УДК 519.49

**М. В. Стойка** (Ужгородський нац. ун-т)

# ЗОБРАЖЕННЯ СХРЕЩЕНИХ ГРУПОВИХ КІЛЕЦЬ СКІНЧЕННИХ АБЕЛЕВИХ 2-ГРУП ТА КІЛЬЦЯ ЦІЛИХ 2-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

The present paper deals with the task of the wildness of the problem of description of all nonequivalent matrix $\mathbb{Z}_2$-representation of the ring $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$, which is twisted group ring of a finite abelian 2-group $G$ and the ring of 2-adic integers $\mathbb{Z}_2$ with the factor system $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$, $a, b \in G$). There were obtained necessary and sufficient conditions of not wildness of the problem of description matrix $\mathbb{Z}_2$-representations of the ring $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$.

В даній роботі розглядається питання, коли задача описання всіх нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_2$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$, що є схрещеним груповим кільцем скінченної абелевої 2-групи $G$ і кільця цілих 2-адичних чисел $\mathbb{Z}_2$ при системі факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$, $a, b \in G$) є дикою. Отримано необхідну і достатню умови ручності задачі описання матричних $\mathbb{Z}_2$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$.

Нехай $G$ – скінченна абелева 2-група, $\mathbb{Z}_2$ – кільце цілих 2-адичних чисел, $\mathbb{Z}_2^*$ – мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_2$ і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи $G$ і кільця $\mathbb{Z}_2$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$, $a, b \in G$). В даній роботі вияснється, коли задача описання матричних $\mathbb{Z}_2$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ є ручною.

Гудивок П. М. розв'язав проблему, коли задача описання нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень скінченної групи і кільця цілих $p$-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ є дикою, тобто включає задачу про подібність пар $n \times n$-матриць при $p > 2$ [1,2].

Результати отримані в [3–8] сформулюємо наступним чином.

**Теорема 1.** [3, 4] *Нехай $G$ – скінченна група і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи $G$ і кільця цілих $p$-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ з системою факторів із $\mathbb{Z}_p^*$. $\widetilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$, $T_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$, $\widetilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widetilde{\Lambda}$ і $d$ є числом нееквівалентних матричних $\mathbb{Q}_p$-зображень алгебри $\widetilde{\Lambda}$. $n(\Lambda)$ ($n(\Lambda)$ – число нееквівалентних нерозкладних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень кільця $\Lambda$) є скінченним тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *$G$ – циклічна група порядку $p^r$ ($r \leq 2$);*

2) *$G$ – циклічна $p$-група ($p > 2$) і $d < 3$;*

3) *$G$ – циклічна 2-група і $d = 1$;*

4) *$G$ – абелева група типу $(3, 3)$ і $d = 2$;*

5) *$G$ – абелева група типу $(2^m, 2)$ ($m \geq 1$) і кільце $\Lambda' = R_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ ($R_2$ – кільце цілих величин поля $T_2$) задається наступними співвідношеннями:*

$$u^{2^m} = -5^r,\ \nu^2 = 1,\ u\nu = \nu u\ (0 \leq r < 2^m);$$

6) *$G$ – абелева група типу $(2^m, 2)$ ($m \geq 1$) і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ не комутативне кільце і $\widetilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}2} \widetilde{\Lambda}$ є простою алгеброю;*

7) *$G$ – група діедра і $\widetilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_2} \widetilde{\Lambda}$ є простою алгеброю.*

**Теорема 2.** [5,7] *Нехай $G$ – скінченна $p$-група порядку $|G| > 1$, $F_p$ – скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, $K_p$ – кільце цілих величин поля $F_p$, $T_p$ – поле інерції поля $F_p$. Група $G$ не є дикою над кільцем $K_p$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

1) *$G$ – абелева група типу $(2,2)$ і $F_2 = T_2$;*
2) *$G$ – циклічна $p$-група порядку $p$ $(p > 2)$ і $F_p = T_p$;*
3) *$G$ – циклічна 2-група порядку 8 і $F_2 = T_2$;*
4) *$G$ – група порядку $p$ $(p > 3)$ і $(F_p : T_p) \leq 2$;*
5) *$G$ – циклічна група порядку 4 і $(F_2 : T_2) \leq 2$;*
6) *$G$ – група порядку 3 і $(F_3, T_3) \leq 4$;*
7) *$G$ – група порядку 2.*

