \tau_k^h \mid \leq h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} X(k-1,n) f(nh, \varphi_n^h). \tag{17}$$

З умови лінійного росту $f(kh, x_k^h, y_k^h)$ отримуємо :

$$\mid f(kh, \varphi_k^h) \mid \leq N(1 + \mid \varphi_k^h \mid),$$

звідки маємо

$$\mid \varphi_k^h \mid \leq C_1 \mid \varphi_0 \mid + h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} C_1 N (1 + \mid \varphi_n^h \mid) \leq$$

$$\leq C_1 \mid \varphi_0 \mid + h\varepsilon C_1 N a + h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} C_1 N \mid \varphi_n^h \mid,$$

де $\| X(n,k) \| \leq C_1$ при $kh \in [0,a]$.

За дискретним аналогом леми Гронуола-Беллмана [3, стр.41] при $kh \in [0,a]$:

$$\mid \varphi_k^h \mid \leq (C_1 \mid \varphi_0 \mid + h\varepsilon C_1 N a) e^{\varepsilon C_1 N a}.$$

Оскільки $\varphi_0 \in K$, то $\exists M > 0$ така, що $\mid \varphi_0 \mid \leq M$. Тоді

$$\mid \varphi_k^h \mid \leq (C_1 M + h\varepsilon C_1 N a) e^{h\varepsilon C_1 N a} \equiv Q,$$

де Q – деяка стала.

Отже оцінка (17) набирає вигляду

$$\mid \varphi_k^h - \tau_k^h \mid \leq h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} C_1 N (1+Q) \leq h\varepsilon C_1 N (1+Q) a. \tag{18}$$

З теореми 1 [2] випливає, що якщо розв'язок диференціального рівняння (2) має на інтервалі $[0,a]$ принаймні три нулі , то існує $h_0 > 0$ таке, що відповідний розв'язок рівняння (3) коливний на цьому інтервалі, тобто має не менше двох змін знаку.

Аналогічно лемі 2 [2] можна показати, що існує $\triangle_1(h) > 0$ таке, що амплітуда коливань будь-якого розв'язку (3) обмежена знизу

$$M_p^x(h) \geq \triangle_1, \tag{19}$$

де $M_p^x(h) = \max_{k\in[p+1,m]} \mid x_k^h \mid$, t_p і t_m – дві послідовні точки змін знаку.

Тоді із (18), (19) випливає, що існують $\varepsilon_0 > 0$, $h_0 > 0$ такі, що якщо розв'язок лінійного диференціального рівняння (2) має чотири нулі на $[0, a]$, то відповідний розв'язок системи нелінійних різницевих рівнянь (6) має на цьому інтервалі принаймні дві зміни знаку, тобто є коливним.

1. *Карпенко О. В.* Про зв'язок між існуванням періодичних розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь: Вісник ОНУ(Мат. і мех.).– №4.–2012.
2. *Карпенко О. В., Кравець В. І., Станжицький О. М.* Коливність розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь другого порядку. Укр.мат.журн. –2013. –Т.65(2). – с.226-235.
3. *Мартинюк Д.І.* Лекции по качественной теории разностных уравнений: К.:Наукова думка, 1972, —247с.
4. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння: Підручник.- К.: Либідь, –2003.–600с.
5. *Скалкина М.А.* О колебаниях решений уравнений в конечных разностях. Изв. высших учебн.завед. Матем. –1959, –с.138-144.
6. *Скалкина М.А.* О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным: ДАН – 1955. – Т. 104. – № 4. –с. 505–508.
7. *Станжицький О.М., Ткачук А.М.* Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь. Укр.мат.журн.–2005.–№7, с.989-996.
8. *Aragwal R. P.* Asymptotic behavior of positive solutions if fourth-order non-linear difference equations. Ukrainian Math J.–2008–no.60(1).–c.8-27. (Ukraine)
9. *Ravi. P. Agarwal, Bohner M., Said R. Grace, Donal O'Regan* DescreteOscillation Theory. Hindawi Publishing Corporation. –2005. – 961 p.
10. *L. Grüne.* Asymptotic behavior of dynamical and control systems pertubation and discretization. Springer-Verlag, Berlin. – 2002. – 231 p.
11. *Ö. Öcalan.* Linearized oscillation of nonlinear difference equations with advanced arguments. Archivum math. Brno. –45.– 2009,– 203-212.

Одержано 23.01.2013