УДК 517.9

Г. Я. Семчишин (Ужгородський нац. ун-т)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We obtain necessary and sufficient conditions for existence of solution of initial value problem for a degenerate system of differential equations.

Одержано необхідні та достатні умови існування розв'язку задачі Коші для вироджених систем диференціальних рівнянь.

Під час розв'язання різноманітних задач, що виникають в таких прикладних галузях, як математична економіка, робототехніка, обробка цифрових зображень, теорія керування, теорія електронних схем та електричних кіл, радіофізика, хімічна та біологічна кінетики тощо [1, 2], дослідники стикаються з виродженими системами диференціальних рівнянь. Такі системи розглядаються як українськими [3, 4] та російськими [6, 7] вченими, так і закордонними [8, 9].

У даній роботі досліджуються вироджені системи диференціальних рівнянь у випадку, коли при похідній шуканої функції знаходиться блочно-діагональна матриця, одним з блоків якої є нільпотентний блок Жордана. Для задачі Коші для таких вироджених систем одержано необхідні та достатні умови існування розв'язку.

1. Постановка задачі. Розглянемо для виродженої системи диференціальних рівнянь

$$B_0(t)\frac{dz}{dt} = A_0(t)z(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

задачу Коші з початковою умовою

$$z(t_0) = z_0, \quad t_0 \in [a, b], \tag{2}$$

де $rank B_0(t) = n + m - 1$ $\forall t \in [a, b]$, $A_0(t)$, $B_0(t)$ – $((n + m) \times (n + m))$-вимірні матриці, J – $(m \times m)$-вимірна стала матриця, $f(t)$ – $(n + m)$-вимірна векторфункція, які мають наступну структуру:

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad A_0(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f^{(1)}(t) \\ f^{(2)}(t) \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$A_1(t)$, $B_1(t)$ – $(n \times n)$-вимірні, $A_2(t)$ – $(m \times m)$-вимірна матриці, компоненти яких є дійсними неперервними на $[a, b]$ функціями: $A_1(t), A_2(t), B_1(t) \in C[a, b]$; $det B_1(t) \neq 0$; $f^{(1)}(t)$ – n-вимірна, $f^{(2)}(t)$ – m-вимірна вектор-функції із простору $C[a, b]$.

Під розв'язком задачі Коші (1),(2) будемо розуміти неперервно диференційовну на $[a, b]$ $(n + m)$-вимірну вектор-функцію

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, яка задовольняє систему (1) та початкову умову (2).

У просторі неперервно диференційовних $(n+m)$-вимірних вектор-функцій $C^1[a,b]$ розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор $L^\top$:

$$L(t) = A_0(t) - B_0(t)\frac{d}{dt}, \quad L^\top(t) = A_0^\top(t) + \frac{d}{dt}B_0^\top(t).$$

2. Структура загального розв'язку вироджених систем диференціальних рівнянь. Враховуючи структуру матриць $A_0(t)$, $B_0(t)$ та вектор-функції $f(t)$, вироджена система диференціальних рівнянь (1) розщеплюється на дві незалежні одна від одної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B_1^{-1}(t)A_1(t)x(t) + B_1^{-1}(t)f^{(1)}(t); \tag{3}$$

$$J\frac{dy}{dt} = A_2(t)y(t) + f^{(2)}(t). \tag{4}$$

Загальний розв'язок невиродженої диференціальної системи (3) має вигляд

$$x(t) = X(t)\bar{c} + \tilde{x}(t), \tag{5}$$

де $X(t)$ – $(n \times n)$-вимірна фундаментальна матриця відповідної (3) однорідної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B_1^{-1}(t)A_1(t)x(t), \tag{6}$$

а $X(t,s)$, $X(s,s) = E_n$ – матрицант системи (6), $\bar{c} \in R^n$ – вектор довільних сталих, $\tilde{x}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівняння (3).