**Лема 1.** [8] *Нехай $F_p$ – скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, $T_p$ – скінченне нерозгалужене розширення поля $F_p$; $R_p(L_p)$ – кільце цілих величин поля $F_p(T_p)$. $\Lambda$ є скінченновимірним $R_p$-порядком в сепарабельній $F_p$-алгебрі і $\Lambda' = L_p \otimes_{R_p} T_p$. $\Lambda$ порядок є диким над $R_p$ тоді і тільки тоді, якщо $\Lambda'$ порядок є диким над $L_p$.*

**Лема 2.** [8] *Нехай $G$ – циклічна 2-група порядку $|G| = 2^m$ $(m \geq 1)$, $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи $G$ і кільця 2-адичних чисел $\mathbb{Z}_2$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*)$. Схрещене групове кільце $\Lambda$ не є диким над $\mathbb{Z}_2$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *$|G| \leq 8$;*
2) *$|G| = 2^m$ $(m > 3)$ і $\widetilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ є полем.*

**Лема 3.** [8] *Нехай $H$ – підгрупа скінченної групи $G$. $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ – є схрещеним груповим кільцем групи $G$ і кільця цілих $p$-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ з системою факторів із $\mathbb{Z}_p^*$, $\Lambda_H = (H, \mathbb{Z}_p, \lambda) \subset \Lambda$. Якщо $\Lambda_p$ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_p$ тоді і тільки тоді, якщо $\Lambda$ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_p$.*

**Лема 4.** *Нехай $G$ – абелева група типу $(4,4)$ і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи $G$ і кільця цілих 2-адичних чисел з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*,\ a, b \in G)$. Кільце $\Lambda$ є диким над кільцем $\mathbb{Z}_2$.*

***Доведення.*** Кільце $\Lambda$ задається наступними співвідношеннями

$$u^4 = \alpha 5^r,\ \nu^4 = \beta 5^s, (0 \leq r < 4,\ 0 \leq s < 4;\ \alpha, \beta = \pm 1). \tag{1}$$

Розглянемо наступні випадки:

1) $u^4 = 1,\ \nu^4 = 1$;
2) $u^4 = \alpha,\ \nu^4 = \beta,\ \alpha\beta = -1$;
3) $u^4 = -5,\ \nu^4 = 1$;
4) $u^4 = 5,\ \nu^4 = -1$;
5) $u^4 = 5,\ \nu^4 = 1$;
6) $u^4 = 5^2,\ \nu^4 = 1$;
7) $u^4 = 5^2,\ \nu^4 = -1$;

8) $u^4 = -5^2,\ \nu^4 = 1.$

В 1) та 2) випадках $\Lambda$ є диким за теоремою 2. Очевидна дикість у випадках 6)–8). Це випливає із леми 1.

Далі розглянемо зображення кільця $\Lambda$ над $R$, кільцем цілих величин поля $T = \mathbb{Q}_2(5)$.

Зупинимось на випадку 5). Позначимо через $u_1 = \frac{u^2}{\sqrt{5}}$. Тоді матимемо кільце $\Lambda$ з наступними співвідношеннями:

$$u_1^2 = 1,\ \nu^2 = 1,\ u_1\nu = \nu u_1.$$

Нехай $H$ – група типу (2, 4). Тоді отримаємо $\Lambda' H \subset \Lambda'$, $\Lambda' = R \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$. З теореми 2 одержимо, що $\Lambda' H$ є диким кільцем. Звідси та з лем 1 та 3 $\Lambda$ є диким кільцем.

Над кільцем $R$ випадки 3) і 4) виводяться один з одного. Тому залишається тільки випадок:

$$u^4 = 5,\ \nu^4 = -1,\ u\nu = \nu u. \tag{2}$$

Нехай $\varepsilon$ – первісний корінь 8-го степеня з одиниці. Тоді випадок 2) зводиться до випадку $K$-зображення кільця $\Lambda_1$: $u^4 = 5$ ($K = R[\varepsilon]$ – кільце цілих величин поля $T(\varepsilon)$. Розглянемо

$$x^4 - 5 = (x^2 - \sqrt{5})(x^2 + \sqrt{5}).$$

Нехай

$$\theta_1^2 = \sqrt{5},\ \theta_2^2 = -\sqrt{5},$$

$$L = K[\theta_1],\ t = 1 - \varepsilon,\ \pi = \theta_1 - 1,\ V_j = t^j L + \pi L\,(j = 1, 2, 3),\ 2 = \lambda t^4\,(\lambda \in K^*).$$

