УДК 519.21, 519.718

І.В. Малик, І.В. Дорошенко (Чернівецький нац. ун-т)

НАПІВМАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ У СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

The sufficient conditions for weak convergence of semi-Markov random evolutions in diffusion approximation scheme to the diffusion process with restrictions in local characteristics of "basic" processes are obtained.

Одержано достатні умови слабкої збіжності напівмарковських випадкових еволюцій у схемі дифузійної апроксимації до дифузійного процесу при обмеженнях на локальні характеристики "базових"процесів.

Вступ. У роботі розглянуто достатні умови слабкої збіжності напівмарковських випадкових еволюцій $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$ у схемі дифузійної апроксимації з малим параметром $\varepsilon \to 0$ до дифузійного процесу $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$. Питанню слабкої збіжності для різних класів випадкових процесів присвячено роботи багатьох авторів. У роботах [1–3] розглянуто умови слабкої збіжності для випадкових процесів у різних метричних просторах, у тому числі у просторі неперервних функцій $C([0,1])$ та у просторі Скорохода $D([0,1])$. Одним з перших результатів, що стосуються дифузійної апроксимації є теорема Донскера ([3], §16), в якій розглянуто умови слабкої збіжності випадкового процесу

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

при $n \to \infty$ до вінерового процесу на $[0,1]$, де $S_n := \sum \xi_n$, $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, для яких $E\xi_n = 0$, $D\xi_n = \sigma^2$. У роботі [4] розглянуто умови слабкої збіжності у схемі дифузійної апроксимації для напівмарковської випадкової еволюції найпростішого виду – однорідного руху зі змінною швидкістю $X(t) = x + \int_0^t v(s)ds$, де $v(s)$ – однорідний марковський процес зі скінченною множиною станів у схемі дифузійної апроксимації у такому нормуванні

$$X^\varepsilon(t) = x + \varepsilon \int\limits_0^{t/\varepsilon^2} v(s)ds,$$

за умов, що усереднена еволюція тотожній 0.

Тому є доцільним розглядати умови збіжності випадкових процесів, що характеризують різні природні явища та вивчати властивості реальних об'єктів, що характеризуються допграничними процесами, за допомогою абстрактних об'єктів, що описуються граничними процесами.

1. Постановка задачі та позначення. Розглянемо напівмарковську випадкову еволюцію (НМВЕ) у R^d, що задається стохастичним адитивним функціоналом [5, 6]

$$\xi(t) = \xi(0) + \int\limits_0^t \eta(ds; x(s)) + \int\limits_0^t \gamma(ds; x(s)), t \geq 0. \tag{1}$$

Однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань $x(t)$, $t \geq 0$ розглядається у стандартному просторі $(E, \mathcal{E})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$ та визначений напівгрупою $Q_t\varphi(x) := \int_E \varphi(y)P_t(x, dy),\ t \geq 0$ [6–8], де $P_t(x, A) := \mathbb{P}\{x(t) \in A|x(0) = x\}$. Напівгрупа $Q_t,\ t \geq 0$ породжується генератором $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}\varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $P(x, A) := \mathbb{P}\{x_{k+1} \in A|x_k = x\}$ – ймовірність переходу для вкладеного ланцюга Маркова $x_k, k \geq 0$; $q(x)$ – інтенсивність стрибків [6, 7]. Позначимо через Π – проектор марковського процесу $x(t), t \geq 0$, R_0 – його потенціал (див. [6, 8]):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x), \quad R_0\varphi(x) := \int_0^\infty (Q_t - \Pi)\varphi(x)dt.$$

Напівмарковські процеси [6] $\eta(t; x)$, $t \geq 0$, $x \in E$ в евклідовому просторі R^d, $d \geq 1$ породжуються процесами марковського відновлення(ПМВ) $(\eta_n, \tau_n), n \geq 0$, де $\eta_n := \eta(\tau_n; x_n)$, $x_n := x(\tau_n)$, $\tau_n, n \geq 0$ – моменти відновлення напівмарковського процесу. ПМВ задаються напівмарковськими ядрами [6, 9]:

$$G(u, dv, t; x) := G(u, dv; x)F_u(t), \quad u \in R_d, \quad dv \in \mathcal{R}^d, \quad t \geq 0,\ x \in E,$$