Представимо матрицю $A_2(t)$ наступним чином

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ a_{m,1}^{(2)}(t) & D_3(t) \end{bmatrix},$$

де $D_1(t)$ – $((m-1) \times 1)$-вимірна, $D_2(t)$ – $((m-1) \times (m-1))$-вимірна, $D_3(t)$ – $(1 \times (m-1))$-вимірна матриці. Нехай

$$y(t) = col\left[y_1(t), v(t)\right], \quad f^{(2)}(t) = col\left[p(t), f_m^{(2)}(t)\right],$$

де $v(t){=}col(y_2(t), \ldots, y_m(t))$, $p(t){=}col(f_1^{(2)}(t), \ldots, f_{m-1}^{(2)}(t))$ – $(m{-}1)$-вимірні вектор-функції. Тоді вироджену систему (4) можна записати наступним чином

$$\frac{dv}{dt} = D_1(t)y_1(t) + D_2(t)v(t) + p(t), \tag{7}$$

$$0 = a_{m,1}^{(2)}(t)y_1(t) + D_3(t)v(t) + f_m^{(2)}(t), \tag{8}$$

де (7) – це $(m-1)$- вимірна система звичайних диференціальних рівнянь, (8) – алгебраїчне рівняння.

Структура розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь (1) залежить від значення $a_{m,1}^{(2)}(t)$. Розглянемо випадок, коли $a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Виразимо $y_1(t)$ з (8)

$$y_1(t) = -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)}\left(D_3(t)v(t) + f_m^{(2)}(t)\right)$$

і підставимо його в систему (7):

$$\frac{dv}{dt}=\left(D_2(t)-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_1(t)D_3(t)\right)v(t)+\left(J_1-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_1(t)J_2\right)f^{(2)}(t), \tag{9}$$

де J_1 – $((m-1)\times m)$-вимірна матриця, J_2 – m-вимірний вектор-рядок вигляду

$$J_1=[E_{m-1},0_{m-1,1}],\quad J_2=[0_{1,m-1},1],$$

E_{m-1} – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна одинична матриця, а через $0_{i,j}$ будемо позначати $(i\times j)$-вимірну нульову матрицю.

Загальний розв'язок системи рівнянь (9) має вигляд

$$v(t)=V(t)\tilde{c}+\tilde{v}(t), \tag{10}$$

де $V(t)$ – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна фундаментальна матриця відповідної (9) однорідної системи рівнянь

$$\frac{dv}{dt}=\left(D_2(t)-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_1(t)D_3(t)\right)v(t), \tag{11}$$

а $V(t,s)$, $V(s,s)=E_{m-1}$ – матрицант системи (11), $\tilde{c}\in R^{m-1}$ – вектор довільних сталих, $\tilde{v}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівняння (9).

Таким чином, можемо записати:

$$y_1(t)=-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_3(t)V(t)\tilde{c}-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_3(t)\tilde{v}(t)-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}f^{(2)}_m(t). \tag{12}$$

Об'єднуючи (10) і (12) одержимо загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (4):

$$y(t)=Y(t)\tilde{c}+K(t)\tilde{v}(t)+W_1(t)f^{(2)}(t), \tag{13}$$

де $Y(t)$ – $(m\times(m-1))$-вимірна матриця, яка складається з $m-1$ лінійно незалжних розв'язків відповідної (4) однорідної виродженої системи: $Y(t)=K(t)V(t)$; $K(t)$ – $(m\times(m-1))$-вимірна, $W_1(t)$ – $(m\times m)$-вимірна матриці вигляду

$$K(t)=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_3(t)\\ E_{m-1}\end{bmatrix},\quad W_1(t)=\begin{bmatrix}0_{1,m-1} & -\dfrac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}\\ 0_{m-1,m-1} & 0_{m-1,1}\end{bmatrix}.$$

Таким чином, враховуючи структуру розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ вигляду (5) і (13) відповідно, загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (1) можемо записати у вигляді

$$z(t)=\begin{bmatrix}X(t) & 0\\ 0 & Y(t)\end{bmatrix}c+\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ K(t)\tilde{v}(t)+W_1(t)f^{(2)}(t)\end{bmatrix},$$

або

$$z(t)=Z(t)c+\tilde{z}(t), \tag{14}$$

де $Z(t)$ – $((n+m)\times(n+m-1))$-вимірна блочно-діагональна матриця, яка складається з $n+m-1$ лінійно-незалежних розв'язків відповідної (1) однорідної виродженої системи

$$B_0(t)\frac{dz}{dt} = A_0(t)z(t), \quad t \in [a,b], \tag{15}$$

$c \in \mathbb{R}^{n+m-1}$, $c = col(\bar{c}, \tilde{c})$ – вектор довільних сталих, $\tilde{z}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної виродженої системи рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь* (1) *виконується умова:* $a^{(2)}_{m,1}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. *Тоді вироджена система диференціальних рівнянь* (1) *має* $(n+m-1)$*-параметричну сім'ю розв'язків вигляду* (14).

