

УДК 519.21

Б. В. Довгай (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ З ОРЛІЧЕВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

The string oscillation equation with zero initial and boundary conditions and a centered strictly Orlicz right-hand side is considered. Conditions are established for existence of solution of the boundary-value problem of mathematical physics in the form of uniformly convergent in probability series in terms of covariance function.

Розглядається рівняння коливання струни з нульовими початковими та крайовими умовами та центрованою строго Орлічевою правою частиною. Встановлені умови існування розв'язку крайової задачі математичної фізики у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції.

Вступ. Систематичне вивчення властивостей Орлічевських процесів почалося з робіт [1, 2], де досліджувались умови та швидкості збіжності випадкових рядів у нормах деяких просторів Орліча. Новий метод дослідження випадкових задач математичної фізики, який ґрунтується на дослідженні збіжності за ймовірністю у функціональних просторах послідовності часткових сум, що апроксимують розв'язок крайової задачі, було розроблено в роботах Бейсенбаєва Є. та Козаченка Ю.В. [3] і Булдигіна В.В. та Козаченка Ю.В. [4]. Вказаний метод був використаний для обґрунтування застосовності методу Фур'є до розв'язання крайової задачі в ряді робіт [4–16].

В цій роботі розглядається рівняння коливання струни з нульовими початковими і крайовими умовами та центрованою строго Орлічевою правою частиною. В [15] було встановлено достатні умови існування розв'язку цієї задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду. В даній роботі одержуються достатні умови існування розв'язку у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння.

1. Випадкові процеси з простору Орліча.

Означення 1 ([17]). *Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається \mathbb{C} -функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.*

Нехай (Ω, \mathcal{F}, P) – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2 ([17]). *Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим \mathbb{C} -функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ , що $EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = \inf \left\{ r > 0 : EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1 \right\}.$$

Означення 3 ([17]). *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 4 ([17]). \mathcal{C} -функція $U(x)$ підпорядкована \mathcal{C} -функції $V(x)$ ($U \prec V$), якщо існують $x_0 \geq 0$ та $C > 0$ такі, що при $|x| > x_0$ має місце нерівність $U(x) \leq V(Cx)$.

Означення 5 ([18]). Нехай $U(x)$ – така \mathcal{C} -функція, що $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$. Сім'я Δ випадкових величин ξ , $E\xi = 0$, з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевою, якщо існує стала C_Δ така, що для скінченної кількості випадкових величин $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ виконується нерівність

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right\|_{L_U} \leq C_\Delta \left(E \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Зауваження 1 ([18]). Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ .

Теорема 1 ([18]). Нехай Δ – строго Орлічева сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ в просторі $L_U(\Omega)$ є строго Орлічевою сім'єю з тою ж самою визначальною сталою.

Означення 6 ([18]). Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго Орлічевою.

Означення 7 ([17]). Будемо говорити, що \mathcal{C} -функція U задовольняє g -умові, якщо існують такі сталі $z_0 \geq 0$, $K > 0$, $A > 0$, що для всіх $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ виконується нерівність

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

2. Умови існування розв'язку в термінах коваріаційної функції.

Нехай $T > 0$ – деяка стала, функція $q(x)$, $x \in [0, \pi]$ – неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ – вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\xi(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0. \quad (3)$$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - qX + \lambda X = 0 \quad (4)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0 \quad (5)$$

Нехай $X_n(x)$ – ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n – відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на q всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [19].

Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Теорема 2 ([15]). *Нехай в (1) $\xi(x, t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_Δ , вибірково неперервне з ймовірністю одиниця, U задовольняє g -умові. Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, така, що функція $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Припустимо виконуються умови:*

1) Збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} \mu_k \mu_m \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) < \infty,$$

де

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} |\mathbf{E} \zeta_k(t) \zeta_m(s)|, \quad \zeta_k(t) = \int_0^\pi \xi(x, t) X_k(x) dx.$$

2) Для довільного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\frac{\pi}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{F_3}{v} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \left(\frac{T}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{F_3}{v} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \right) dv < \infty,$$

де $F_3 > 0$ – стала, визначена в [15].

3) Існують такі сталі $b_{k,m} > 0$, що

$$|\mathbf{E}(\zeta_k(t) - \zeta_k(s))(\zeta_m(t) - \zeta_m(s))| \leq b_{k,m} \varphi^{-2} \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m} < \infty.$$

Тоді ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \zeta_n(u) du, \quad (6)$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^\pi \xi(x, t) X_n(x) dx, \quad (7)$$

збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0, \pi] \times [0, T]$ ($T > 0$ – деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з (6) почленним диференціюванням один та два рази по t і один та два рази по x , та з ймовірністю одиниця задача (1)–(3) має розв’язок, який можна зобразити у вигляді ряду (6).

