УДК 517.9:519.46

М.І. Сєров, Л.М. Блажко (Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка)

КОНФОРМНА ІНВАРІАНТНІСТЬ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

The article presents all possible representations of the Poincare algebra, extended Poincare algebra and conformal algebra, under which quasi-linear differential equations with the second-order partial derivatives are invariant in the case of two independent variables. The obtained results of the classification have been applied for studying the symmetry properties of the quasi-linear differential equation with the second-order partial derivatives.

Описано всі можливі зображення алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку у випадку двох незалежних змінних. Одержані результати класифікації застосовано для дослідження симетрійних властивостей квазілінійного диферціального рівняння з частиними похідними другого порядку.

Вступ. У сучасних дослідженнях багатьох фізичних процесів важливу роль відіграє принцип симетрії $[1,2]$. Це пов'язано з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною або неявною, геометричною або негеометричною, локальною або нелокальною симетріями. Всі основні рівняння математичної фізики — Нютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Максвела і т. д. — володіють широкими симетрійними властивостями.

1. Постановка задачі та позначення. Квазілінійні хвильові рівняння є цікавим об'єктом дослідження внаслідок свого широкого застосування.

Найбільш загальний клас квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку можна записати у вигляді

$$F^{\mu\nu}\left(u,\underset{1}{u}\right)u_{\mu\nu}+G\left(u,\underset{1}{u}\right)=0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}\left(u,\underset{1}{u}\right)$, $G\left(u,\underset{1}{u}\right)$, $u=u(x)$ — гладкі функції, $\mu,\nu=\overline{0,n}$, $x=(x_0,\vec{x})\in R^{1+n}$, $\underset{1}{u}=(u_0,u_1,...,u_n)$, $u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$.

Найбільш відомими рівняннями класу (1є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = F(u), \tag{2}$$

нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u+G\left(u,\underset{1}{u}\right)=0, \tag{3}$$

рівняння Борна–Інфельда

$$(1-u_\nu u^\nu)\Box u+u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}=0, \tag{4}$$

рівняння Ліувілля

$$\Box u+\lambda e^u=0 \tag{5}$$

та багато інших. У формулах (2)–(5) $\Box u = \partial_{00} - \triangle$, $u^{\mu} = g^{\mu\nu} u_{\nu}$, $g^{\mu\nu}$ — метричний тензор з сігнатурою $(+, -, ..., -)$, F, G — довільні гладкі функції, λ — довільна стала. Рівняння (2) є одним з основних рівнянь геометричної оптики. Його симетрійні властивості прокласифіковані в [2]; нелінійне хвильове рівняння (3) широко застосовується при описанні різноманітних фізичних процесів. Інваріантність рівняння (3) відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри досліджена в роботі [2]; рівняння (4) в евклідовому просторі узагальнює на n-вимірний випадок рівняння мінімальних поверхонь вперше одержане Лагранжем із варіаційного принципу Ейлера-Лагранжа. Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки рівняння (4) знайдені в роботах [2–4]. Рівняння Ліувілля виникає у задачах диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, у квантовій теорії поля (див., наприклад, [5]).

Рівняння (2)–(5) володіють широкими симетріями Лі. Вони інваріантні відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри.

Оскільки характерна особливість сучасного математичного опису реальних процесів полягає в тому, що рівняння руху для частинок, хвиль, полів є складними нелінійними системами диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь, то постає питання як будувати такі рівняння? Як розв'язувати і досліджувати такі системи? Очевидно, що підхід Лагранжа–Ейлера (механічний у своїй основі) до побудови рівняння руху у багатьох випадках є обмеженим. Досить нагадати, що в рамках класичного методу Лагранжа–Ейлера неможливо одержати без переходу до потенціалів рівняння Максвела для електромагнітних хвиль. Ми ж пропонуємо нелагранжевий підхід для побудови і класифікації рівнянь руху. В основі цього підходу лежить принцип відносності Лоренца–Пуанкаре–Енштейна [6].

Розглянемо симетрійні властивості лінійного рівняння Д'Аламбера

$$\Box u = 0,$$

яке в одновимірному випадку називається також рівнянням коливання струни. Відомо, що в цьому випадку рівняння Д'Аламбера є інваріантним відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні оператори якої мають вигляд

$$\partial_0, \partial_1, J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1, \tag{6}$$

розширеної операторами масштабних

$$D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \tag{7}$$

та конформних

$$K_{\mu} = 2x_{\mu}D - x^2\partial^{\mu} \tag{8}$$

перетворень, де $x^2 = x_0^2 - x_1^2$. Оператори (6)–(7) утворюють розширену алгебру Пуанкаре, яку будемо позначати $AP_1(1,1)$, а оператори (6)–(8) — конформну алгебру, яка в літературі позначається $AC(1,1)$.

