УДК 517.9

С.М. Чуйко, П.В. Кулиш, А.В. Белущенко (Слав'янський пед. ун-т)

СЛАБОНЕЛИНЕЙНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of nonlinear Noetherian boundary value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения $z(t,\varepsilon)$: $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи [1]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \tag{1}$$

в малой окрестности решения порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ – $(n \times n)$- мерная матрица и $f(t)$ – n- мерный вектор-столбец, элементы которых – непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$– линейный ограниченный функционал $\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Предположим нелинейную вектор-функцию

$$Z(z,t,\varepsilon) = \mu(\varepsilon)\mathcal{M}(z,t,\varepsilon) + \mathcal{N}(z,t,\varepsilon)$$

и нелинейный векторный функционал

$$J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \mu(\varepsilon)\mathcal{H}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \mathcal{L}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$$

линейными однородными функциями неизвестной $\mu(\varepsilon)$; здесь $\mathcal{M}(z,t,\varepsilon)$ и $\mathcal{N}(z,t,\varepsilon)$ – нелинейные вектор-функции, непрерывно дифференцируемые по z в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывные по t на отрезке $[a,b]$ и непрерывные по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$;

$$\mathcal{H}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \mathcal{L}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

– нелинейные функционалы, непрерывно дифференцируемые по z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывные по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Предположим неизвестную $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ непрерывной функцией малого параметра ε. Исследуем критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$; при условии

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} = 0$$

порождающая задача (2) имеет $(r = n - n_1)$– параметрическое семейство решений

$$z_0(t,c_0) = X_r(t)c_0 + G\left[f(s);\alpha\right](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)-$ нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (2), $Q := \ell X(\cdot)-$ $(m \times n)-$ матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, $P_{Q_r}-$ $(n \times r)-$ матрица, составленная из $r-$ линейно-независимых столбцов $(n \times n)-$ матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$ и $P_{Q^*}-$ $(m \times m)-$ матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$,

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t) + X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f\Big](\cdot)\Big\}$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K\Big[f(s)\Big](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+- псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [1]. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса, исследованные в монографиях [3–5].

2. Условия существования решения. Зафиксируем вектор $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, определяющий порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$. Предположим, что задача (1) имеет решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее $z_0(t, c_0^*)$ и существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$. Тогда выполняется условие [1]

$$P_{Q^*}\Big\{J(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K\Big[Z(z_0(s, c_0^*), s, 0)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Оставляя ρ линейно независимых строк последнего условия

$$P_{Q^*_\rho}\Big\{J(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K\Big[Z(z_0(s, c_0^*), s, 0)\Big](\cdot)\Big\} = 0,$$

приходим к уравнению

$$\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) := D_0 \cdot \mu_0 + P_{Q^*_\rho}\Big\{\mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K\Big[\mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0)\Big](\cdot)\Big\} = 0, \qquad (3)$$

где

$$D_0 := P_{Q^*_\rho}\Big\{\mathcal{H}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K\Big[\mathcal{M}(z_0(s, c_0^*), s, 0)\Big]\Big\} \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}.$$

Здесь $P_{D_0^*}-$ $(\rho \times \rho)-$ мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^\rho \to N(D_0^*)$, аналогично $P_{D_0}-$ ортопроектор: $\mathbb{R}^1 \to N(D_0)$; кроме того, $P_{Q^*_\rho} \in \mathbb{R}^{\rho \times m}$ — матрица, составленная из ρ линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}. В случае $P_{D_0^*}P_{Q^*_\rho} = 0$, $\;P_{D_0} = 0$ уравнение (3) имеет единственное решение

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q^*_\rho}\Big\{\mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K\Big[\mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Необходимые условия существования решения нетеровой краевой задачи (1) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [7].