Зауваження 2. Умова 2 теореми 2 виконується, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{1}{v} \right) \right)^2 \right) dv < \infty.$$

Позначимо $B(x, y, t, s) = E\xi(x, t)\xi(y, s)$, $(x, y, t, s) \in [0, \pi]^2 \times [0, T]^2$.

Припустимо, що $B(0, y, t, s) = B(\pi, y, t, s) = 0$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$
 $B(x, 0, t, s) = B(x, \pi, t, s) = 0$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$.

Для кожної фіксованої пари $(t, s) \in [0, T]^2$ продовжимо функцію $B(x, y, t, s)$ як функцію від x, y на всю площину \mathbb{R}^2 так, щоб вона була періодичною функцією з періодом 2π по x та по y і щоб виконувались тотожності

$$B(-x, y, t, s) = -B(x, y, t, s) = B(x, -y, t, s).$$

Внаслідок нашого припущення таке продовження можливе.

Позначимо

$$\begin{aligned} B_{i,j}(x, y, t, s) &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} B(x, y, t, s), \quad 0 \leq i, j \leq 1; \\ \Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B(x, y, t, s) &= B(x + \delta_1, y + \delta_2, t, s) - B(x + \delta_1, y, t, s) - B(x, y + \delta_2, t, s) + B(x, y, t, s); \\ \Delta_{x,\delta} B(x, y, t, s) &= B(x + \delta, y, t, s) - B(x, y, t, s); \\ \Delta_{y,\delta} B(x, y, t, s) &= B(x, y + \delta, t, s) - B(x, y, t, s); \\ \tilde{B}(x, y, t, s) &= B(x, y, t, t) - B(x, y, t, s) - B(x, y, s, t) + B(x, y, s, s). \end{aligned}$$

Лема 1. Нехай при всіх $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$ існує неперервна похідна $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s)$. Припустимо для деяких неперервних функцій $\tau(\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ та $\tau(\delta)$, $\delta \geq 0$ таких, що $\tau(\delta_1, \delta_2) > 0$ при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0, \delta_2) = \tau(\delta_1, 0) = 0$, $\tau(\delta_1, \delta_2)$ монотонно зростає по δ_1 та δ_2 , $\tau(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ монотонно зростає, для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{0 \geq t \geq T \\ 0 \geq s \geq T - \pi - \pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx dy &\leq C_{1,i,j} \tau(\delta_1, \delta_2); \\ \sup_{\substack{0 \geq t \geq T \\ 0 \geq s \geq T}} \int_0^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx \right) dy &\leq C_{2,i,j} \tau(\delta); \\ \sup_{\substack{0 \geq t \geq T \\ 0 \geq s \geq T}} \int_0^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dy \right) dx &\leq C_{3,i,j} \tau(\delta). \end{aligned}$$

де $C_{1,i,j} > 0$, $C_{2,i,j} > 0$, $C_{3,i,j} > 0$, $0 \leq i, j \leq 1$ – константи.

Тоді має місце нерівність

$$C_{k,m} \leq \sum_{i,j=0}^1 \frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2 \mu_m^2} \left(\frac{C_{1,i,j} \tau(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m})}{8\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{LC_{2,i,j} \tau(\frac{\pi}{k})}{4m} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{LC_{3,i,j} \tau(\frac{\pi}{m})}{4k} + \frac{C_{G,i,j}}{km} \right),$$

де L – константа з (8),

$$C_q = \sup_{0 \leq x \leq \pi} |q(x)|, \quad C_{G,i,j} = L^2 \pi^2 \max_{\substack{x \in [0, \pi] \\ y \in [0, \pi] \\ t \in [0, T] \\ s \in [0, T]}} |B_{2i,2j}(x, y, t, s)|.$$

Доведення. Розглянемо

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} |\mathbb{E} \zeta_k(t) \zeta_m(s)|.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \zeta_k(t) \zeta_m(s) &= \mathbb{E} \int_0^\pi \xi(x, t) X_k(x) dx \int_0^\pi \xi(y, s) X_m(y) dy = \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) B(x, y, t, s) dx dy. \end{aligned}$$