Комутаційні співвідношення між операторами цих алгебр мають вигляд

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, J_{01}] = \partial_1, \quad [\partial_1, J_{01}] = \partial_0; \tag{9}$$

$$[\partial_0, D] = \partial_0, \quad [\partial_1, D] = \partial_1, \quad [J_{01}, D] = 0; \tag{10}$$

$$[\partial_0, K_0] = 2D, \quad [\partial_1, K_0] = 2J_{01}, \quad [D, K_0] = K_0; \tag{11}$$

$$[\partial_0, K_1] = 2J_{01}, \quad [\partial_1, K_1] = 2D, \quad [D, K_1] = K_1; \tag{12}$$

$$[J_{01}, K_0] = K_1, \quad [J_{01}, K_1] = K_0, \quad [K_0, K_1] = 0. \tag{13}$$

Опишемо всі можливі зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку (1). Іншими словами опишемо алгебри диференціальних операторів першого порядку

$$AP(1,1) =< Q_1, Q_2, Q_3 >,$$

$$AP_1(1,1) =< Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 >,$$

$$AC(1,1) =< Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 >,$$

базові генератори яких задовольняють комутаційним співвідношенням (9)–(13).

Зазначимо, що у роботі [7] розглянута задача інваріантності загального рівняння другого порядку відносно алгебри Пуанкаре та деяких її розширень. У роботі [9] дана задача розглянута повністю для одновимірного рівняння (1), але для вужчого класу алгебр, а саме у випадку, коли алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$ має базові генератори вигляду (6).

2. Зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри. Встановимо загальний вигляд операторів Q_1, Q_2, Q_3, які утворюють алгебру Пуанкаре(9), тобто задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[Q_1, Q_2] = 0, \quad [Q_1, Q_3] = Q_2, \quad [Q_2, Q_3] = Q_1. \tag{14}$$

Оскільки у випадку $x = (x_0, x_1)$ рівняння (1) при довільних функціях $F^{\mu\nu}$, G інваріантне відносно операторів зсувів по незалежних змінних, то в якості Q_1, Q_2 виберемо оператори ∂_0, ∂_1. Нехай зображення оператора Q_3 має самий загальний вигляд

$$Q_3 = \xi^0(x_0, x_1, u)\partial_0 + \xi^1(x_0, x_1, u)\partial_1 + \eta(x_0, x_1, u)\partial_u, \tag{15}$$

де функції ξ^0, ξ^1, η підлягають уточненню. Вимагаючи виконання умов комутування (14), одержимо:

$[Q_1, Q_2] = [\partial_0, \partial_1] = 0,$
$[Q_1, Q_3] = [\partial_0, Q_3] = \xi^0_0\partial_0 + \xi^1_0\partial_1 + \eta_0\partial_u = \partial_1,$
$[Q_2, Q_3] = [\partial_1, Q_3] = \xi^0_1\partial_0 + \xi^1_1\partial_1 + \eta_1\partial_u = \partial_0,$

звідки

$$\xi^\mu_\nu = \begin{cases} 0, \mu = \nu, \\ 1, \mu \neq \nu, \end{cases} \quad \eta_\mu = 0, \mu, \nu = \overline{0, 1}. \tag{16}$$

Проінтегрувавши рівняння (16) та підставивши одержаний розв'язок в (15), одержимо

$$Q_3 = J_{01} = (x_1 + a(u))\partial_0 + (x_0 + b(u))\partial_1 + c(u)\partial_u,$$

де $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ — довільні гладкі функції.

Таким чином самий загальний вигляд базисних генераторів алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$ для рівняння (1) наступний

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = (x_1 + a(u))\partial_0 + (x_0 + b(u))\partial_1 + c(u)\partial_u. \tag{17}$$

Доповнимо алгебру (17) оператором

$$Q_4 = A(x_0, x_1, u)\partial_0 + B(x_0, x_1, u)\partial_1 + H(x_0, x_1, u)\partial_u, \tag{18}$$

і всановимо вигляд функцій $A(x_0, x_1, u)$, $B(x_0, x_1, u)$, $H(x_0, x_1, u)$ при яких оператори (17)—(18) утворюють розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,1)$. Для цього необхідно виконання умов комутування (10), врахувавши які, одержимо:

$$[\partial_0, Q_4] = A_0\partial_0 + B_0\partial_1 + H_0\partial_u = \partial_0,$$

$$[\partial_1, Q_4] = \alpha_1\partial_0 + B_1\partial_1 + H_1\partial_u = \partial_1,$$