Лема 1. *Пусть нетерова ($m \neq n$) краевая задача (1) представляет критический ($P_{Q^*} \neq 0$) случай и выполнено условие разрешимости порождающей задачи (2). Предположим также, что задача (1) имеет решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее $z_0(t, c_0^*)$ и существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$; тогда $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0^*) = 0$. При условии*

$$P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0$$

имеет место равенство

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[\mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right](\cdot) \right\}.$$

В случае $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0$ для любого фиксированного вектора $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ константа μ_0^* определяет порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной задачи (1). При условии

$$P_{D_0^*} \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[\mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right](\cdot) \right\} \neq 0$$

исходная задача (1) не имеет искомых решений. Если же

$$P_{D_0^*} \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[\mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right](\cdot) \right\} = 0, \quad P_{D_0} \neq 0,$$

то константа μ_0^* находится неоднозначно

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[\mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right](\cdot) \right\} + P_{D_0} \cdot \widetilde{\mu}_0, \quad \widetilde{\mu}_0 \in \mathbb{R}^1.$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае первого или второго порядка [1], а также периодическими краевыми задачами [2], уравнение $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) = 0$ будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1) в случае параметрического резонанса.

Предположим, что уравнение (3) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_0^* \in \mathbb{R}^r, \quad \mu_0^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (3), приходим к задаче об отыскании решения

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), \quad x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

задачи (1) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_0^*) = X_r(t) c_0^* + G\left[f(s);\ \alpha\right](t),$$

а также функции

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0^* + \gamma(\varepsilon), \quad \gamma(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \gamma(0) = 0$$

в окрестности точки μ_0^*. Отклонение

$$x(t, \varepsilon) : \ x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \ x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

от порождающего решения определяет краевая задача

$$dx(t,\varepsilon)/dt = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{4}$$

$$\ell\, x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{5}$$

разрешимая тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_\rho^*}\Bigg\{\mu(\varepsilon)\mathcal{H}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \mathcal{L}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Big[\mu(\varepsilon)\mathcal{M}(z,s,\varepsilon) + \mathcal{N}(z,s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\} = 0.$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функций $\mathcal{M}(z,t,\varepsilon)$ и $\mathcal{N}(z,t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эти функции в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$

$$\mathcal{M}(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \mathcal{M}(z_0(t,c_0^*),t,0) + A_1(t)x(t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$
$$\mathcal{N}(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \mathcal{N}(z_0(t,c_0^*),t,0) + B_1(t)x(t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon);$$

здесь

$$A_1(t) = \frac{\partial\mathcal{M}(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}} \qquad A_2(t) = \frac{\partial\mathcal{M}(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

и

$$B_1(t) = \frac{\partial\mathcal{N}(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0,}} \qquad B_2(t) = \frac{\partial\mathcal{N}(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

Остатки $R_M(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и $R_N(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функций $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$, чем первые три члена разложений, поэтому

$$R_M(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_M(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*)\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0,$$

и

$$R_N(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_N(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0}} \equiv 0.$$

Аналогично используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторных функционалов $\mathcal{H}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и $\mathcal{L}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейные по x и по ε части $h_1x(\cdot,\varepsilon)$, $\varepsilon h_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)$, $\ell_1x(\cdot,\varepsilon)$ и $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)$, этих функционалов и члены

$$\mathcal{H}(z_0(\cdot,c_0^*),0):=\mathcal{H}(z(\cdot,0),0),\quad \mathcal{L}(z_0(\cdot,c_0^*),0):=\mathcal{L}(z(\cdot,0),0)$$

нулевого порядка по ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$:

$$\mathcal{H}(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=\mathcal{H}(z_0(\cdot,c_0^*),0)+h_1x(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon h_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)+J_H(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\mathcal{L}(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=\mathcal{L}(z_0(\cdot,c_0^*),0)+\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)+J_L(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Остатки $J_H(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и $J_L(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционалов $\mathcal{H}(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и $\mathcal{L}(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$, чем первые два члена разложения, поэтому

$$J_H(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0\end{array}}=0,\quad \frac{\partial J_H(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0\end{array}}=0,$$

$$\frac{\partial J_H(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon\ =\ 0\end{array}}=0.$$

Для нахождения функции $\gamma(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$D_0\cdot\gamma(\varepsilon)=-P_{Q_\rho^*}\Bigg\{(\mu_0^*+\gamma(\varepsilon))\Big[h_1x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon h_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)+J_H(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]+$$

$$+\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)+J_L(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Bigg\{(\mu_0^*+\gamma(\varepsilon))\Big[A_1(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_M(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]+$$

$$+B_1(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon B_2(t)+R_N(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}.$$