Зауваження 1. *Якщо* $rank B_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$, *то формула* (14) *співпадає з формулою загального розв'язку звичайної системи диференціальних рівнянь. В цьому випадку, як відомо, частинний розв'язок* $\tilde{z}(t)$ *неоднорідної системи можна знайти методом варіації довільних сталих, виходячи з загального розв'язку відповідної однорідної системи.*

Для знаходження частинного розв'язку $\tilde{z}(t)$ виродженої системи диференціальних рівнянь (1) застосуємо метод запропонований в [3]. Цей метод є деякою модифікацією методу варіації довільних сталих.

3. Спряжені системи диференціальних рівнянь. Поряд із однорідною виродженою системою (15) розглянемо відповідну їй спряжену систему

$$\frac{d}{dt}\left(B_0^\top(t)\bar{z}(t)\right) = -A_0^\top(t)\bar{z}(t), \quad t \in [a,b]. \tag{16}$$

Загальний розв'язок цієї системи має таку ж структуру, що й загальний розв'язок однорідної виродженої системи (15), а саме:

$$\bar{z}(t) = \bar{Z}(t)d,$$

де $\bar{Z}(t)$ – $((n+m)\times(n+m-1))$-вимірна матриця, яка складається з $(n+m-1)$ лінійно незалежних розв'язків однорідної виродженої системи (16) і має наступну блочно-діагональну структуру:

$$\bar{Z}(t) = \begin{bmatrix} \bar{X}(t) & 0 \\ 0 & \bar{Y}(t) \end{bmatrix},$$

$\bar{X}(t)$ – $(n\times n)$-вимірна фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}\left(B_1^\top(t)\bar{x}(t)\right) = -A_1^\top(t)\bar{x}(t),$$

$\bar{X}(t,s)$, $\bar{X}(s,s) = E_n$ – матрицант цієї системи, $\bar{Y}(t)$ – $(m\times(m-1))$-вимірна матриця, яка складається з $m-1$ лінійно незалежних розв'язків наступної однорідних систем рівнянь

$$J^\top\frac{d\bar{y}}{dt} = -A_2^\top(t)\bar{y}(t),$$

причому $\bar{Y}(t) = K_1(t)U(t)$, $K_1(t)$ – $(m \times (m-1))$-вимірна матриця вигляду

$$K_1(t) = \begin{bmatrix} E_{m-1} \\ -\dfrac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_1^\top(t) \end{bmatrix},$$

$U(t)$ – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна фундаментальна матриця наступної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = \left(-D_2^\top(t) + \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3^\top(t) D_1^\top(t) \right) u(t),$$

$\bar{U}(t,s)$, $\bar{U}(s,s) = E_{m-1}$ – матрицант цієї системи.

Залежність між розв'язками виродженої системи (15) та розв'язками спряженої до неї системи (16), встановлює наступна лема.

Лема 1. *Нехай $z(t)$ – розв'язок системи* (15), *а $\tilde{z}(t)$ – розв'язок системи* (16). *Тоді виконується рівність*

$$\langle B_0(t)z(t), \bar{z}(t)\rangle = const \quad \forall t \in [a,b].$$

Доведення. Оскільки $B_0(t)\dfrac{dz}{dt} = A_0(t)z(t)$ і $\dfrac{d}{dt}\left(B_0^\top(t)\bar{z}(t)\right) = -A_0^\top(t)\bar{z}(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\langle B_0(t)z(t), \bar{z}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle z(t), B_0^\top(t)\bar{z}(t)\rangle = \langle \frac{dz(t)}{dt}, B_0^\top(t)\bar{z}(t)\rangle + \langle z(t), \frac{d}{dt}\big(B_0^\top(t)\bar{z}(t)\big)\rangle =$$

$$= \langle B_0(t)\frac{dz(t)}{dt}, \bar{z}(t)\rangle + \langle z(t), \frac{d}{dt}\big(B_0^\top(t)\bar{z}(t)\big)\rangle = \langle A_0(t)z(t), \bar{z}(t)\rangle + \langle z(t), -A_0^\top(t)\bar{z}(t)\rangle = 0,$$

звідки і випливає твердження леми.