звідки $A_0 = 1, B_0 = 0, H_0 = 0,\ A_1 = 0, B_1 = 1, H_1 = 0$. З одержаних рівностей знаходимо

$$A = x_0 + \alpha(u), \quad B = x_1 + \beta(u), \quad H = H(u),$$

де $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $H(u)$ — довільні гладкі функції.

$$Q_4 = D = (x_0 + \alpha(u))\partial_0 + (x_1 + \beta(u))\partial_1 + H(u)\partial_u.$$

З умови $[J_{01}, D] = 0$ одержуємо зв'язок між функціями $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $H(u)$ та $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$:

$$\begin{array}{l} c(u)\dot{\alpha}(u) - H(u)\dot{a}(u) + a(u) - \beta(u) = 0, \\ c(u)\dot{\beta}(u) - H(u)\dot{b}(u) + b(u) - \alpha(u) = 0, \\ c(u)\dot{H}(u) - H(u)\dot{c}(u) = 0, \end{array}$$

або

$$\begin{array}{l} H(u) = \lambda c(u) \quad (\lambda - const), \\ c(u)\dot{\alpha}(u) - \lambda c(u)\dot{a}(u) + a(u) - \beta(u) = 0, \\ c(u)\dot{\beta}(u) - \lambda c(u)\dot{b}(u) + b(u) - \alpha(u) = 0. \end{array} \tag{19}$$

Отже, загальний вигляд базисних елементів розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ наступний

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = (x_1 + a(u))\partial_0 + (x_0 + b(u))\partial_1 + c(u)\partial_u, \\ D = (x_0 + \alpha(u))\partial_0 + (x_1 + \beta(u))\partial_1 + \lambda c(u)\partial_u, \end{array} \tag{20}$$

де функції $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, $\alpha(u)$, $\beta(u)$ задовольняють умови (19), λ — довільна стала.

Доповнимо алгебру (20) операторами конформних перетворень

$$K_\mu = \alpha^{\mu\nu}(x, u)\partial_\nu + \beta^\mu(x, u)\partial_u, \quad \mu, \nu = 0, 1 \tag{21}$$

і встановимо вигляд функцій $\alpha^{\mu\nu}(x, u)$, $\beta^\mu(x, u)$ при яких оператори (20)-(21) утворюють конформну алгебру $AC(1,1)$. З умов (11) маємо

$$\begin{array}{lll} \alpha_0^{00} = 2(x_0 + \alpha), & \alpha_0^{01} = 2(x_1 + \beta), & \beta_0^0 = 2\lambda c, \\ \alpha_1^{00} = 2(x_1 + a), & \alpha_1^{01} = 2(x_0 + b), & \beta_1^0 = 2c, \end{array} \tag{22}$$

$$\begin{array}{l} (x_0 + \alpha)\alpha_0^{00} + (x_1 + \beta)\alpha_1^{00} + \lambda c\alpha_u^{00} - 2\alpha^{00} - \beta^0\alpha_u = 0, \\ (x_0 + \alpha)\alpha_0^{01} + (x_1 + \beta)\alpha_1^{01} + \lambda c\alpha_u^{01} - 2\alpha^{01} - \beta^0\beta_u = 0, \\ (x_0 + \alpha)\beta_0^0 + (x_1 + \beta)\beta_1^0 + \lambda c\beta_u^0 - \lambda\dot{c}\beta^0 - \beta^0 = 0. \end{array} \tag{23}$$

Загальним розв'язком системи (22) є функції

$$\begin{aligned}&\alpha^{00} = x_0^2 + x_1^2 + 2(x_0\alpha + x_1 a) + h^{00},\\&\alpha^{01} = 2x_0x_1 + 2(x_0\beta + x_1 b) + h^{01},\\&\beta^0 = 2\lambda c x_0 + 2cx_1 + h^0.\end{aligned} \tag{24}$$

Підставивши функції (24) у систему рівнянь (23), одержуємо наступну систему рівнянь для визначення функцій $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $h^0(u)$, $h^{00}(u)$, $h^{01}(u)$, $h^{10}(u)$, $h^{11}(u)$:

$$\begin{aligned}&\lambda c\dot{h}^{00} - 2h^{00} = h^0\dot{\alpha} - 2\alpha^2 - 2a\beta,\\&\lambda c\dot{h}^{01} - 2h^{01} = h^0\dot{\beta} - 2b\beta - 2\alpha\beta,\\&\lambda c\dot{h}^0 - (\lambda\dot{c} + 1)h^0 + 2c(\lambda\alpha + \beta) = 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Із перших двох умов (12) отримаємо

$$\begin{aligned}&\alpha_0^{10} = 2(x_1 + a), \quad \alpha_0^{11} = 2(x_0 + b), \quad \beta_0^1 = 2c,\\&\alpha_1^{10} = 2(x_0 + \alpha), \quad \alpha_1^{11} = 2(x_1 + \beta), \quad \beta_1^1 = 2\lambda c.\end{aligned} \tag{26}$$