де умовні розподіли приростів вкладеного ланцюга Маркова $\eta_n, n \geq 0$ визначаються співвідношенням:

$$G(u, dv; x) := \mathbb{P}\{\Delta\eta_{n+1} \in dv|\eta_n = u, x_n = x\}, \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n;$$

умовна функція розподілу часу перебування в станах $\theta_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$ рівна

$$F_u(t) := \mathbb{P}\{\theta_{n+1} \leq t|\eta_n = u\} = P(\theta_u \leq t), t \geq 0.$$

З вищенаведених означень зрозуміло, що розглядаються однорідні напівмарковські процеси. Позначимо через $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}$ – рахуючий процес, $\tau(t) := \tau_{\nu(t)}$ [6, 9].

Випадковий процес (1) запишемо у розгорнутому вигляді:

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \eta(\theta_n, x(\tau_{n-1}))+$$

$$\eta(t - \tau(t), x(\tau(t))) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \gamma(\theta_n, x(\tau_{n-1})) + \gamma(t - \tau(t), x(\tau(t))),$$

де $\theta_n := \tau_n - \tau_{n-1}, n \geq 0$ – час перебування у стані.

Введемо позначення

$$m_k(u) := \int_0^\infty t^k dF_u(t), \quad k = 1, 2; \quad \lambda(u) := 1/m_1(u);$$

$$\eta(t) := \int\limits_0^t \eta(ds; x(s)), \quad \gamma(t) := \int\limits_0^t \gamma(ds; x(s))ds;$$

$$G(x)\varphi(u) := \int\limits_{R^d} G(u, dv; x)\varphi(u+v), u \in R^d.$$

Неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \geq 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1} при умові, що $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \geq 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) + \int\limits_{R^d} (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x). \qquad (2)$$

Припустимо, що $a(u, x) \in C^1(R^d \times E)$, Γ – скінченна міра зі скінченним 3-м моментом.

Згідно введених вище позначень

$$\xi(t) = \xi(0) + \eta(t) + \gamma(t).$$

Зауважимо, що випадкові процеси $\eta(t)$ та $\gamma(t)$ є однорідними.

Розглянемо розширений ПМВ

$$\zeta_n := (\xi_n, x_n, \tau_n),$$

де $\xi_n := \xi(\tau_n)$, $x_n := x(\tau_n)$: Введемо поняття компенсуючого оператора(КО) [6,11]:

Означення 1. *Компенсуючим оператором L ПМВ $\zeta_n, n \geq 0$ називається оператор, що діє на тест-функціях φ та визначений співвідношенням*

$$L\varphi(u, x, t) := \lambda(u)\mathbb{E}[\varphi(\xi_{n+1}, x_{n+1}, \tau_{n+1}) - \varphi(\xi_n, x_n, \tau_n) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u, x, t)],$$

де φ – це такі функції, для яких права частина попередньої рівності має сенс.

Лема 1. *КО $\zeta_n, n \geq 0$ задається формулою*

$$L\varphi(u, x, t) = \lambda(u) \left[\int\limits_0^\infty F_u(ds) Q_s \Gamma_s(x) G(x)\varphi(u, x, t+s) - \varphi(u, x, t) \right]$$

для $u \in R^d, x \in E, t \geq 0$.

У роботі [10] можна знайти доведення даного результату.

2. Випадкові еволюції у схемі дифузійної апроксимації. НМВЕ у схемі дифузійної апроксимації розглядається у схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ у такому нормуванні:

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi(0) + \varepsilon^3[\eta^\varepsilon(t) + \gamma^\varepsilon(t)], \qquad (3)$$

$$\eta^\varepsilon(t) := \int\limits_0^{t/\varepsilon^6} \eta(ds; x(\varepsilon^2 s)), \ \gamma^\varepsilon(t) = \int\limits_0^{t/\varepsilon^6} \gamma(ds; x(\varepsilon^2 s)).$$

Тоді

$$\Delta\xi_n^\varepsilon := \xi_{n+1}^\varepsilon - \xi_n^\varepsilon = \varepsilon^3[\Delta\eta_n^\varepsilon + \Delta\gamma_n^\varepsilon].$$