Означення 1. *Матриці $Z(t)$ та $\bar{Z}(t)$, складені з $n+m-1$ лінійно незалежних розв'язків систем* (15) *і* (16) *відповідно, називатимемо фундаментальними матрицями цих систем.*

Лема 2. *Фундаментальні матриці $Z(t)$ і $\bar{Z}(t)$ відповідних однорідних вироджених систем* (15) *і* (16) *задовольняють співвідношення*

$$\bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) = C, \tag{17}$$

де C – невироджена квадратна $(n+m-1)$-вимірна стала матриця.

Доведення. Сталість матриці C випливає з попередньої леми. Покажемо, що C є неособливою матрицею. Врахувавши структуру фундаментальних матриць $Z(t)$ і $\bar{Z}(t)$ та матриці $B_0(t)$, одержимо

$$\bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) = \begin{bmatrix} \bar{X}^\top(t) & 0 \\ 0 & \bar{Y}^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & Y(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) & 0 \\ 0 & \bar{Y}^\top(t)JY(t) \end{bmatrix}.$$

Звідси $\det \bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) = \det \bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) \det \bar{Y}^\top(t)JY(t)$. Очевидно, що $\det \bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$. Крім того, взявши до уваги вигляд матриць $Y(t)$ та $\bar{Y}(t)$, матимемо

$$\bar{Y}^\top(t)JY(t) = (K_1(t)U(t))^\top JK(t)V(t) = U^\top(t)K_1^\top(t)JK(t)V(t) =$$

$$= U^\top(t)\left[E_{m-1}, -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)}D_1(t)\right]\begin{bmatrix} 0 & E_{m-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)}D_3(t) \\ E_{m-1} \end{bmatrix}V(t) = U^\top(t)V(t).$$

Оскільки $\det U^\top(t) \neq 0$ і $\det V(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$, то й $\det \bar{Y}^\top(t)JY(t) \neq 0$. Лема доведена.

Виходячи з (17), фундаментальні матриці $Z(t)$ і $\bar{Z}(t)$ систем (15) і (16) завжди можна визначити так, щоб виконувалась рівність

$$\bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) = E_{n+m-1}, \tag{18}$$

крім того

$$\bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) = E_n, \quad \bar{Y}^\top(t)JY(t) = E_{m-1}.$$

4. Побудова розв'язків вироджених лінійних неоднорідних систем диференціальних рівнянь. Перейдемо до безпосередньої побудови загального розв'язку лінійної неоднорідної виродженої системи (1).

Позначимо через Φ і Ψ – базиси ядра $Ker(B_0(t))$ і ядра $Ker(B_0^\top(t))$ [10] відповідно:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix},$$

де Φ_1 і Ψ_1 – базиси ядра $Ker(J)$ і ядра $Ker(J^\top)$:

$$\Phi_1 = col(1,0,\ldots,0)^\top, \quad \Psi_1 = col(0,\ldots,0,1)^\top.$$

Теорема 2. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь* (1) *виконується умова:* $a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$. *Крім того, знайдено такі фундаментальні матриці* $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$ *однорідної виродженої системи* (15) *та відповідної спряженої системи* (16), *що виконується умова* (18). *Тоді загальний розв'язок лінійної неоднорідної виродженої системи* (1) *визначається згідно формули*

$$z(t) = Z(t)c + Z(t)\int_{t_0}^{t} \bar{Z}^\top(s)f(s)ds - \Phi R(t)\Psi^\top f(t). \tag{19}$$