Очевидно, що $V_j$ буде $\Lambda_1$-модулем, якщо ми покладемо $ux = \theta_1 x$ $(x \in V_j)$. Тому

$$ut^j = \theta_j t^j = (\theta_1 - 1)t^j + t^j; \tag{3}$$

$$u\pi = \theta_1 - 1) = \theta_1^2 - \theta_1\sqrt{5} - \theta_1 = \sqrt{5} - 1 - (\theta_1) = \sqrt{5} - 1 - \pi = (\lambda_1 t^{4-j})t^j - \pi, \tag{4}$$

де

$$\lambda_1 = \lambda\omega^{-1},\ \omega = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Легко бачити, що $\omega^2 - \omega - 1 = 0$. Звідси $\omega$ є цілою величиною поля $T$, тобто $\omega \in R$. Таким чином,

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \omega - 1.$$

Тоді $\omega_1 \in R$ і тому $\omega, \omega_1 \in R^*$. Із рівностей (3) та (4) одержимо, що зображення

$$\Delta_j : u \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 t^{4-j} \\ t^j & -1 \end{pmatrix} = \widetilde{V}_j\ \ (j = 1, 2, 3) \tag{5}$$

є нерозкладне $K$-зображення кільця $\Lambda_1$.

Нехай

$$\widetilde{W}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\omega t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -\lambda\omega.$$

$$\widetilde{W}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda\omega t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2\omega t^2 \\ t^2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda\omega t^4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda\omega t^4 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}E.$$

Це випливає з рівності: $1-\lambda\omega t^4 = 1-2\omega = 1-1-\sqrt{5} = -\sqrt{5}$.

Звідси одержимо, що $\Delta : u \longrightarrow \widetilde{W}_2$ є нерозкладне $K$-зображення кільця $\Lambda_1$, та $\Lambda_j$ і $\Lambda$ є нееквівалентними над полем $T(\varepsilon)$. Розглянемо зображення $\Gamma(A,B)$:

$$\Gamma_u(A,B) = \begin{pmatrix} E\otimes\widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E\otimes\widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E\otimes\widetilde{W}_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де

$$S_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix}$$

($E$ – одинична $n\times n$-матриця, $A,B$ – довільні $n\times n$-матриці над $K$, $A\otimes B$ є кронекерівським добутком матриць $A$ та $B$).

Звідси дістанемо

$$\Gamma_u^2 = \begin{pmatrix} E\otimes\widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E\otimes\widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E\otimes\widetilde{W}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E\otimes\widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E\otimes\widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E\otimes\widetilde{W}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{5}E' & 0 & (E\otimes\widetilde{V}_3)S_1 + S_1(E\otimes\widetilde{W}_2) \\ 0 & \sqrt{5}E' & (E\otimes\widetilde{V}_1)S_1 + S_1(E\otimes\widetilde{W}_2) \\ 0 & 0 & \sqrt{5}E' \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} E'' & D \\ 0 & -E'' \end{pmatrix}.$$

Далі отримаємо $\Gamma_u^4 = 5E'''$ ($E'''$ – $3n\times 3n$-одинична матриця). Таким чином, $\Gamma$ є $K$-зображенням кільця $\Lambda_1$.

Нехай

$$\Gamma_u(A,B)C = CT_u(A',B'), \tag{7}$$

де $C$ – оборотна матриця над кільцем $K$.