Оскільки $X_k(x) = \frac{1}{\lambda_k} \left(q(x) X_k(x) - \frac{d^2}{dx^2} X_k(x) \right)$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \zeta_k(t) \zeta_m(s) &= \frac{1}{\lambda_k \lambda_m} \int_0^\pi \int_0^\pi \left(q(x) X_k(x) - \frac{d^2}{dx^2} X_k(x) \right) \\ &\quad \cdot \left(q(y) X_m(y) - \frac{d^2}{dy^2} X_m(y) \right) B(x, y, t, s) dx dy \\ &= \frac{1}{\lambda_k \lambda_m} \int_0^\pi \left(q(y) X_m(y) - \frac{d}{dy} X_m(y) \right) \left[\int_0^\pi \left(q(x) X_k(x) - \frac{d^2}{dx^2} X_k(x) \right) B(x, y, t, s) dx \right] dy. \\ &\quad \int_0^\pi \left(\frac{d^2}{dx^2} X_k(x) \right) B(x, y, t, s) dx = \left(\frac{d}{dx} X_k(x) \right) B(x, y, t, s) \Big|_{x=0}^\pi - \\ &\quad - \int_0^\pi \frac{\partial B(x, y, t, s)}{\partial x} \frac{dX_k(x)}{dx} dx = -X_k(x) \frac{\partial B(x, y, t, s)}{\partial x} \Big|_{x=0}^\pi + \\ &\quad + \int_0^\pi X_k(x) \frac{\partial^2 B(x, y, t, s)}{\partial x^2} dx = \int_0^\pi X_k(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \zeta_k(t) \zeta_m(s) &= \frac{1}{\lambda_k \lambda_m} \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) \left(q(x) B(x, y, t, s) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) \right) \\ &\quad \cdot \left(q(y) X_m(y) - \frac{d^2}{dy^2} X_m(y) \right) dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda_k \lambda_m} \left[\int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q(x) q(y) B(x, y, t, s) dx dy - \right. \\
&\quad - \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) dx dy - \\
&\quad - \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) q(x) B(x, y, t, s) \frac{d^2}{dy^2} X_m(y) dx dy + \\
&\quad \left. + \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} X_m(y) \right) dx dy \right].
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi B(x, y, t, s) \frac{d^2}{dy^2} X_m(y) dy = \int_0^\pi X_m(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(x, y, t, s) dy.$$

Оскільки $\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, 0, t, s) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, \pi, t, s) = 0$, то

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} X_m(y) \right) dy = \left(\frac{d}{dy} X_m(y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) \right) \Big|_{y=0}^\pi - \\
&- \int_0^\pi \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} B(x, y, t, s) \right) \frac{d}{dy} X_m(y) dy = - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} B(x, y, t, s) \right) X_m(y) \Big|_{y=0}^\pi + \\
&+ \int_0^\pi X_m(y) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s) dy = \int_0^\pi X_m(y) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s) dy.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&E\zeta_k(t)\zeta_m(s) = \\
&= \frac{1}{\mu_k^2 \mu_m^2} \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) \left(q(x)q(y)B(x, y, t, s) - q(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, y, t, s) - \right. \\
&\quad \left. - q(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(x, y, t, s) + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s) \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Відомо, що в нашому випадку [19]

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \frac{K_n(x)}{n}, \quad |K_n(x)| \leq L; \quad \mu_n^2 = n^2 + O(1). \quad (8)$$