Загальним розв'язком системи (26) є функції

$$\begin{aligned}&\alpha^{10} = 2x_0x_1 + 2x_0 a + 2x_1\alpha + h^{10},\\&\alpha^{11} = x_0^2 + x_1^2 + 2x_0 b + 2x_1\beta + h^{11},\\&\beta^1 = 2x_0 c + 2\lambda x_1 c + h^1.\end{aligned}$$

З умови $[D, K_1] = K_1$, одержимо

$$\begin{aligned}&\lambda c\dot{h}^{10} - 2h^{10} = h^1\dot{\alpha} - 2(a\alpha + \alpha\beta),\\&\lambda c\dot{h}^{11} - 2h^{11} = h^1\dot{\beta} - 2(\beta^2 + \alpha b),\\&\lambda c\dot{h}^1 - (\lambda\dot{c} + 1)h^1 + 2c(\alpha + \lambda\beta) = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

З перших двох умов (13) маємо

$$\begin{aligned}&c\dot{h}^0 - \dot{c}h^0 = h^1 - 2c(\lambda a + b),\\&c\dot{h}^{00} - h^0\dot{a} + 2a(\alpha + b) = h^{10} + h^{01},\\&c\dot{h}^{01} - h^0\dot{b} + 2(a\beta + b^2) = h^{00} + h^{11};\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&c\dot{h}^1 - \dot{c}h^1 = h^0 - 2c(a + \lambda b),\\&c\dot{h}^{11} - h^1\dot{b} + 2b(a + \beta) = h^{10} + h^{01},\\&c\dot{h}^{10} - h^1\dot{a} + 2(b\alpha + a^2) = h^{00} + h^{11};\end{aligned} \tag{29}$$

вимагаючи виконання комутаційного співвідношення $[K_0, K_1] = 0$, знаходимо наступну систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\lambda(c\dot{h}^1 - \dot{c}h^1) + \dot{c}h^0 - c\dot{h}^0 + 2\lambda c(\beta - a) + 2c(\alpha - b) = 0,\\
&\lambda(c\dot{h}^0 - \dot{c}h^0) + \dot{c}h^1 - c\dot{h}^1 + 2\lambda c(b - \alpha) + 2c(a - \beta) = 0,\\
&\\
&h^0\dot{h}^1 - \dot{h}^0 h^1 + 2c(h^{00} - h^{11}) + 2\lambda c(h^{01} - h^{10}) = 0,\\
&\\
&h^0\dot{h}^{10} - h^1\dot{h}^{00} + 2a(h^{00} - h^{11}) + 2\alpha(h^{01} - h^{10}) = 0,\\
&h^0\dot{h}^{11} - h^1\dot{h}^{01} + 2b(h^{00} - h^{11}) + 2\beta(h^{01} - h^{10}) = 0,\\
&\\
&c(\lambda\dot{h}^{10} - \dot{h}^{00}) + \dot{a}h^0 - \dot{\alpha}h^1 + h^{01} - h^{10} + 2(\alpha\beta - ab) = 0,\\
&c(\dot{h}^{10} - \lambda\dot{h}^{00}) + \dot{\alpha}h^0 - \dot{a}h^1 + h^{00} - h^{11} + 2(a^2 - \alpha^2 + \alpha b - a\beta) = 0,\\
&\\
&c(\lambda\dot{h}^{11} - \dot{h}^{01}) + \dot{b}h^0 - \dot{\beta}h^1 + h^{00} - h^{11} + 2(\alpha b + \beta^2 - a\beta - b^2) = 0,\\
&c(\dot{h}^{11} - \lambda\dot{h}^{01}) + \dot{\beta}h^0 - \dot{b}h^1 + h^{01} - h^{10} + 2(ab - \alpha\beta) = 0.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Таким чином ми отримали зображення базисних генераторів конформної алгебри $AC(1,1)$

$$
\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = (x_1 + a))\partial_0 + (x_0 + b)\partial_1 + c)\partial_u,\\
&D = (x_0 + \alpha)\partial_0 + (x_1 + \beta)\partial_1 + \lambda c)\partial_u,\\
&K_0 = 2x_0 D - x^2\partial_0 + 2x_1(a\partial_0 + b\partial_1 + c\partial_u) + h^{00}\partial_0 + h^{01}\partial_1 + h^0\partial_u,\\
&K_1 = 2x_1 D + x^2\partial_1 + 2x_0(a\partial_0 + b\partial_1 + c\partial_u) + h^{10}\partial_0 + h^{11}\partial_1 + h^1\partial_u,
\end{aligned} \tag{31}
$$

де функції $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $h^{\mu\nu}(u)$, $h^{\mu}(u)$, $\mu, \nu = 0, 1$ задовольняють умови (19), (25), (27)–(30).