Можна показати, що

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix}.$$

Тоді із (7) отримаємо, що

$$\begin{pmatrix} E\otimes\widetilde{V}_3 & 0 & S_1 \\ 0 & E\otimes\widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E\otimes\widetilde{W}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ 0 & 0 & C_7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E\otimes\widetilde{V}_3 & 0 & S_1' \\ 0 & E\otimes\widetilde{V}_1 & S_2 \\ 0 & 0 & E\otimes\widetilde{W}_2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$E\otimes\widetilde{V}_3 = \widetilde{V}_3^{(n)},\ E\otimes\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_1^{(n)},\ E\otimes\widetilde{W}_2 = \widetilde{W}_2^{(n)}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_3^{(n)}C_1 & \widetilde{V}_3^{(n)}C_2 & \widetilde{V}_3^{(n)}C_5+S_1C_7 \\ \widetilde{V}_1^{(n)}C_3 & \widetilde{V}_3^{(n)}C_4 & \widetilde{V}_1^{(n)}C_6+S_2C_7 \\ 0 & 0 & \widetilde{W}_2^{(n)}C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\widetilde{V}_3^{(n)} & C_2\widetilde{V}_1^{(n)} & C_1S_1'+C_2S_2+C_5\widetilde{W}_2^{(n)} \\ C_3\widetilde{V}_3^{(n)} & C_4\widetilde{V}_3^{(n)} & C_3S_1'+C_4S_2+C_6\widetilde{W}_2^{(n)} \\ 0 & 0 & C_7\widetilde{W}_2^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо

$$\widetilde{V}_3^{(n)}C_1 = C_1\widetilde{V}_3^{(n)}, \tag{8}$$

$$\widetilde{V}_1^{(n)}C_3 = C_3\widetilde{V}_3^{(n)}, \tag{9}$$

$$\widetilde{V}_3^{(n)}C_2 = C_2\widetilde{V}_1^{(n)}, \tag{10}$$

$$\widetilde{V}_1^{(n)}C_4 = C_4\widetilde{V}_1^{(n)}, \tag{11}$$

$$\widetilde{W}_1^{(n)}C_7 = C_7\widetilde{V}_2^{(n)}, \tag{12}$$

$$\widetilde{V}_1^{(n)}C_6+S_2C_7 = C_3S_1'+C_4S_2+C_6\widetilde{W}_2^{(n)}, \tag{13}$$

$$\widetilde{V}_3^{(n)}C_5+S_1C_7 = C_1S_1'+C_2S_2+C_5\widetilde{W}_2^{(n)}. \tag{14}$$

Далі із (8) матимемо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 tE \\ t^3E & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Z_1 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Z_1 & U_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \lambda_1 tE \\ t^3E & -E \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{pmatrix} X_1+\lambda_1 tZ_1 & Y_1+\lambda_1 tU_1 \\ t^3X_1-Z_1 & t^3Y_1-U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+t^3Y_1 & \lambda tX_1-Y_1 \\ Z_1+t^3U_1 & \lambda_1 tZ_1-U_1 \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо

$$\lambda_1 tZ_1 = t^3Y_1 \Longrightarrow Z_1 = \lambda_1^{-1}t^2Y_1;$$

$$2Y_1+\lambda_1 tU_1 = \lambda_1 tX_1 \Longrightarrow U_1 = X_1-\lambda_1^{-1}2EY_1 = X_1+\gamma_1 t^3Y_1.$$

В результаті одержимо:

$$C_1 = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ \lambda_1^{-1}t^2Y_1 & X_1+\gamma_1 t^3Y_1 \end{pmatrix} \quad (\gamma_1 \in K^*). \tag{15}$$

Тоді з рівності (11) отримаємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3E \\ tE & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_4 & Y_4 \\ Z_4 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 & Y_4 \\ Z_4 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3E \\ tE & -E \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{pmatrix} X_1+\lambda_1 tZ_1 & Y_1+\lambda_1 tU_1 \\ t^3X_1-Z_1 & t^3Y_1-U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1+t^3Y_1 & \lambda tX_1-Y_1 \\ Z_1+t^3U_1 & \lambda_1 tZ_1-U_1 \end{pmatrix},$$

і, нарешті,

$$X^4 + \lambda_1 t^3 Z_4 = X_4 + tY_4;$$

$$Y_4 = \lambda_1 t^2 Z_4;$$

$$Y_4 + \lambda_1 t^3 U_4 = \lambda_1 t^3 X_4 - Y_4;$$

$$\lambda_1 t^3 U_4 = \lambda_1 t^3 X_4 - 2Y_4;$$

$$\lambda_1 t^3 U_4 = \lambda_1 t^3 X_4 - 2Y_4;$$

$$U_4 = X_4 + \gamma_4 t^3 Z_4 \ \ (\gamma_4 \in K^*).$$

Таким чином, отримаємо

$$C_4 = \begin{pmatrix} X_4 & \lambda_1 t^2 Z_1 \\ Z_4 & X_4 + \gamma_4 t^3 Y_4 \end{pmatrix} \ \ (\gamma_4 \in K^*). \tag{16}$$