Доведення. Побудуємо $((n+m)\times(n+m))$-вимірні матриці

$$P(t) = [Z(t), \Phi(t)], \quad Q(t) = \left[\bar{Z}(t), \Psi(t)\right]^\top,$$

які будуть неособливими для $\forall t \in [a,b]$. Дійсно, враховуючи структуру фундаментальної матриці Z(t) та вигляд матриці $Y(t)$, матимемо

$$P(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y(t) & \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & K(t)V(t) & \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)}D_3(t)V(t) & 1 \\ 0 & V(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси $\det P(t) = \det X(t) \det V(t)$, а оскільки $\det X(t) \neq 0$ і $\det V(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$, то маємо, що й $\det P(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Аналогічно доводиться неособливість матриці $Q(t)$.

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної виродженої системи (1) будемо шукати у вигляді

$$z(t) = P(t)\bar{z}(t). \tag{20}$$

Підставимо (20) у неоднорідну вироджену систему (1) і помножимо одержану рівність зліва на матрицю $Q(t)$. Матимемо

$$Q(t)B_0(t)P(t)\frac{d\bar{z}}{dt} = Q(t)L(t)P(t)\bar{z}(t) + Q(t)f(t). \tag{21}$$

Враховуючи структуру матриць $P(t)$ і $Q(t)$, запишемо наступні матриці у такому вигляді

$$Q(t)B_0(t)P(t) = \begin{bmatrix} \bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) & \bar{Z}^\top(t)B_0(t)\Phi \\ \Psi^\top B_0(t)Z(t) & \Psi^\top B_0(t)\Phi \end{bmatrix},$$

$$Q(t)L(t)P(t) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{Z}^\top(t)L(t)\Phi \\ 0 & \Psi^\top L(t)\Phi \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\bar{Z}^\top(t)B_0(t)\Phi = 0$. Крім того, неважко переконатися в справедливості наступних рівностей

$$\Psi^\top B_0(t)Z(t) = 0, \quad \Psi^\top B_0(t)\Phi = 0,$$
$$\bar{Z}^\top(t)L(t)\Phi = 0.$$

Покажемо, що $\det \Psi^\top L(t)\Phi \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Дійсно

$$\Psi^\top L(t)\Phi = \Psi^\top A_0(t)\Phi = \begin{bmatrix} 0, & \Psi_1^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} =$$
$$= \Psi_1^\top A_2(t)\Phi_1 = a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0.$$

Помноживши (21) на матрицю $diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}$, де

$$R(t) = \left[\Psi^\top L(t)\Phi\right]^{-1},$$

і врахувавши (18), матимемо

$$\begin{bmatrix} E_{n+m-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\bar{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{z}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{Z}^\top(t)f(t) \\ R(t)\Psi^\top f(t) \end{bmatrix}.$$

Ця система розпадається таким чином, що ми одержимо $(n+m-1)$-вимірну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \bar{Z}^\top(t)f(t),$$

розв'язком якої є

$$\bar{z}_1(t) = \int_{t_0}^{t} \bar{Z}^\top(s)f(s)ds + c,$$

де c – $(n+m-1)$-вимірний вектор довільних сталих, та рівність

$$\bar{z}_2(t) = -R(t)\Psi^\top f(t).$$

Повернувшись до початкової змінної згідно з (20), одержимо загальний розв'язок виродженої системи (1) вигляду (19). Теорему доведено.

5. Розв'язність задачі Коші для вироджених систем диференціальних рівнянь. Для задачі Коші (1), (2) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь* (1) *виконується умова:* $a^{(2)}_{m,1}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. *Тоді для того, щоб задача Коші* (1), (2) *мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор* z_0 *задовольняв умову*

$$\langle A_0(t_0)z_0 + f(t_0), \Psi\rangle = 0. \tag{22}$$

При цьому, розв'язок задачі Коші (1), (2) *єдиний і має наступний вигляд*

$$z(t) = Z(t)\bar{Z}^\top(t_0)B_0(t_0)z_0 + Z(t)\int_{t_0}^{t}\bar{Z}^\top(s)f(s)ds - \Phi R(t)\Psi^\top f(t). \tag{23}$$

Доведення. Як показано в [3], умова (22) є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку задачі Коші (1), (2).

