УДК 519.21: 519.6

А. О. Пашко (Європейський ун-т)

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

In the works studied method of simulation of homogeneous Gaussian random fields, based on the spectral representation of fields. Found parameter estimation models that approximate the field with the specified precision and reliability.

В роботі досліджується метод моделювання гауссових однорідних випадкових полів, що базується на спектральному представленні таких полів. Знайдено оцінки параметрів моделей, що наближають поля із заданою точністю і надійністю.

Вступ. В роботі продовжуються дослідження методів моделювання випадкових полів, що базуються на основі спектральних розкладів [1, 2]. Знайдено оцінки точності моделювання та параметри моделей для гауссових однорідних випадкових полів.

1. Основні означення. Нехай (Ω, B, P) – стандартний ймовірносний простір, (R^d, Σ, ν) – деякий вимірний простір, Σ – борелівська σ -алгебра, $\nu(.)$ – скінчена міра. Нехай $\rho(\vec{t}, \vec{s})$ – деяка евклідова метрика або метрика їй еквівалентна. Наприклад, $\rho(\vec{t}, \vec{s}) = \max_{i=\overline{1,d}} |t_i - s_i|$, де $\vec{t}^{\top} = (t_1, \ldots, t_d)$, $\vec{s}^{\top} = (s_1, \ldots, s_d)$. Певну метрику вибиратимемо залежно від особливостей задачі моделювання.

Нехай T – множина вигляду $T = \{\vec{t}\colon \rho(\vec{t}, 0) \leq L\}$, де $L \geq 0$ деяке число. Нехай $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ – центроване випадкове поле, що може бути зображене у вигляді

$$X(\vec{t}) = \sum_{r=1}^{N} \int_{R^d} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})\, dZ_r(\vec{\lambda}),$$

де $Z_r(S)$, $S \in \Sigma$ – некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі ν, а $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})$ такі функції, що при кожному $\vec{t} \in T$ $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) \in L_2(R^d, \nu)$, а при кожному $\vec{\lambda} \in R^d$ функція $f(\vec{t}, \vec{\lambda})$ неперервна по $\vec{t}$. Позначимо через $L_p(T)$ простір функцій, для яких

$$\int_T |\varphi(\vec{t})|^p \, d\vec{t} < \infty, \qquad p \geq 1.$$

Нехай A – однозв'язна, з кусково-гладкою межею область в R^d, D_n – розбиття області A на n однозв'язних областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ з кусково-гладкими межами, $\vec{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – фіксовані точки в R^d такі, що $\vec{\lambda}_i \in \Delta_i$. Позначимо

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i) Z_r(\Delta_i).$$

Означення 1. *Випадкове поле $X_n(\vec{t}, A)$ називатимемо апроксимаційною моделлю поля $X(\vec{t})$ або (Ар-моделлю).*

Зауважимо, що $Z_r(\Delta_i)$ – це некорельовані випадкові величини такі, що $EZ_r(\Delta_i) = 0$, $E(Z_r(\Delta_i))^2 = \nu(\Delta_i)$, тобто апроксимаційна модель процесу X це сума $\sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i)\theta_i$, де θ_i – некорельовані випадкові величини такі, що $E\theta_i = 0$, $E\theta_i^2 = \nu(\Delta_i)$.

В розкладах гауссових випадкових полів, ці величини є гауссовими. Оскільки при моделюванні випадкових величин не можна отримати точно гауссові величини, а лише з деякою точністю, то в якості θ_i можна розглядати послідовність строго субгауссових випадкових величин.

Нехай $\delta > 0$ і $\alpha > 0, \alpha \in (0,1)$ – деякі числа.

Означення 2. *Будемо говорити, що $X_n(\vec{t}, A)$ наближає поле $X(\vec{t})$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю $\alpha > 0$ в деякому функціональному просторі, якщо*

$$P\{||X(\vec{t}) - X_n(\vec{t}, A)|| > \delta\} \leq 1 - \alpha \tag{1}$$

де $||.||$ - норма функціонального простору.

В роботі [2] були знайдені оцінки (1) для субгауссових випадкових полів у просторах $L_2(T)$ та $L_p(T)$.

Означення 3. *Сім'я випадкових мір $Z_r(S)$, $S \in \Sigma$, $r = 1, 2, \ldots, N$ називається строго субгауссовою, якщо сім'я випадкових величин $Z_r(S)$, $r = 1, 2, \ldots, N$, $S \in \Sigma$ є строго субгауссовою.*

Означення 4. *Випадкове поле називатимемо строго субгауссовим у вузькому розумінні, якщо сім'я випадкових мір $Z_r(S)$, $r = 1, 2, \ldots, N$ є строго субгауссовою.*

Властивості субгауссових випадкових величин досліджувались в роботі [3].