Для того, щоб спростити вигляд базових генераторів алгебр (17), (20), (31), знайдемо деякі перетворення еквівалентності рівняння (1).

Справедливі наступні твердження.

Лема 1. *Перетворення*

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu(u), \quad u' = \Phi(u), \tag{32}$$

при довільних гладких функціях $\Phi = \Phi(u)$, $a_\mu = a_\mu(u)$ є перетворенням еквівалентності рівняння(1).

Лема доводиться за допомогою безпосередньої підстановки формул (32) у рівняння (1).

Теорема 1. *Якщо рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (32) мають вигляд*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + æu\partial_u, \tag{33}$$

де $æ = 0; 1$.

Зауваження 1. *Зазначимо, що у роботах [8,9] розглянута задача класифікації зображень алгебр Пуанкаре та конформної алгебри при $æ = 0$ та описано всі квазілінійні рівняня з частинними похідними другого порядку вигляду (1) інваріантні відносно цих алгебр, тому надалі будемо розгядати лише $æ = 1$.*

Теорема 2. *Якщо рівняння (1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (32) у випадку $æ = 1$ мають вигляд*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + ku\partial_u, \tag{34}$$

де $k^2 \neq 1$;

$$\partial_0, \partial_1, J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, D = (x_0 + k_1u)\partial_0 + (x_1 + k_1u)\partial_1 + u\partial_u; \tag{35}$$

$$\partial_0,\ \partial_1,\ J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = (x_0 + \tfrac{k_2}{u})\partial_0 + (x_1 - \tfrac{k_2}{u})\partial_1 - u\partial_u. \tag{36}$$

де k, k_i — довільні сталі, $i = \overline{1,2}$.

Теорема 3. *Якщо рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,1)$, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (32) у випадку $æ = 1$ мають вигляд*

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + ku\partial_u, \\ K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u, \quad K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u, \end{array} \tag{37}$$

де $k^2 \neq 1$;

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u, \\ K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u + pu^2(\partial_0 + \partial_1) + m\partial_u, \\ K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u + pu^2(\partial_0 + \partial_1) + m\partial_u; \end{array} \tag{38}$$

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u, \\ K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u + pu^{-2}(\partial_0 - \partial_1) + m\partial_u, \\ K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u - pu^{-2}(\partial_0 - \partial_1) - m\partial_u. \end{array} \tag{39}$$

Доведення теорем 1, 2, 3 можна провести, застосувавши перетворення еквівалентності (32) до алгебр (17), (20) та (31).

Таким чином у випадку $æ = 1$ з точністю до перетворень еквівалентності (32) ми описали всі можливі реалізації алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні двохвимірні квазілінійні рівняння з частинними похідними другого порядку вигляду (1). Теореми 1-3 є лише необхідною умовою інваріантності рівняння (1) відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, оскільки в них одержано лише зображення даних алгебр, але не вказано вигляд функцій $F^{\mu\nu}$, G.

3. Інваріантність відносно алгебри Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри. Дослідимо при яких функціях $F^{\mu\nu}$, G одновимірне рівняння (1) є інваріантним відносно алгебри Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри. Результатом цих досліджень є наступні твердження.

Теорема 4. *Рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре (33), при $æ = 1$, тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:*

$$u^4\varphi^1(u_{00} + 2u_{01} + u_{11}) + \varphi^2(u_{00} - 2u_{01} + u_{11}) + u^2\varphi^3\Box u + u^3\varphi^4 = 0, \tag{40}$$

де $\varphi^i = \varphi^i(\omega_1, \omega_2)$ — довільні гладкі функції, $i = \overline{1,4}$, $\omega_1 = u_0 + u_1$, $\omega_2 = \frac{u_0^2 - u_1^2}{u^2}$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі (див., наприклад, [1, 10, 11]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (1) має вигляд

$$X = \xi^0(x_0, x_1, u)\partial_0 + \xi^1(x_0, x_1, u)\partial_1 + \eta(x_0, x_1, u)\partial_u. \tag{41}$$