Покажемо, що якщо умова (22) виконується, то розв'язок задачі Коші (1), (2) єдиний і має вигляд (23). Підставимо загальний розв'язок виродженої системи (1) вигляду (19) в початкову умову (2) і помножимо одержану рівність зліва на $P^{-1}(t_0)$. Врахувавши, що

$$P^{-1}(t_0)Z(t_0) = col[E_{n+m-1}, 0], \quad P^{-1}(t_0)\Phi = col[0,1],$$

одержимо

$$\begin{aligned} \left[P^{-1}(t_0)z_0\right]_1 &= c, \\ \left[P^{-1}(t_0)z_0\right]_2 + R(t_0)\Psi^\top f(t_0) &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

де $[P^{-1}(t_0)z_0]_1$ – $(n+m-1)$-вимірний вектор, координатами якого є перші $n+m-1$ координат вектора $P^{-1}(t_0)z_0$, а $[P^{-1}(t_0)z_0]_2$ – $(n+m)$ координата вектора $P^{-1}(t_0)z_0$. Перша з цих рівностей дає значення $(n+m-1)$-вимірного вектора сталих c. А друга рівність еквівалентна умові (22). Дійсно, з доведення теореми 2 випливає, що

$$\begin{aligned} diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)B_0(t)P(t) &= diag\{E_{n+m-1}, 0\}, \\ diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)L(t)P(t) &= diag\{0,1\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Продиференціюємо першу тотожність. Дістанемо

$$diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)B_0(t)P'(t) =$$

$$= -diag\{0, R'(t)\}Q(t)B_0(t)P(t) - diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}\left(Q(t)B_0(t)\right)' P(t).$$

Підставимо одержаний вираз в другу тотожність (25), матимемо

$$diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)A_0(t)P(t) + diag\{0, R'(t)\}Q(t)B_0(t)P(t)+$$

$$+diag\{E_{n+m-1}, R(t)\}\left(Q(t)B_0(t)\right)' P(t) = diag\{0, 1\}.$$

Покладемо в останню рівність значення $t = t_0$ і помножимо її справа на $P^{-1}(t_0)z_0$, одержимо

$$[P^{-1}(t_0)z_0]_2 = R(t_0)\left[Q(t_0)A_0(t_0)z_0\right]_2 + R'(t_0)\left[Q(t_0)B_0(t_0)z_0\right]_2 +$$

$$+R(t_0)\left[\frac{d}{dt}\left(Q(t_0)B_0(t_0)\right)z_0\right]_2,$$

звідки, відповідно до структури матриці $Q(t)$, можемо записати

$$[P^{-1}(t_0)z_0]_2 = R(t_0)\Psi^\top A_0(t_0)z_0 + \frac{d}{dt}\left[R(t_0)\Psi^\top B_0(t_0)\right]z_0.$$

Підставивши цей вираз в (24), одержимо рівність

$$R(t_0)\Psi^\top A_0(t_0)z_0 + \frac{d}{dt}\left[R(t_0)\Psi^\top B_0(t_0)\right]z_0 + R(t_0)\Psi^\top f(t_0) = 0,$$

яка, як неважко переконатися, еквівалентна умові (22). З першої тотожності (25), можемо знайти:

$$\left[P^{-1}(t_0)z_0\right]_1 = \left[Q(t_0)B_0(t_0)z_0\right]_1 = \bar{Z}^\top(t_0)B_0(t_0)z_0,$$

отже, $c = \bar{Z}^\top(t_0)B_0(t_0)z_0$. Тоді, підставляючи в (19) знайдене значення вектора c, одержимо розв'язок задачі Коші (1), (2) вигляду (23). Теорему доведено.

1. *Сенди К.* Современные методы анализа электрических систем. — М.: Энергия, 1971.
2. *Чуа Л.О., Лин Пен-Мин* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
4. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007.–**10**, №3. – С. 303–312.
5. *Бояринцев Ю.И.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. – М.: Наука, 1996.
6. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998.
7. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.
8. *Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical solution of initial-problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14). — Philadelphia: SIAM, 1996. — 256 p.
9. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations. — SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman, 1982. — 188 p.
10. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 294 с.

Одержано 23.03.2013