УДК 512.643.8

Р. Ф. Динис (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ЗВІДНІСТЬ МАТРИЦЬ $M(t, n-4, n)$ НАД ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ ДОВЖИНИ 2

It has been shown that a matrix $M(t, n-4, n)$ is reducible over a local principle ideal ring of length two if $n > 5$. Here $M(t,k,n) = \Phi \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & tI_{n-k} \end{smallmatrix}\right)$, where Φ is the companion matrix for $\lambda^n - 1$, t is a generator of the Jacobson radical, I_k is the identity $k \times k$-matrix.

Показано, що матриця $M(t, n-4, n)$ є звідною над локальним кільцем головних ідеалів довжини два, якщо $n > 5$. Тут $M(t,k,n) = \Phi \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & tI_{n-k} \end{smallmatrix}\right)$, де Φ – супровідна матриця для $\lambda^n - 1$, t — твірний елемент радикала Джекобсона, I_k – одинична $k \times k$-матриця.

1. Вступ. Перенесення поняття подібності матриць з полів на довільні комутативні кільця (з одиницею) сильно ускладнює задачу їх класифікації [1]. Вона розв'язана лише над деякими кільцями головних ідеалів для матриць малих порядків (див., напр., [1]– [3]). Важливу роль при описанні (з точністю до подібності) матриць над комутативними кільцями відіграють незвідні матриці, задача описання яких також далека від розв'язання. Як випливає з вигляду загальної канонічної форми квадратної матриці над полем [4], вона незвідна тоді і тільки тоді, коли її характеристичний многочлен незвідний. Незвідність характеристичного многочлена квадратної матриці є достатньою, але не обов'язково необхідною умовою незвідності матриці над комутативним кільцем з одиницею.

В роботі розглядаються питання звідності матриць вигляду

$$M(t,k,n) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0 \quad \ldots \quad 0}}^{k} \hphantom{\quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad t} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & t \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & t & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & t & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

над комутативним кільцем K з одиницею, де n, k — натуральні числа, $k < n$, і $t \in K$. Такі матриці при $k = 1$ та $k = n-1$ у випадку комутативного локального кільця K з радикалом Джекобсона tK виникають при вивчені незвідних матричних зображень скінченних p-груп над цими ж кільцями характеристики p^s (див. [5]).

В роботі [6] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне кільце з одиницею, $t \in K$, k, n — натуральні числа, $k < n$. Якщо $(k,n) > 1$, то матриця $M(t,k,n)$ порядку n звідна над кільцем K.*

Тут вираз (k,n) позначає, як звичайно, найбільший спільний дільник чисел k та n.

В [6] також показано, що матриця $M(t,k,n)$ порядку $n \le 6$ звідна над комутативним локальним кільцем K, радикал Джекобсона якого є головним ідеалом, породженим елементом t $(0 < k < n)$, тоді і тільки тоді, коли $(k,n) > 1$. Із основного результату даної роботи випливає, що це твердження невірне для довільного непарного $n > 6$, де K — комутативне локальне кільце головних ідеалів довжини 2 з твірним елементом t його радикалу Джекобсона (тобто, для кожного такого n існує взаємно просте з ним натуральне число $k < n$ таке, що матриця $M(t,k,n)$ звідна).

2. Формулювання основного результату. Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай K — комутативне локальне кільце головних ідеалів довжини 2 і t — твірний елемент його радикалу Джекобсона. Тоді матриця*

$$M(t,n-4,n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

порядку $n > 5$ є звідною над кільцем K.

З теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай n — непарне натуральне число, $n > 6$. Тоді існує таке натуральне $1 < k < n$, що $(k,n) = 1$ і матриця $M(t,k,n)$ звідна над кільцем K.*

Доведення. Очевидно, $(n-4,n) = (4,n) = 1$, але за теоремою 2 матриця $M(t,n-4,n)$ звідна над кільцем K і тому $k = n-4$ задовольняє умову наслідку.

3. Доведення основного результату. Нехай C – оборотна матриця порядку n над кільцем K вигляду

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$$M(t,n-4,n)C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю D розміру $n \times (n-4)$ над кільцем K вигляду

$$D = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & t \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & t \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\
t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Звідси отримуємо

$$
C^{-1} \overbrace{\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\
t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}}^{n-4}
= \left(\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

Отже,

$C^{-1}M(t, n-4, n)C = C^{-1}[M(t, n-4, n)C] =$

$$
= C^{-1} \left(\begin{array}{ccccccc|ccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right) =
$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathrm{A} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & \\ \hline & & & & & & \\ & & 0 & & & & \mathrm{B} \\ & & & & & & \end{array}\right),$$

де 0 — нульова матриця розміру $4 \times (n-4)$ над кільцем K, A, B — матриці розмірів $(n-4) \times n$ і 4×4 (відповідно) над кільцем K. Таким чином, ми довели звідність матриці $M(t, n-4, n)$ над кільцем K.

Теорема доведена.

Автор щиро вдячна В. М. Бондаренку та О. А. Тилищаку за детальне обговорення задачі та цінні поради.

1. *Шевченко В. Н. Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
2. *Pizarro A.* Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – Vol. 54. – P. 29–51.
3. *Prasad A., Singla P., and Spallone S.* Similarity of matrices over local rings of length two// `http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf`.
4. *Фадеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
5. *Гудивок П. М., Тилищак О. А.* Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. — 1998. — Вип. 3. — С. 78—83.
6. *Динис Р.Ф., Тилищак О.А.* Про звідність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23 №1. – С. 57–62.

Одержано 28.02.2013