З умови інваріантності

$$\tilde{X}S = \Lambda S, \tag{42}$$

де $\tilde{X}$ — продовження оператора X, S — ліва частина рівняння (1), Λ — деяка функція, одержуємо систему визначальних рівнянь для визначення координат оператора (41) та функцій $F^{\mu\nu}$, G, Λ:

$$\begin{array}{l} LF^{00} + (\eta_u - 2(\xi^0_0 + u_0\xi^0_u) - u_t\xi^t_u - \Lambda)F^{00} = 2(\xi^0_1 + u_1\xi^0_u)F^{01}, \\ LF^{11} + (\eta_u - 2(\xi^1_1 + u_0\xi^1_u) - u_t\xi^t_u - \Lambda)F^{11} = 2(\xi^1_0 + u_0\xi^1_u)F^{01}, \\ LF^{01} + (\eta_u - \xi^0_0 - \xi^1_1 - 2u_t\xi^t_u - \Lambda)F^{01} = (\xi^1_0 + u_0\xi^1_u)F^{00} + (\xi^0_1 + u_1\xi^0_u)F^{11}, \\ (\eta_{\mu\nu} + u_\nu\eta_{\mu u} - u_t(\xi^t_{\mu\nu} + u_\nu\xi^t_{\mu u}) + u_\mu(\eta_{\nu u} + u_\nu\eta_{uu} - u_t(\xi^t_{\nu u} + u_\nu\xi^t_{uu})))F^{\mu\nu} + \\ +(u_\alpha\eta_u - u_t\xi^t_\alpha - u_\alpha u_t\xi^t_u + \eta_\alpha)G_{u_\alpha} + \eta G_u = \Lambda G, \end{array} \tag{43}$$

де $L = (u_\alpha\eta_u - u_t\xi^t_\alpha - u_\alpha u_t\xi^t_u + \eta_\alpha)\partial_{u_\alpha} + \eta\partial_u$.

Координати ξ^μ, η інфінітезимального оператора алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$ мають вигляд

$$\xi^0 = x_1, \quad \xi^1 = x_0, \quad \eta = u. \tag{44}$$

а) Розглянемо випадок $F^{01} = 0$. Не втрачаючи загальності, будемо вважати $F^{00} = 1$. У цьому випадку рівняння (1) має вигляд

$$u_{00} + F^{11}u_{11} + G = 0. \tag{45}$$

Згідно критерію Лі, діючи другим продовженням інфінітезимального оператора на рівняння (45), після розщеплення по похідних отримаємо:

$$\begin{array}{l} (u_0 - u_1)G_{u_0} - (u_0 - u_1)G_{u_1} + uG_u = G, \\ F^{11} = -1, \\ \Lambda = 1. \end{array} \tag{46}$$

Звідки $G = u\varphi^4(\omega_1, \omega_2)$. Таким чином одержимо рівняння (40) при $\varphi^1 = \varphi^2 = 0$, $\varphi^3 = 1$.

б) Розглянемо випадок $F^{01} \neq 0$. Тоді, не втрачаючи загальності, можна вважати $F^{01} = 1$. Підставивши координати інфінітезимального оператора (44) в систему визначальних рівнянь (43), одержимо наступну систему рівнянь для визначення функцій F^{00}, F^{11}, G:

$$\begin{array}{l} LF^{00} = 2 - F^{00}(F^{00} + F^{11}), \\ LF^{11} = 2 - F^{11}(F^{00} + F^{11}), \\ LG = (1 - F^{00} - F^{11})G, \\ \Lambda = 1 - F^{00} - F^{11}, \end{array} \tag{47}$$

де $L = (u_0 - u_1)\partial_{u_0} - (u_0 - u_1)\partial_{u_1} + \partial_u$. Загальним розв'язком рівнянь (47) є функції

$$F^{00} = \tfrac{u^4\varphi^1 + u^2\varphi^3 + 1}{u^4\varphi^1 - 1}, \quad F^{11} = \tfrac{u^4\varphi^1 - u^2\varphi^3 + 1}{u^4\varphi^1 - 1}, \quad G = \tfrac{u^3\varphi^4}{u^4\varphi^1 - 1}, \tag{48}$$

де $\varphi^i = \varphi^i(\omega_1, \omega_2)$ — довільні гладкі функції, $i = \overline{1,4}$, $\omega_1 = u_0 + u_1$, $\omega_2 = \frac{u_0^2 - u_1^2}{u^2}$. Таким чином одержимо рівняння (40) при $\varphi^2 = 1$. Теорему доведено.

Теорема 5. *Рівняння (1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре (34), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:*

$$u^4\omega^{2k}\psi^1(u_{00}+2u_{01}+u_{11})+\psi^2(u_{00}-2u_{01}+u_{11})+u^2\omega_2^k\psi^3\Box u + u^3\omega_2^{k+1}\varphi^4 = 0, \quad (49)$$

де $\psi^i = \psi^i(\omega)$ *— довільні гладкі функції,* $i = \overline{1,4}$, k *— довільна стала.*

Доведення. Визначимо, коли рівняння (1) буде інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$. З теореми 2 випливає, що, якщо рівняння (1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (32) мають вигляд (34)–(36). Оскільки розширена алгебра Пуанкаре $AP_1(1,1)$ містить у собі алгебру Пуанкаре $AP(1,1)$, то використаємо результат теореми 4. Рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре, якщо воно має вигляд (40).