Тут, за означенням,

$$\xi_n^\varepsilon := \xi^\varepsilon(\varepsilon^6\tau_n),\ \eta_n^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\varepsilon^6\tau_n),\ \gamma_n^\varepsilon := \gamma^\varepsilon(\varepsilon^6\tau_n).$$

Введемо позначення

$$G^\varepsilon(u,dv;x) := G_0(u,dv;x) + \varepsilon^2 G_1(u,dv;x), \tag{4}$$

$$g_k(u;x) := \int_{R^d} vG_k(u,dv;x), \quad G_k(u;x) := \int_{R^d} v^2 G_k(u,dv;x), k=0,1,$$

$$\Gamma(u;x) := \int_{R^d} v^2\Gamma(u,dv;x), \quad \mu(u) := \lambda(u)\int_0^\infty \overline{F}_u^{(2)}(s)ds,$$

$$c(u;x) := a(u;x)g_0'(u;x) + a(u;x)a'(u;x)\mu(u);$$

$$b(u;x) := \frac{1}{2}\left(\lambda(u)G_0(u;x) + \Gamma(u;x) + 2a^2(u;x)\mu(u) + 2a(u;x)g_0(u;x)\right).$$

Зауваження 1. *В означенні (4) G_0 – це ймовірнісна міра, G_1 – заряд, такий що $G_1(u,R^d;x)\equiv 0$ та $G^\varepsilon(u,dv;x)\geq 0$ для всіх $dv\in\mathcal{R}^d$. Можна представити також наступну конструкцію для G^ε:*

$$G^\varepsilon(u,dv;x) := \frac{G_0(u,dv;x)+\varepsilon^2 G_1(u,dv;x)}{1+\varepsilon^2},$$

де $G_k, k=1,2$ – ймовірнісні міри.

Розглянемо умови слабкої збіжності для НМВЕ у схемі дифузійної апроксимації, що задається стохастичним адитивним функціоналом (3):

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *марковський процес переключень є рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B\in\mathcal{E}$;*

2) *виконуються умови балансу:*

$$a(u;x) + \lambda(u)g_0(u;x) \equiv 0, \tag{5}$$

$$\Pi g_1(u;x) \equiv 0; \tag{6}$$

3) *справедлива оцінка*

$$\sup_{u\in R^d}\int_0^\infty s^3 F_u(ds) < \infty;$$

4) *оператори*

$$l^\varepsilon\varphi(u) := \varepsilon^{-2}\int_{R^d}\left(\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u) - \varepsilon v\varphi'(u) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 v^2\varphi''(u)\right)\times$$

$$\times(\Gamma(u,dv;x) + G^\varepsilon(u,dv;x)),$$

є знехтуючими рівномірно по $x\in E, u\in R^d$ для тест-функцій $\varphi\in C^3(R^d)$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\sup_{x\in E, u\in R^d} ||l^\varepsilon(x)\varphi|| \to 0, \varepsilon\to 0;$$

5) збіжність початкових умов та їх обмеженість:

$$\xi^\varepsilon(0) \to \xi^0(0), \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}|\xi^\varepsilon(0)| \le K < \infty.$$

Тоді стохастичний адитивний функціонал $\xi^\varepsilon(t), t \ge 0$ (3) слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ до дифузійного процесу $\xi^0(t), t \ge 0$, що визначається генератором

$$L\varphi(u) = \widehat{c}(u)\varphi'(u) + \widehat{B}(u)\varphi''(u),$$

де

$$\widehat{c}(u) := \int_E \pi(dx)c(u;x), \widehat{B}(u) := \int_E \pi(dx)b(u;x) + \lambda^2(u)\int_E \pi(dx)g_1(u;x)R_0 g_1(u;x)$$

та задовольняє початкову умову

$$\xi^0(0) = \xi_0.$$

Зауваження 2. *Умова (5) означає, що усереднена еволюція [10] тотожна константа, тобто усереднена еволюція $\rho(t), t \ge 0$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = 0.$$

Перед доведенням теореми 1, наведемо декілька допоміжних тверджень. Для цього визначимо випадковий процес $\zeta^\varepsilon(t)$, породжений сім'єю розширеного ПМВ

$$\zeta_n^\varepsilon := (\varepsilon^3\xi(\tau_n), x(\varepsilon^4\tau_n), \varepsilon^6\tau_n). \tag{7}$$