Тоді з рівності (9) отримаємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3 E \\ tE & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 & Y_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 & Y_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_1 tE \\ t^3 E & -E \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\begin{pmatrix} X_3 + \lambda_1 t^3 Z_3 & Y_3 + \lambda_1 t^3 U_3 \\ tX_3 - Z_3 & tY_3 - U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 + t^3 Y_3 & \lambda t X_3 - Y_3 \\ Z_3 + t^3 U_3 & \lambda_1 t Z_3 - U_3 \end{pmatrix},$$

звідки,

$$X^3 + \lambda_1 t^3 Z_3 = X_3 + t^3 Y_3;$$

$$Y_3 = \lambda_1 Z_3;$$

$$tX_3 - Z_3 = Z_3 + t^3 U_3;$$

$$X_3 = t^2 X_3'.$$

Таким чином, отримаємо

$$C_3 = \begin{pmatrix} t^2 X_3' & \lambda_1 Z_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

З рівності (10) матимемо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 tE \\ t^3 E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Z_2 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Z_2 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_1 t^3 E \\ tE & -E \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} X_2 + \lambda_1 t Z_2 & Y_2 + \lambda_1 t U_2 \\ t^3 X_2 - Z_2 & t^2 Y_2 - U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 + tY_2 & \lambda_1 t U_2 - Y_2 \\ Z_2 + tU_2 & \lambda_1 t^3 Z_2 - U_2 \end{pmatrix},$$

звідки,

$$X^2 + \lambda_1 t Z_2 = X_2 + tY_2;$$

$$Y_2 = \lambda_1 Z_2;$$

$$t^3 X_2 - Z_2 = Z_2 + tU_2;$$

$$U_2 = t^2 U_3'.$$

Тому

$$C_2 = \begin{pmatrix} X_2 & \lambda_1 Z_2 \\ Z_2 & t^2 U_2' \end{pmatrix}. \tag{18}$$

З рівності (12) отримаємо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_7 & Y_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 & Y_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & -E \end{pmatrix}.$$

Тоді матимемо

$$\begin{pmatrix} X_7 + \lambda_2 t^2 Z_7 & Y_7 + \lambda_2 t^2 U_7 \\ t^2 X_7 - Z_7 & t^2 Y_7 - U_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 + t^2 Y_7 & \lambda_2 t^2 X_7 - Y_7 \\ Z_7 + t^2 U_7 & \lambda_1 t^2 Z_7 - U_7 \end{pmatrix},$$

і тому,

$$X^7 + \lambda_2 t^2 Z_7 = X_7 + t^2 Y_7;$$

$$Y_7 = \lambda_2 Z_7;$$

$$t^2 X_7 - Z_7 = Z_7 + t^2 U_7;$$

$$U_7 = X_7 + t^2 X_7'.$$

Звідки

$$C_2 = \begin{pmatrix} X_7 & \lambda_2 Z_7 \\ Z_7 & X_7 + t^2 X_7' \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Тому з (13), (16), (17) і (19) отримаємо

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ tE & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_6 & Y_6 \\ Z_6 & U_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_7 & Y_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t^2 X_3 & \lambda_1 Z_3 \\ Z_3 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & tE \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} X_4 & \lambda_1 t^2 Z_4 \\ Z_4 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_6 & Y_6 \\ Z_6 & U_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & -E \end{pmatrix} (\bmod t^3).$$

Звідки

$$X_6 + tX_7 \equiv t^2 X' A' + tX_4 + X_6 + tY_6 (\bmod t^3).$$

Тоді маємо

$$X_7 \equiv X_4 (\bmod t). \tag{20}$$

Знову

$$tX_6 - Z_6 + tZ_7 \equiv Z_3 A' + tZ_4 + Z_6 + t^2 U_6 (\bmod t^3).$$

Звідки $Z_3 A' \equiv 0 (\bmod t)$.
Нехай $\det A' \neq 0 (\bmod t)$. Тоді

$$Z_3 \equiv 0 (\bmod t). \tag{21}$$

Тоді матимемо

$$Y_6 + tY_7 \equiv t^2 X_3 B' + t\lambda_1 Z_3 + \lambda_2 t^2 X_6 - Y_6 (\bmod t^3).$$