Тоді $\forall 0 \leq i, j \leq 1$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| = \\
& = \left| \int_0^\pi \int_0^\pi q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx + \frac{K_k(x)}{k} \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin my + \frac{K_m(y)}{m} \right) dx dy \right| = \\
& = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) \sin kx \sin my dx dy + \right. \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{m} \int_0^\pi \int_0^\pi q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) \sin kx K_m(y) dx dy + \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\pi \int_0^\pi q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) K_k(x) \sin my dx dy + \\
& \left. + \frac{1}{km} \int_0^\pi \int_0^\pi q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) K_k(x) K_m(y) dx dy \right| \leq \\
& \leq \frac{2C_q^{2-i-j}}{\pi} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi \sin kx \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| + \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_q^{2-i-j} L}{m} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi \sin kx B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| + \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_q^{2-i-j} L}{k} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy + \frac{C_q^{2-i-j} L^2}{km} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right|.
\end{aligned}$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}
|E\zeta_k(t)\zeta_m(s)| & = \left| \frac{1}{\mu_k^2 \mu_m^2} \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \leq \\
& \leq \sum_{i,j=0}^1 \left(\frac{2C_q^{2-i-j}}{\pi \mu_k^2 \mu_m^2} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi \sin kx \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_q^{2-i-j} L}{m \mu_k^2 \mu_m^2} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi \sin kx B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C_q^{2-i-j} L}{k \mu_k^2 \mu_m^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy + \frac{C_q^{2-i-j} L^2}{km \mu_k^2 \mu_m^2} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \right).
\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy &= \int_0^{\pi} \sin kx \int_0^{\pi} \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dy dx = \\
 &= \int_0^{\pi} \sin kx \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dy dx = \\
 &= \int_0^{\pi} \sin kx \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(my + \pi) B_{2i,2j}(x, y + \frac{\pi}{m}, t, s) dy dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} \sin my B_{2i,2j}(x, y + \frac{\pi}{m}, t, s) dy dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} \sin my \left(B_{2i,2j}(x, y, t, s) - B_{2i,2j}(x, y + \frac{\pi}{m}, t, s) \right) dy dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin my \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \left(B_{2i,2j}(x, y, t, s) - B_{2i,2j}(x, y + \frac{\pi}{m}, t, s) \right) dx dy = \\
 &= \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin my \left(B_{2i,2j}(x, y, t, s) - B_{2i,2j}(x + \frac{\pi}{k}, y, t, s) - \right. \\
 &\quad \left. - B_{2i,2j}(x, y + \frac{\pi}{m}, t, s) + B_{2i,2j}(x + \frac{\pi}{k}, y + \frac{\pi}{m}, t, s) \right) dx dy;
 \end{aligned}$$

$$\iint_{00}^{\pi\pi} \sin kx B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy = \frac{1}{4} \iint_{0-\pi}^{\pi\pi} \sin kx \left(B_{2i,2j}(x, y, t, s) - B_{2i,2j}(x + \frac{\pi}{k}, y, t, s) \right) dx dy;$$

$$\iint_{00}^{\pi\pi} \sin my B_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy = \frac{1}{4} \iint_{0-\pi}^{\pi\pi} \sin my \left(B_{2i,2j}(x, y, t, s) - B_{2i,2j}(x, y + \frac{\pi}{m}, t, s) \right) dy dx.$$

Отже

$$\begin{aligned}
 |E\zeta_k(t)\zeta_m(s)| &\leq \sum_{i,j=0}^1 \frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2 \mu_m^2} \left(\frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2, \frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx dy + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{4m} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{x, \frac{\pi}{k}} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx dy + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{4k} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{y, \frac{\pi}{m}} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dy dx + \frac{C_{G,i,j}}{km} \right).
 \end{aligned}$$

Лема 2. Нехай виконуються умови лема 1 та збігаються ряди

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}\right)}{km} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2 m} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty. \end{aligned}$$

Тоді ряд

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m} \mu_k \mu_m \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0)$$

збігається та мають місце нерівності

$$\begin{aligned} I \leq S_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}\right)}{\mu_k \mu_m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) + S_2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{m \mu_k \mu_m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) + \\ + S_3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k \mu_k \mu_m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) + C_G \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{km \mu_k \mu_m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{1}{8\pi} \sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j} C_{1,i,j}, \quad S_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{4} \sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j} C_{2,i,j}, \\ S_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{4} \sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j} C_{3,i,j}, \quad C_G = \sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j} C_{G,i,j}. \end{aligned}$$

Доведення. Доведення випливає з лема 1.

Лема 3. Нехай для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ виконуються умови

$$\left| \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \leq \frac{M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)},$$

де $M_{i,j} > 0$ – константи.

Тоді існують сталі $b_{k,m} > 0$ такі, що

$$|\mathbf{E}(\zeta_k(t) - \zeta_k(s))(\zeta_m(t) - \zeta_m(s))| \leq b_{k,m} \varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)$$

та для $b_{k,m}$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m} < \infty.$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\zeta_k(t) - \zeta_k(s))(\zeta_m(t) - \zeta_m(s)) &= \mathbb{E} \left(\int_0^\pi \xi(x, t) X_k(x) dx - \int_0^\pi \xi(x, s) X_k(x) dx \right) \\
 &\quad \times \left(\int_0^\pi \xi(y, t) X_m(y) dy - \int_0^\pi \xi(y, s) X_m(y) dy \right) = \\
 &= \mathbb{E} \int_0^\pi (\xi(x, t) - \xi(x, s)) X_k(x) dx \int_0^\pi (\xi(y, t) - \xi(y, s)) X_m(y) dy = \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) (B(x, y, t, t) - B(x, y, t, s)B(x, y, s, t) + B(x, y, s, s)) dx dy = \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) \tilde{B}(x, y, t, s) dx dy.
 \end{aligned}$$