Має місце

Лема 2. *КО (7) задається формулою*

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-6}\lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^4 s}G^\varepsilon(x)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^6 s) - \varphi(u,x,t)\right]$$

для обмежених неперервних тест-функцій φ, де I – одиничний оператор, оператори $G^\varepsilon(x), x \in E$ визначені наступним чином:

$$G^\varepsilon(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G^\varepsilon(u,dv;x)\varphi(u+\varepsilon^3 v),$$

напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x), x \in E$ породжуються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^3 a(u;x)\varphi'(u) + \int_{R^d}(\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u) - \varepsilon^3 v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x). \tag{8}$$

Доведення леми 2 цілком аналогічне доведенню леми 2 з [10] тільки з іншим нормуванням, тому його тут наводити не будемо.

Розглянемо асимптотичне представлення КО L^ε:

Лема 3. *В умовах теореми 1 компенсуючий оператор L^ε на тест-функціях $\varphi \in C^3(R^d \times E)$ має асимптотичне представлення*

$$L^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x) + \varepsilon^{-1}C_1(x)\varphi(u,\cdot) + B(x)\varphi(u,\cdot) + l^\varepsilon\varphi(u,x),$$

де

$$C_1(x)\varphi(u) := \lambda(u)g_1(u;x)\varphi'(u),$$
$$B(x)\varphi(u) = c(u;x)\varphi'(u) + b(u;x)\varphi''(u),$$
$$\sup_{u\in R^d, x\in E} |l^\varepsilon\varphi(u,x)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \varphi \in C^3(R^d \times E).$$

Доведення. Скористаємося лемою 2 та алгебраїчною тотожністю

$$\begin{aligned} abc - 1 = (a-1) + (b-1) + (c-1) + (a-1)(b-1) + (a-1)(c-1) + \\ +(b-1)(c-1) + (a-1)(b-1)(c-1). \end{aligned} \tag{9}$$

Тоді

$$[L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-6}\lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^4 s}G^\varepsilon(x)\Gamma_s^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x) =$$

$$\begin{aligned} =\varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)[Q_{\varepsilon^4 s} - I]\varphi(u,x) + \varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)[\Gamma_s^\varepsilon(x) - I]\varphi(u,x) + \\ +\varepsilon^{-6}\lambda(u)[G^\varepsilon(x) - I]\varphi(u,x) + \varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)[G^\varepsilon(x) - I][\Gamma_s^\varepsilon(x) - I]\varphi(u,x) + \\ +l_1^\varepsilon\varphi(u,x), \end{aligned} \tag{10}$$

де $l_1^\varepsilon\varphi(u,x)$ відповідає доданкам 4, 5 та 7 з правої частини алгебраїчної тотожності (9).

Розглянемо перший доданок правої частини (10):

$$\varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\left(Q_{\varepsilon^4 s} - I\right)\varphi(x) = \varepsilon^{-2}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\mathbb{Q}\int_0^s Q_{\varepsilon^4 s_1}ds_1\varphi(x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\lambda(u)\mathbb{Q}\int_0^\infty \overline{F}_u(s)Q_{\varepsilon^4 s}ds\varphi(x) = \varepsilon^{-2}\mathbb{Q}\varphi(x) + l_2^\varepsilon(u)\varphi(x),$$

де

$$l_2^\varepsilon(u)\varphi(x) := \varepsilon^{-2}\lambda(u)\mathbb{Q}\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\left(Q_{\varepsilon^4 s} - I\right)ds\varphi(x) = \varepsilon^2\lambda(u)\mathbb{Q}^2\int_0^\infty \overline{F}_u^{(2)}(s)Q_{\varepsilon^4 s}ds\varphi(x),$$

$$\overline{F}_u(s) := 1 - F(s), \overline{F}_u^{(2)}(s) := \int_0^{+\infty}\overline{F}_u(s)ds.$$

Останню рівність можна отримати, використовуючи зв'язок напівгрупи з генератором, що її породжує та заміну порядку інтегрування у подвійному інтегралі.