Звідси та із (21) одержимо: $Y_7 \equiv 0(\mathrm{mod}\ t)$. Тому

$$C_2 = \begin{pmatrix} X_7 & 0 \\ 0 & X_7 \end{pmatrix} (\bmod t). \tag{22}$$

З (14), (15), (18) і (19) матимемо

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1 tE \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_5 & Y_5 \\ Z_5 & U_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & tE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_7 & \lambda_2 Z_7 \\ Z_7 & U_7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & tE \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} X_4 & \lambda_1 t^2 Z_4 \\ Z_4 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tE & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_5 & Y_5 \\ Z_5 & U_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \lambda_2 t^2 E \\ t^2 E & E \end{pmatrix} (\bmod t^3). \tag{23}$$

Звідси випливає

$$Y_5 + \lambda_1 t Z_5 + AX_7 + BZ_7 \equiv X_1 A' + tX_2 + X_5 + t^2 Y_5 (\bmod t^3).$$

Тому з (22) отримаємо

$$A' X_7 \equiv X_1 A' (\bmod t). \tag{24}$$

З (23) одержимо

$$Z_5 + tZ_7 \equiv \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 A' + tZ_2 + Z_5 + t^2 U_5 (\bmod t^3), \ \ Z_2 \equiv 0 (\bmod t).$$

$$Y_5 + \lambda_1 t U_5 + \lambda_2 A Z_7 + BU_7 \equiv X_1 B' + tY_1 + \lambda_1 t Z_2 + \lambda_2 t^2 X_5 + Y_5 (\bmod t^3).$$

Звідси та з рівності (22) отримаємо

$$BX_7 \equiv X_1 B' (\bmod t). \tag{25}$$

На кінець із (23) одержимо

$$U_5 + tU_7 \equiv \lambda_1^{-1} t^2 Y_1 B' + t^3 U_2 + \lambda_2 t^2 Z_5 + U_5 (\bmod t^3),$$

звідки

$$U_7 \equiv X_1 (\bmod t). \tag{26}$$

З (20), (22), (24) і (25) отримаємо:

$$X_7 \equiv X_4 \equiv X_1 (\bmod t),$$
$$AX_1 \equiv X_1 A' (\bmod t),$$
$$BX_1 \equiv X_1 B' (\bmod t).$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & X_2 & 0 & * & * \\ 0 & X_1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & X_1 & 0 & * & * \\ 0 & U_3 & Z_4 & X_1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix} (\bmod t).$$

Звідси $\det C \equiv (\det X_1)^6 (\mathrm{mod}\ t)$. Тому матимемо $\det X_1 \neq 0 (\mathrm{mod}\ t)$.

Одержали, що кільце $\Lambda_1$ є диким над $K$. Звідси робимо висновок, що кільце $\Lambda$ є диким і над $R$. Останнє доводить лему.

**Лема 5.** *Нехай $G$ – скінченна абелева 2-група з $m$ твірними елементами і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda$ – схрещене групове кільце групи $G$ і кільця цілих 2-адичних чисел $\mathbb{Z}_2$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*$, $a, b \in G$), $\mathbb{Z}_2^*$ – мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_2$). Якщо $m > 2$, то кільце $\Lambda$ є диким над кільцем $\mathbb{Z}_2$.*

***Доведення.*** Нехай $m > 2$. Тоді очевидно, що $G$ містить абелеву підгрупа $H$ типу (2, 2, 2). $\Lambda_H$ може бути задана співвідношеннями:

1) $u^2 = 1,\ \nu^2 = \omega^2 = 1;$

2) $u^2 = -1,\ \nu^2 = \omega^2 = 1;$

3) $u^2 = 5,\ \nu^2 = 1,\ \omega^2 = 1;$

4) $u^2 = 5,\ \nu^2 = 1,\ \omega^2 = -1;$

5) $u^2 = -5,\ \nu^2 = 1,\ \omega^2 = 1.$

За теоремою 2 у випадку 1), 2) і 5) $\Lambda_H$ буде диким кільцем. У випадку 3) одержимо дикість $\Lambda_H$, якщо замінимо $\mathbb{Z}_2$ на $R$ ($R$ – кільце цілих величин поля $\mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$). У випадку 4) також матимемо дикість, тому що група типу (2, 2) є дикою над $R[i]$. Звідси та з лем 1 і 3 отримаємо, що $\Lambda$ є диким над $\mathbb{Z}_2$. Останнє доводить лему.