Визначимо вигляд функції φ^i, при якому рівняння (40) буде інваріантним відносно алгебри (34). Підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\xi^0 = x_0, \quad \xi^1 = x_1, \quad \eta = ku$$

у систему визначальних рівнянь, після спрощень отримаємо

$$\begin{array}{l} ((k-1)\omega_1\partial_{\omega_1} - 2\omega_2\partial_{\omega_2})\varphi^1 = -4k\varphi^1, \\ ((k-1)\omega_1\partial_{\omega_1} - 2\omega_2\partial_{\omega_2})\varphi^2 = 0, \\ ((k-1)\omega_1\partial_{\omega_1} - 2\omega_2\partial_{\omega_2})\varphi^3 = -2k\varphi^3, \\ ((k-1)\omega_1\partial_{\omega_1} - 2\omega_2\partial_{\omega_2})\varphi^4 = -2(k+1)\varphi^4. \end{array} \quad (50)$$

Загальним розв'язком рівнянь (50) є функції

$$\varphi^1 = \omega_2^{2k}\psi^1, \quad \varphi^2 = \psi^2, \quad \varphi^3 = \omega_2^k\psi^3, \quad \varphi^4 = \omega_2^{k+1}\psi^4,$$

$\psi^i = \psi^i(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\omega = \omega_1^2\omega_2^{k-1}$. Таким чином одержали рівняння (49).

Якщо базисні елементи розширеної алгебри Пуанкаре мають вигляд (35) та (36), то після підстановки координат інфінітезимальних операторів, що відповідають даним алгебрам, у систему визначальних рівнянь (43), одержуємо відповідно $k_1 = 0$ та $k_2 = 0$. Таким чином вигляд базисних операторів алгебр (35), (36) співпадає з виглядом базисних операторів розширеної алгебри Пуанкаре (34) при $k = 1$ та $k = -1$. Теорему доведено.

Теорема 6. *Рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри*

$$\begin{array}{l} \partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \\ K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u, \quad K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u \end{array}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$\Box u - \frac{u_0^2 - u_1^2}{u} = 0, \quad (51)$$

$$u_{00} + 2u_{01} + u_{11} = 0;$$

рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u,\\ &K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u, \quad K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u\end{aligned}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$\Box u - \frac{u_0^2 - u_1^2}{u}(1 - \frac{\lambda}{u_0 + u_1}) = 0, \tag{52}$$

$$u_{00} - 2u_{01} + u_{11} = 0, \tag{53}$$

де λ — довільна стала;
рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u,\\ &K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u + 2u^2\partial_u, K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u + 2u^2\partial_u\end{aligned}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$\Box u - 2\frac{u_0 - u_1}{u}(u_0 + u_1 + 1 + \lambda\sqrt{u_0 + u_1 + 1}) = 0; \tag{54}$$

рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u,\\ &K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u, \quad K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u\end{aligned}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$\Box u + \frac{u_0^2 - u_1^2}{u}(\frac{\lambda u^2}{u_0 - u_1} - 1) = 0; \tag{55}$$

$$u_{00} - 2u_{01} + u_{11} = \lambda u^3 + \frac{3}{2}\frac{(u_0 - u_1)^2}{u}; \tag{56}$$

рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри

$$\begin{aligned}&\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + u\partial_u, \quad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u,\\ &K_0 = 2x_0D - x^2\partial_0 + 2x_1u\partial_u + 2\partial_u, \quad K_1 = 2x_1D + x^2\partial_1 + 2x_0u\partial_u - 2\partial_u\end{aligned}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$\Box u + 2(u_0 + u_1)(u + \lambda\sqrt{u_0 - u_1 + u^2}) = 0, \tag{57}$$

$$u_{00} - 2u_{01} + u_{11} = \lambda(u_0 - u_1 + u^2)^{\frac{3}{2}} - 6(u_0 - u_1 + u^2) + 2u^3. \tag{58}$$

Доведення. Якщо рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри, то як показано в теоремі 3, базисні елементи даної алгебри з точністю до перетворень еквівалентності (32) мають вигляд (37)–(39). Для кожного з отриманих у теоремі 3 зображень конформної алгебри знайдемо функції $F^{\mu\nu}$, G при яких рівняння (1) буде інваріантним відносно даної алгебри.