Для другого доданка з (10), використовуючи заміну порядку інтегрування в подвійному інтегралі, отримаємо:

$$\varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^s \Gamma^\varepsilon_{s_1}(x)ds_1\varphi(u) = \varepsilon^{-6}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\Gamma^\varepsilon_s(x)ds\varphi(u) =$$

$$= \varepsilon^{-6}\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) + \varepsilon^{-6}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^\infty \overline{F}_u(s)(\Gamma^\varepsilon_s(x) - I)ds\varphi(u).$$

Використовуючи означення $\Gamma^\varepsilon(x)$ (8) та формулу Тейлора, отримаємо, що другий доданок (10) рівний

$$\varepsilon^{-3}a(u;x)\varphi'(u) + \frac{1}{2}\Gamma(u,x)\varphi''(u) + \mu(u)a^2(u;x)\varphi''(u) +$$

$$+\mu(u)a(u;x)a'(u;x)\varphi'(u) + l_3^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

де $l_3^\varepsilon(x)\varphi(u)$ – знехтуючий член на тест-функціях $\varphi \in C^3(R^d)$.

Скориставшись формулою Тейлора для 3-го доданку з (10), отримаємо:

$$\varepsilon^{-6}\lambda(u)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u) = \varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_{R^d} G^\varepsilon(u,dv;x)(\varphi(u+\varepsilon^3 v) - \varphi(u)) =$$

$$\lambda(u)(\varepsilon^{-3}g_0(u;x) + \varepsilon^{-1}g_1(u;x))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\lambda(u)\int_{R^d} v^2 G_0(u,dv;x)\varphi''(u) + l_4^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

де

$$l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x) :=$$

$$:= \varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_{R^d} G^\varepsilon(u,dv;x)\left(\varphi(u+\varepsilon^3 v, x) - \varphi(u,x) - \varepsilon^3 v\varphi'(u) - \frac{1}{2}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u)\right).$$

Для четвертого доданка з (10), використовуючи формулу Тейлора для $G^\varepsilon(x) - I$ та зв'язок напівгрупи з її генератором для $\Gamma^\varepsilon_s(x) - I$, маємо

$$\varepsilon^{-6}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\left[G^\varepsilon(x) - I\right]\left[\Gamma^\varepsilon_s(x) - I\right]\varphi(u) =$$

$$= a(u;x)g_0(u;x)\varphi''(u) + a(u;x)g_0'(u;x)\varphi'(u) + l_5(x)\varphi(u),$$

де $l_5(x)\varphi(u)$ – знехтуючий член для тест-функцій $\varphi \in C^3(R^d)$ при $\varepsilon \to 0$.

Згідно побудови напівгруп $\Gamma^\varepsilon_t(x), Q_{\varepsilon^4 t}, t \geq 0, x \in E$ та операторів $G^\varepsilon(x), x \in E$ зрозуміла оцінка

$$\sup_{u\in R^d, x\in E} \left|\left(l_1 + l_2(u) + l_3(x) + l_4(x) + l_5(x)\right)\varphi(u,x)\right| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

для тест функцій $\varphi \in C^3(R^d \times E)$.

Таким чином КО набуде вигляду

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}C(x)\varphi(u,\cdot) + \varepsilon^{-2}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x) + \varepsilon^{-1}C_1(x)\varphi(u,\cdot) + B(x)\varphi(u,\cdot) + l^\varepsilon\varphi(u,x),$$

де

$$C(x)\varphi(u) := (a(u;x) + \lambda(u)g_0(u;x))\varphi'(u).$$

Використовуючи умову балансу (5), отримуємо твердження леми 3. Лема 3 доведена.

Наслідок 1. *Вірне представлення*

$$c(u;x) := g_0(u;x)a'(u;x) + a(u;x)a'(u;x)\mu(u).$$

Сформулюємо теорему 6.6 з [6], на якій буде грунтуватися слабка збіжність для НМВЕ (3):

Теорема 2. *Нехай:*

1) сім'я випадкових процесів $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0, \varepsilon > 0$ є відносно компактною;

2) існує сім'я тест функцій $\varphi^\varepsilon(u,x) \in C^3(R^d \times E)$, для яких

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u);$$

3) рівномірна збіжність КО:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{u\in R^d, x\in E} |L^\varepsilon\varphi^\varepsilon(u,x) - L\varphi(u)| = 0;$$