**Лема 6.** *Нехай $G$ – абелева група типу $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи $G$ і кільця цілих 2-адичних чисел з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} = \pm 1$). Кільце $\Lambda$ не є диким тоді і тільки тоді, якщо виконується одна з наступних умов:*

*1) $G$ – група типу $(2, 2)$ і $\Lambda = \mathbb{Z}_2 G$;*

*2) $G$ – група типу $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ і $\Lambda$ задається співвідношенням: $u^{2^m} = -1$, $\nu^2 = 1$, $u\nu = \nu u$;*

*3) $G$ – група типу $(4, 2)$ і $\Lambda$ задається співвідношенням: $u^4 = 1$, $\nu^2 = -1$, $u\nu = \nu u$.*

***Доведення.*** Очевидно, що $\Lambda$ має наступні твірні співвідношення:

$$u^{2^m} = \alpha,\ \nu^2 = \beta,\ u\nu = \nu u\ (\alpha, \beta = \pm 1).$$

Звідси отримаємо 3 випадки:

1) $u^{2^m} = 1,\ \nu^2 = 1;$

2) $u^{2^m} = -1,\ \nu^2 = 1;$

3) $u^{2^m} = 1,\ \nu^2 = -1.$

У випадку 1), коли $m > 1$, $\Lambda$ є диким кільцем. Інакше, коли $m = 1$, воно ним не буде. В 2)-му випадку $n(\Lambda) < \infty$. Обидва випадки випливають з теореми 1.

У випадку 3), коли $m > 2$, $\Lambda$ є диким кільцем. Інакше, коли $m \leq 2$, $\Lambda$ не буде диким. Ці випадки випливають з теореми 2. Що й доводить лему

**Теорема 3.** *Нехай $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ – схрещене групове кільце скінченної абелевої 2-групи $G$ і кільця цілих 2-адичних чисел $\mathbb{Z}_2$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ ($\lambda_{a,b} = \pm 1, a, b \in G$). $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ не є диким над $\mathbb{Z}_2$ тоді і тільки тоді, якщо виконується одна з наступних умов:*

*a) $G$ – циклічна група порядку $2^r$ $(r \geq 3)$ і $\Lambda = \mathbb{Z}_2 G$;*

*b) $G$ – група типу $(2,2)$ і $\Lambda = \mathbb{Z}_2 G$;*

*c) $G$ – циклічна 2-група порядку $2^m$ $(m \geq 1)$ і $\widetilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_1 \otimes \Lambda$ є поле;*

*d) $G$ – група типу $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ і $\Lambda$ кільце із твірними співвідношеннями $u^{2^m} = -1$, $\nu^2 = 1$, $u\nu = \nu u$;*

*e) $G$ – група типу $(4,2)$ і $\Lambda$ є кільцем із співвідношеннями $u^4 = 1$, $\nu^2 = -1$, $u\nu = \nu u$.*

Доведення випливає із лем 2, 4, 5 і 6.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику покійному професору Гудивку П. М. за участь у дискусії та обговоренні результатів даної статті

1. *Гудивок П. М.* О представлениях скрещенных групповых колец конечных групп и колец целых $p$-адических чисел // Доп. НАН України. – 1998.– № 7. – P. 19–23.
2. *Баранник Л. Ф., Гудивок П. М.* Скрещенные групповые кольца конечных групп и колец целых $P$-адических чисел с конечным числом неразложимых целочисленных представлений // Матем. сб. – 1979. – Т. 108, № 2. – С. 187–211.
3. *Дрозд Ю. А.* Адели и целочисленные представления // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 1080–1088.
4. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных $p$-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми $p$-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – Киев: Институт матем. НАН Украины, 1993. – С. 5–14.
5. *Charles W. Curtis, Irving Reiner.* Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras // AMS CHELSEA PUBLISHING. – 2006. – P. 677.
6. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann. – 1983. – Vol. 266. – P. 1–22.
7. *Баранник Л. Ф., Гудивок П. М.* Проективные представления конечных групп над числовыми кольцами // Матем. сб. – 1970. – Т. 82, № 3. – С. 423–443.
8. *Стойка М. В.* Проективні матричні зображення скінченних груп над кільцем цілих $P$-адичних чисел // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 165–170.

Одержано 23.03.2013