Означення 5. *Випадкове поле $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in R^d\}$ називається однорідним в широкому розумінні в R^d, якщо $EX(\vec{t})$ =const, $\vec{t} \in R^d$ та $EX(\vec{t})X(\vec{s}) = B(\vec{t} - \vec{s})$, $\vec{t}, \vec{s} \in R^d$.*

Надалі будемо розглядати центровані однорідні гауссові дійсні поля: $EX(\vec{t}) = 0$.

Функція $\nu(\vec{\lambda})$ називається спектральною функцією поля. Якщо спектральна функція поля абсолютно неперервна, тобто допускає представлення $\nu(\vec{\lambda}) = \int_{R^d} f(\vec{\lambda}) d(\vec{\lambda})$, то $f(\vec{\lambda})$ називається спектральною щільністю однорідного випадкового поля.

Має місце теорема про спектральний розклад однорідних полів [4].

Теорема 1. *Кореляційна функція дійсного центрованого однорідного випадкового поля $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in R^d\}$ допускає зображення*

$$B(\vec{t}) = \int\limits_{R^d} \cos(\vec{\lambda}, \vec{t})\, d\nu(\vec{\lambda}),$$

де $(\vec{\lambda}, \vec{t})$ – скалярний добуток, $\nu(\cdot)$ – скінчена міра на σ-алгебрі борелівських множин в R^d, а саме поле допускає зображення у вигляді стохастичного інтегралу

$$X(\vec{t}) = \int\limits_{R^d} \cos(\vec{\lambda}, \vec{t})\, dZ_1(\vec{\lambda}) + \int\limits_{R^d} \sin(\vec{\lambda}, \vec{t})\, dZ_2(\vec{\lambda}),$$

де $Z_1(\vec{\lambda})$ та $Z_2(\vec{\lambda})$ некорельовані випадкові міри, підпорядковані мірі $\nu(\cdot)$.

На основі результатів роботи [2] для гауссових випадкових полів мають місце теореми.

Теорема 2. *Нехай* $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ *гауссове однорідне випадкове поле. Випадкове поле* $X_n(\vec{t}, A)$ *є* Ap *-моделлю, що наближає поле* X *з надійністю* $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$ *та точністю* $\delta > 0$ *в* $L_2(T)$, *якщо область* A *та її розбиття* D_n *вибрано так, що виконуються нерівності*

$$B(D_n, A) < \delta^2, \quad \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{(B(D_n, A))^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B(D_n, A)}\right\} < \alpha,$$

де

$$B(D_n, A) = \int\limits_T B(\vec{t}, D_n, A)\, d\vec{t},$$

$$B(\vec{t}, D_n, A) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i} 4\sin^2((\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}_i)/2) d\nu(\vec{\lambda}) + \nu(R^d \setminus A).$$

Теорема 3. *Нехай* $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ *гауссове однорідне випадкове поле. Тоді випадкове поле* $X_n(\vec{t}, A)$ *є* Ap*-моделлю, що наближає поле* X *з надійністю* $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$ *та точністю* $\delta > 0$ *в* $L_p(T)$, $p \geq 1$, *якщо область* A *та її розбиття* D_n *вибрано так, що виконуються нерівності*

$$(G(D_n, A))^{\frac{1}{2}} (m(T))^{\frac{1}{p}} \leq \delta \quad \textit{при} \quad 1 \leq p \leq 2,$$

$$(G(D_n, A))^{\frac{1}{2}} (m(T))^{\frac{1}{p}} (p+1)^{\frac{1}{2}} \leq \delta \quad \textit{при} \quad p > 2,$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{(G(D_n, A))^{\frac{1}{2}} (m(T))^{\frac{1}{p}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G(D_n, A)(m(T))^{\frac{2}{p}}}\right\} \leq \alpha,$$

де $G(D_n, A) = \sup_{\vec{t} \in T} B(\vec{t}, D_n, A)$, $m(T)$ – *міра Лебега множини* T *в* R^d.

Розглянемо алгоритм моделювання таких полів. Для того, щоб побудувати Ap-модель поля, досить побудувати область A, її розбиття D_n, знайти та оцінити для цього розбиття величини $B(\vec{t}, D_n, A)$, $B(D_n, A)$ та $G(D_n, A)$, а потім скористатися однією з теорем 2–3 залежно від того, в якому просторі ми бажаємо наблизити поле X його Ap-моделлю.