Таким образом, при условии

$$P_{D_0^*}P_{Q_\rho^*}=0,\quad P_{D_0}=0$$

задача (4), (5) разрешима, причем однозначно; ее решение определяет операторная система

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_0^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),\tag{6}$$

$$\gamma(\varepsilon) = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*}\Bigg\{(\mu_0^* + \gamma(\varepsilon))\Big[h_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_H(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big] +$$
$$+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell K\Bigg\{(\mu_0^* + \gamma(\varepsilon))\Big[A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big] +$$
$$+B_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}.$$

Для построения приближенного решения операторной системы (6) в случае $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0,\ P_{D_0} = 0$ применим метод простых итераций [1, 2]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай $P_{Q^*} \neq 0$ и выполнено условие разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня $c_0^* \in \mathbb{R}^r,\ \mu_0^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (3) при условиях $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0$ и $P_{D_0} = 0$ задача (4), (5) имеет единственное решение*

$$x(t,\varepsilon):\ x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ x(t,0) \equiv 0,$$

определяемое операторной системой (6), и существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$. При этом нетерова ($m \neq n$) задача (1) имеет единственное решение

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ z(t,0) = z_0(t, c_0^*).$$

Для построения решения операторной системы (6) для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ применима итерационная схема

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_0^*) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0^*) + x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon) = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*}\Bigg\{(\mu_0^* + \gamma_k(\varepsilon))\Big[h_1 x_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_H(z_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big] +$$
$$+\ell_1 x_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell K\Bigg\{(\mu_0^* + \gamma_k(\varepsilon))\Big[A_1(t)x_{k+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big] +$$
$$+B_1(t)x_{k+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ .$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 2], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (6) аналогично [6].

3. Уравнение колебаний маятника с параметрическим возбуждением. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения

$$u'' + \Big(1 + \varepsilon\lambda(\varepsilon)\Big)\sin u - \varepsilon^2\cos t = 0. \tag{7}$$

Решение

$$u(t,\varepsilon):\ u(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi],\quad u(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\quad u(t,0) \equiv 0$$

2π-периодической задачи для уравнения (7) ищем в виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\cos t + \varepsilon^2 y(t,\varepsilon).$$

Неизвестная

$$y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi],\quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

является решением 2π-периодической задачи для уравнения

$$y'' + y = \varepsilon Y(y,t,\lambda(\varepsilon),\varepsilon).$$

Нелинейная функция

$$Y(y,t,\lambda(\varepsilon),\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon^3}\left[u - \Big(1 + \varepsilon\lambda(\varepsilon)\Big)\sin u + \varepsilon^2\cos t\right]$$

при условии $\lambda_0^* := \lambda(0) = 1$ непрерывно дифференцируема по y в малой окрестности решения порождающей задачи и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$, а также непрерывна по t на отрезке $[a,b]$. Согласно принятым обозначениям, в случае периодической задачи для уравнения (7), приходим к задаче о нахождении $2\pi-$ периодического решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\,\Big(z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\Big),\ z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \in C^1[0,2\pi],\ C[0,\varepsilon_0]$$

системы

$$dz/dt = A(t)z + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon) \tag{8}$$

и функции

$$\mu(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}\cdot\Big[\lambda(\varepsilon) - \lambda_0^*\Big] \in C[0,\varepsilon_0],$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad Z(z,t,\varepsilon) = \mu(\varepsilon)\mathcal{M}(z,t,\varepsilon) + \mathcal{N}(z,t,\varepsilon),\quad J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0.$$

Нелинейные вектор-функции

$$\mathcal{M}(z,t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos t - \varepsilon\cdot z^{(a)}(t,\varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon^2\cos^3 t + \frac{1}{2}\varepsilon^3\cos^2 t\cdot z^{(a)}(t,\varepsilon) +\ \ldots \end{bmatrix}$$