4) збіжність за ймовірністю початкових умов

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \xi^\varepsilon(0) = \xi^0(0),$$

та їх обмеженість

$$\sup_{\varepsilon>0} E|\xi^\varepsilon(0)| < C.$$

Тоді має місце слабка збіжність $\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi^0(t)$, причому граничний процес характеризується мартингалом

$$z_t := \varphi(\xi^0(t)) - \int_0^t L\varphi(\xi^0(s))ds.$$

Означення та умови відносної компактності сім'ї ймовірнісних мір (випадкових процесів) можна знайти в [1–3].

Доведення теореми 1. Для $\varphi \in C(E)$ зрозуміле співвідношення

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \varphi(x)\pi(dx) =: \widehat{\varphi}.$$

Проблема сингуляргого збурення (див. [6], Розділ 5) для оператора $L_0^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbb{Q}+\varepsilon^{-1}C_1(x)+B(x)$ розв'язується на збурених тест функціях $\varphi^\varepsilon = \varphi+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2$:

$$L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q\varphi + \varepsilon^{-1}[Q\varphi_1 + C_1(x)\varphi] + [Q\varphi_2 + C_1(x)\varphi_1 + B(x)\varphi] +$$

$$+\varepsilon[C_1(x)\varphi_2 + B(x)\varphi_1] + \varepsilon^2 B(x)\varphi_2.$$

Згідно твердженнь 5.2 та 5.10. [6] розв'язок проблеми сингулярного збурення при виконанні умови (6) для оператора L_0^ε має вигляд

$$L_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = L\varphi(u) + \varepsilon l^\varepsilon(x)\varphi(u)$$

на збурених функціях $\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,x)$, $\varphi \in C^3(R^d)$, де

$$L := \Pi B(x)\Pi + \Pi C_1(x) R_0 C_1(x)\Pi. \tag{11}$$

Перевіримо умови теореми 2. Умова 4 теореми 2 співпадає з умовою 5 теореми 1, тому вона виконується. Умови 2 та 3 теореми 2 виконується, якщо в якості граничного оператора взяти оператор (11) та $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2$, де $\varphi_k \in C^3(R^d \times E), k = 1, 2$. Для перевірки умови 1 теореми 2 скористаємося теоремою 1.4.6 з [2]. Згідно цієї теореми потрібно довести, щоб випадковий процес

$$\varphi(\xi^\varepsilon(t)) + A_\varphi t$$

є невід'ємним субмартингалом для $\varphi \in C^\infty(R^d)$. Це неважко перевірити (див. [6], с. 204), якщо

$$A_\varphi = K \sup_{x \in R^d} \max\left\{|\varphi(u)|, |\varphi'(u)|, |\varphi''(u)|\right\},$$

де $K > 0$ – деяка константа.

Таким чином всі умови теореми 2 виконуються. Теорема 1 доведена.

Автори висловлюють щиру подяку академіку НАН України В.С. Королюку за постановку задачі та цінні зауваження щодо методів її розв'язання.

1. *Ethier S.N. Kurtz T.G.* Markov processes: Characterization and convergence. – New York: Wiley-Interscience, 1986. – 534 p.
2. *Stroock D.W. and Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. – Berlin: Springer-Verlag, 1979. – 338 p.
3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
4. *Pinsky M.A.* Lectures on Random Evolutions. – Singapore: World Scientific Publishers, 1991. – 135 p.
5. *Королюк В.С.* Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Укр. матем. журн. – 2010. – 57, №6. – С. 22-26.
6. *Koroliuk V.S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific Publishers, 2005. – 331 p.
7. *Blumenthal R.M., Getoor R.K.* Markov processes and potential theory. – New York: Dover publication, INC, 1996. – 313 p.
8. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М. Физматгиз, 1967. – 860 с.
9. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.
10. *Малик І.В.* Напівмарковські випадкові еволюції у схемі усереднення // Подано до друку у Вісник Ужгородського національного університету. – 2012. – №2. – С. 118-126.
11. *Sviridenko M.N.* Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind // Math. Notes. – 1998. – 43, No 5. – P. 398-402.

Одержано 08.04.2013