Оскільки конформна алгебра $AC(1,1)$ містить у собі розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,1)$, то, як випливає із теореми 5, рівняння (1) має вигляд (49).

Знайдемо вигляд функцій ψ^i, при якому рівняння (49) буде інваріантним відносно алгебри $AC(1,1)$.

Доведення теореми проведемо лише для випадку $F^{01} = 0$, тобто для $\psi^1 = \psi^2 = 0$. Рівняння (49) у цьому випадку еквівалентне рівнянню

$$\Box u + u\omega_2\psi^4(\omega) = 0. \tag{59}$$

а) Розглянемо зображення конформної алгебри (59). Застосувавши критерій інваріантності до рівняння (37), отримаємо

$$\psi^4 = -1.$$

Таким чином рівняння (49) інваріантне відносно конформної алгебри, базисні елементи якої задаються операторами (37), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд (51).

б) У випадку зображення конформної алгебри (38) координати інфінітезимального оператора мають вигляд

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= 2bxx_0 - b_0x^2 + (b_0 - b_1)pu^2,\\
\xi^1 &= 2bxx_1 - b_1x^2 + (b_0 - b_1)pu^2,\\
\eta &= 2(bx + b_0x_1 - b_1x_0)u + (b_0 - b_1)mu^2.
\end{aligned}$$

Підставивши функції ξ^0, ξ^1, η, $F^{\mu\nu}$, G у систему визначальних рівнянь (43), одержимо

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 2(-bx + b_0x_1 - b_1x_0) + 2(b_0 - b_1)(m - 3pu_0 - pu_1)u,\\
\Lambda &= 2(-bx + b_0x_1 - b_1x_0) + 2(b_0 - b_1)(m - pu_0 - 3pu_1)u,
\end{aligned} \tag{60}$$

$$2(m\omega^2 + 2\omega)\dot{\psi}^4 + (m\omega + 4)\psi^4 + 2(m\omega + 2) = 0. \tag{61}$$

Із (60) випливає, що

$$p = 0.$$

Із рівняння (61) одержимо: якщо $m = 0$, то $\psi^4 = \frac{\lambda}{\omega} - 1$; у випадку $m \neq 0$ маємо $\psi^4 = \frac{\lambda\sqrt{m\omega+2}}{\omega} - \frac{2(m\omega+2)}{m\omega}$, де λ — довільна стала. Таким чином одержали рівняння (52) та (54) теореми.

в) Розглянемо зображення конформної алгебри (39). Підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= 2bxx_0 - b_0x^2 + (b_0 + b_1)\tfrac{p}{u^2},\\
\xi^1 &= 2bxx_1 - b_1x^2 - (b_0 + b_1)\tfrac{p}{u^2},\\
\eta &= 2(-bx + b_0x_1 - b_1x_0)u + m(b_0 + b_1)
\end{aligned}$$

у систему визначальних рівнянь (43), знаходимо, що

$$p = 0,$$

$$2(2\omega + m)\dot{\psi}^4 - \frac{4\omega + m}{\omega}\psi^4 = 4.$$

Звідки при $m = 0$ одержимо $\psi^4 = \frac{\lambda u^2}{u_0 - u_1} - 1$; при $m \neq 0$ $\psi^4(\omega) = \frac{4\omega}{m} + \lambda\sqrt{\omega(2\omega + m)}$, де λ — довільна стала. Отже, маємо рівняння (55), (57) теореми.

Аналогічно проводиться доведення теореми при $F^{01} \neq 0$.

Теорему 6 доведено.

Висновки. Таким чином серед класу квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку відібрано ті, що є інваріантними відносно алгебр Пуанкаре та конформної алгебри. Оскільки рівняння (57), (58) задовольняють принципу відносності Пуанкаре-Енштейна, то вони претендують на опис реальних фізичних процесів.

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.
2. Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.
3. Барбашов Б. М., Черников Н. А. Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борна-Инфельда // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1966. — Т. 60, № 5. — С. 1296–1308.
4. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. — М. : Мир, 1977. — 622 с.
5. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. Модель релятивистской струны в физике адронов. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 176 с.
6. Fushchych W.I. Симетрія рівнянь лінійної та нелінійної квантової механіки. Scientific Works, 2004. — V. 6 — P. 105-119.
7. Rideau G. and Winternitz P. Nonlinear equations invariant under Poincare, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time, J. Math. Phys., 1990. — V.31 — P. 1095–1105.
8. Блажко Л. М. Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 40–44.
9. Блажко Л. М. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / — К., 2008. — 138 с.
10. *Lie S.* Über Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. — Leipzig: 1881. — P. 328-368.
11. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986.

Одержано 28.03.2013