и

$$\mathcal{N}(z,t,\varepsilon)=\left[\begin{array}{c}0\\ \frac{1}{6}\cos^3 t-z^{(a)}(t,\varepsilon)+\frac{1}{6}\varepsilon\Big(\cos^3 t+3\cos^2 tz^{(a)}(t,\varepsilon)\Big)\end{array}\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{120}\left[\begin{array}{c}0\\ -\cos^5 t+60\cos^2 tz^{(a)}(t,\varepsilon)+60\cos t\Big(z^{(a)}(t,\varepsilon)\Big)^2\end{array}\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^3}{120}\left[\begin{array}{c}0\\ -\cos^5 t-5\cos^4 tz^{(a)}(t,\varepsilon)+60\cos t\Big(z^{(a)}(t,\varepsilon)\Big)^2+20\Big(z^{(a)}(t,\varepsilon)\Big)^3\end{array}+\dots\right]$$

непрерывно дифференцируемы по z в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывны по t на отрезке $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемы по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Нормальная фундаментальная матрица линейной части дифференциального уравнения (8) суть функция

$$X(t)=\left[\begin{array}{cc}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{array}\right].$$

Поскольку $Q=X(0)-X(2\pi)=0$, постольку имеет место критический случай; при этом $r=2$, $P_{Q^*}=P_{Q_r}=I_2$. Вычисляем далее оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[f(s)\Big](t)=X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

для линейной части дифференциального уравнения (8) с произвольной неоднородностью $f(t)$:

$$dz/dt=A(t)z+f(t).$$

При этом

$$\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)=K\Big[f(s)\Big](0)-K\Big[f(s)\Big](2\pi)=-\int\limits_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s)ds,$$

следовательно

$$P_{Q_r^*}\ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)=-\int\limits_0^{2\pi} X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Заметим также, что в силу равенства $Q=Q^+=0$ оператор Грина задачи Коши линейной части дифференциального уравнения (8) с произвольной неоднородностью $f(t)$ совпадает с оператором Грина $2\pi-$ периодической задачи

$$G\Big[f(s);0\Big](t)\equiv K\Big[f(s)\Big](t).$$

Фиксируя вектор

$$c_0^*=\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right],$$

приходим к задаче об отыскании решения

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), \quad x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) = 0$$

$2\pi-$ периодической задачи для уравнения (8) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_0^*) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Неравенство

$$D_0 := -P_{Q_\rho^*}\ell K\Big[\mathcal{M}(z_0(s,c_0^*),s,0)\Big](\cdot) = -\pi \neq 0$$

гарантирует выполнение условий $P_{D_0^*}P_{Q_\rho^*} = 0$ и $P_{D_0} = 0$ и следовательно, однозначную разрешимость $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (8), при этом согласно доказанной лемме

$$\mu_0^* = D_0^{-1}\cdot P_{Q_\rho^*}\Big\{\ell K\Big[\mathcal{N}(z_0(s,c_0^*),s,0)\Big](\cdot)\Big\} = -\frac{7}{8}.$$

Первое приближение к решению задачи (4), (5) в случае $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (8)

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_0^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_0^*),0)\Big](t) = \frac{1}{192}\begin{bmatrix} \cos t - \cos 3t \\ -\sin t + \sin 3t \end{bmatrix}$$

определяет первое приближение

$$\gamma_1(\varepsilon) = D_0^+\cdot P_{Q_\rho^*}\ell K\Big\{\mu_0^*\Big[A_1(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t,c_0^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big] +$$

$$+B_1(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t,c_0^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big\}(\cdot) = \frac{263\varepsilon}{192} + \frac{985\varepsilon^2}{1536} + \frac{37\varepsilon^3}{256} + \ ...$$

к функции $\gamma(\varepsilon)$. Таким образом, на первом шаге итерационной схемы найдено первое приближение к решению $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (7)

$$y_1(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{\varepsilon}{192}\Big(\cos t - \cos 3t\Big), \quad \mu_1(\varepsilon) = -\frac{7}{8} + \frac{263\varepsilon}{192} + \frac{985\varepsilon^2}{1536} + \frac{37\varepsilon^3}{256} + \ \dots .$$