Виберемо область A та розбиття D_n у такий спосіб. Нехай $A = \{\vec{\lambda}\colon\ \rho(\vec{\lambda}, 0) < \Lambda\}$, $\Lambda > 0$, $\rho(\vec{\lambda}, 0) = \max_{1 \leq i \leq d} |\lambda_i|$. Для деякого цілого $m > 0$ позначимо $k_{r_i} = \frac{\Lambda r_i}{m}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, r_i – цілі числа, що $-m \leq r_i \leq m-1$, $\vec{\lambda}(r_1, \ldots, r_d) = (k_{r_1}, k_{r_2}, \ldots, k_{r_d})^{\top}$. Розбиття D_n визначаємо його елементами $\Delta(r_1, \ldots, r_d) = \{\vec{\lambda}\colon\ k_{r_s} \leq \lambda_s$

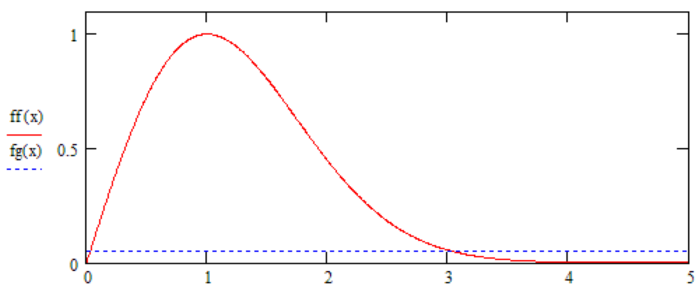

Рис. 1. Графік функції $ff(x)$

Таблиця 1.

Основні параметри для моделювання випадкового поля з спектральною щільністю $f_1(\vec{\lambda})$ в L_2

δ	1-α	k	Λ	m
0.1	0.05	2	170	25000
		3	10	1150
		5	3	210
		10	1.10	65
0.05	0.05	2	180	250000
		2	220	85000
		2	250	80000
		2	260	80500
		3	15	3200
		4	6	960
		10	1.5	1300

Функція $ff(x) = x\exp\{-x^2/2+1/2\}$ використовується для оцінки надійності моделі і має вигляд (рис. 1), для $x \geq 1$ є монотонно спадною функцією.

Основні рівні надійності $\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.99$ та $\alpha = 0.999$ досягаються при $x = 3.034$, $x = 3.562$ та $x = 4.206$ відповідно. При моделюванні потрібно вибрати область A та оцінити m.

2. Оцінка параметрів моделі для випадкових полів на площині. На площині модель гауссового однорідного поля можна представити у вигляді

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\cos(\vec{t}, \vec{\lambda}) Z_1(\Delta_i) + \sin(\vec{t}, \vec{\lambda}) Z_2(\Delta_i) \right).$$

Отже, при моделюванні сім'ю випадкових величин $\{Z_1(\Delta_i), Z_2(\Delta_i)\}$ розглядатимемо, як сім'ю некорельованих (незалежних) строго субгауссових випадкових величин таких, що

$$EZ_1^2(\Delta_i) = EZ_2^2(\Delta_i) = \nu(\Delta_i).$$

Для $B(D_n, A)$ та $G(D_n, A)$ мають місце оцінки

$$B(\vec{t}, D_n, A) \leq \frac{\Lambda^2 d}{m^2} \nu(A) \sum_{i=1}^{d} t_i^2 + \nu(R^d \setminus A),$$

$$B(D_n, A) \leq \frac{2^d \Lambda^2 d^2 L^{d+2}}{3m^2} \nu(A) + \nu(R^d \setminus A)(2L)^d,$$

$$G(D_n, A) \leq \frac{\Lambda^2 d^2 L^2}{m^2} \nu(A) + \nu(R^d \setminus A).$$

В якості спектральної щільності розглянемо функції $f_1(\vec{\lambda}) = \frac{1}{((1+|\vec{\lambda}|^2)^k)}$, $k \geq 2$ та $f_2(\vec{\lambda}) = \frac{1}{((1+|\vec{\lambda}|^{2k})^2)}$, $k \geq 1$. Область $A = \{\vec{\lambda} : \rho(\vec{\lambda}, 0) \leq \Lambda\}$ буде квадрат зі стороною 2Λ . В таблицях 1-3 зведені результати оцінки для різних значень точності і надійності. В розрахунках вважалось, що $L = 1$ та $m(T) = 1$.

Таблиця 2.

Основні параметри для моделювання випадкового поля з спектральною щільністю $f_1(\vec{\lambda})$ в $L_p, p = 1$

δ	1-α	k	Λ	m
0.1	0.05	2	100	12500
		2	80	11000
		3	10	810
		3	8	700
		3	7	690
0.05	0.05	2	180	44500
		2	170	43000
		2	160	42000
		2	150	42200
		3	12	2050
		3	10	1970

Таблиця 3.

Основні параметри для моделювання випадкового поля з спектральною щільністю $f_2(\vec{\lambda})$ в L_2

δ	1-α	k	Λ	m
0.1	0.05	2	5	600
		2	9	1000
		3	3	340
		4	3	340
		4	2	235

При виборі параметрів моделювання необхідно знайти компроміс між значеннями A та m, перевага надається меншому m.

1. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В.* Моделювання випадкових полів. – К.: Задруга, 2007. – 230 с.
2. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О.* Моделювання випадкових полів I // Теор. ймов. та мат. статистика. – 1999. – **61**, – С. 59–71.
3. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов . – К.: ТВиМС, 1998. – 289 с.
4. *Ядренко М. Й.* Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища школа. лит., 1980. – 208 с.

Одержано 26.03.2013