Более точные приближения 2π-периодической задачи для уравнения (7) удобнее искать при помощи метода малого параметра Пуанкаре; так, на девятом шаге находим 2π-периодическое приближение к решению уравнения (7)

$$y_9(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{\varepsilon}{192}\Big(\cos t - \cos 3t\Big) + \frac{11\varepsilon^2}{512}\Big(\cos t - \cos 3t\Big) +$$

$$+\frac{\varepsilon^3}{61\ 440}\Big(1\ 742\cos t - 1\ 745\cos 3t + 3\cos 5t\Big) +$$

$$+\frac{\varepsilon^4}{49152}\Big(665\cos t - 681\cos 3t + 16\cos 5t\Big) +$$

$$
+\frac{\varepsilon^5}{82\ 575\ 360}\Big(312\ 112\cos t - 382\ 802\cos 3t + 70\ 735\cos 5t - 45\cos 7t\Big)+
$$
$$
+\frac{\varepsilon^6}{566\ 231\ 040}\Big(2\ 438\ 947\cos t - 3\ 081\ 462\cos 3t + 645\ 380\cos 5t - 2\ 865\cos 7t\Big)+
$$
$$
+\frac{\varepsilon^7}{190\ 253\ 629\ 440}\Big(520\ 915\ 783\cos t - 680\ 323\ 640\cos 3t+
$$
$$
+ + 163\ 203\ 292\cos 5t - 3\ 796\ 695\cos 7t 1\ 260\cos 9t\Big)+
$$
$$
+\frac{\varepsilon^8}{9\ 132\ 174\ 213\ 120}\Big(11\ 946\ 649\ 831\cos t - 16\ 160\ 177\ 268\cos 3t+
$$
$$
+4\ 612\ 534\ 556\cos 5t - 399\ 727\ 965\cos 7t + 720\ 846\cos 9t\Big)+
$$
$$
+\frac{\varepsilon^9}{24\ 108\ 939\ 922\ 636\ 800}\Big(22\ 427\ 461\ 473\ 545\cos t - 30\ 903\ 787\ 349\ 028\cos 3t+
$$
$$
+9\ 898\ 090\ 977\ 940\cos 5t - 1\ 431\ 776\ 839\ 185\cos 7t+
$$
$$
+10\ 013\ 777\ 928\cos 9t - 2\ 041\ 200\cos 11t\Big),
$$

а также функцию

$$
\lambda_9(\varepsilon) = 1 - \frac{7\varepsilon}{8} + \frac{263\varepsilon^2}{192} - \frac{3\varepsilon^3}{4} + \frac{97\ 177\varepsilon^4}{92\ 160} - \frac{1\ 326\ 277\varepsilon^5}{1\ 474\ 560}+
$$
$$
+\frac{3\ 352\ 913\varepsilon^6}{3\ 096\ 576} - \frac{3\ 799\ 821\ 737\varepsilon^7}{3\ 963\ 617\ 280} + \frac{978\ 739\ 999\ 673\varepsilon^8}{951\ 268\ 147\ 200}-
$$
$$
-\frac{44\ 407\ 726\ 679\ 639\varepsilon^9}{45\ 660\ 871\ 065\ 600} + \frac{4\ 903\ 768\ 365\ 486\ 719\varepsilon^{10}}{4\ 821\ 787\ 984\ 527\ 360}\ .
$$

Девятое приближение к 2π-периодическому решению уравнения (7) и его собственной функции $\lambda(\varepsilon)$ характеризует невязка

$$
\delta_9(\varepsilon) = \left|\left|u_9''(t,\varepsilon) + \Big(1 + \varepsilon\lambda_9(\varepsilon)\Big)\sin u_9(t,\varepsilon) - \varepsilon^2\cos t\right|\right|_{C[0;2\pi]}.
$$

В частности

$$
\delta_9(0,1) \approx 9,62\ 182 \times 10^{-14},\ \ \delta(0,01) \approx 5,00\ 088 \cdot 10^{-18}.
$$

В случае параметрического резонанса определяет доказанная теорема является обобщением соответствующего утверждения [7].

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. 1934. № 3. С. 5 — 29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
6. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания.– 2005.— **8**, № 2.– С. 278 — 288.
7. *Чуйко С.М., Кулиш П.В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — **24**. — С. 243 — 252.

Одержано 15.01.2013