Виконуючи перетворення з доведення лема 1 для функції \tilde{B} замість B отримаємо

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}(\zeta_k(t) - \zeta_k(s))(\zeta_m(t) - \zeta_m(s)) = \\
 &= \frac{1}{\mu_k^2 \mu_m^2} \sum_{i,j=0}^1 (-1)^{i+j} \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) \tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy. \\
 &\left| \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q^{1-i}(x) q^{1-j}(y) \tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \leq \\
 &\leq C_X^2 C_q^{2-i-j} \left| \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \leq \frac{C_X^2 C_q^{2-i-j} M_{i,j}}{\varphi^2 \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)}.
 \end{aligned}$$

Тобто

$$|\mathbb{E}(\zeta_k(t) - \zeta_k(s))(\zeta_m(t) - \zeta_m(s))| \leq \frac{1}{\mu_k^2 \mu_m^2} \frac{C_X^2 \sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j} M_{i,j}}{\varphi^2 \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)}.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_X^2 \sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j} M_{i,j}}{\mu_k^2 \mu_m^2}$$

збігається, оскільки збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 m^2}.$$

Теорема 3. Нехай в (1) $\xi(x, t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g -умові. Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, така, що функція $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Припустимо при всіх $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$ існує неперервна похідна $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s)$ та для деяких неперервних функцій $\tau(\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ та $\tau(\delta)$, $\delta \geq 0$ таких, що $\tau(\delta_1, \delta_2) > 0$ при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0, \delta_2) = \tau(\delta_1, 0) = 0$, $\tau(\delta_1, \delta_2)$ монотонно зростає по δ_1 та δ_2 , $\tau(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ монотонно зростає, виконуються умови:
для довільного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{1}{v} \right) \right)^2 \right) dv < \infty;$$

для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ існують константи $C_{1,i,j} > 0$, $C_{2,i,j} > 0$, $C_{3,i,j} > 0$, $0 \leq i, j \leq 1$ такі, що

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T - \pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx dy &\leq C_{1,i,j} \tau(\delta_1, \delta_2), \\ \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx \right) dy &\leq C_{2,i,j} \tau(\delta), \\ \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dy \right) dx &\leq C_{3,i,j} \tau(\delta); \end{aligned}$$

для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ існують константи $M_{i,j} > 0$ такі, що

$$\left| \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \leq \frac{M_{i,j}}{\varphi^2 \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)}.$$

Тоді ряд (6) збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0, \pi] \times [0, T]$ ($T > 0$ – деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з (6) почленним диференціюванням один та два рази по t і один та два рази по x , та з імовірністю одиниця задача (1)–(3) має розв’язок, який можна зобразити у вигляді ряду (6).

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми 2 та лем 2, 3.

Висновки. В роботі отримані умови на коваріаційну функцію центровано-го строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння коливання струни, що забезпечують існування розв’язку задачі математичної фізики для цього рівняння у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду.

1. Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича I // Теория вероятностей и мат. статист. – 1984, – вып. 30, – С. 92–107.

2. Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича II // Теория вероятностей и мат. статист. – 1984, – вып. 31, – С. 44–50.
3. Бейсенбаев Е., Козаченко Ю.В. Равномерная сходимість случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1979. – Вып. 21. – С. 9 – 23.
4. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процессы в задачах математической физики. Сборник научных трудов. – Киев, Институт математики АН УССР, 1979. – С. 4 – 35.
5. Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. Обгрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірностей та матем. стат., вип. 69, 2003 р., – С.63–78.
6. Сливка Г.І. Обгрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки.– 2002, – вип. № 4,– С. 31–37.
7. Сливка Г.І. Крайова задача математичної фізики з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки.– 2002, – вип. № 5,– С. 172–178.
8. Довгай Б.В. Обгрунтування методу Фур'є для неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 616 – 624.
9. Довгай Б.В. Властивості розв'язку неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 474 – 482.
10. Довгай Б.В. Розв'язування гіперболічного рівняння з гауссовою правою частиною спеціального вигляду методом Фур'є // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005, – Вип. № 3, – С. 31-36.
11. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. The condition for application of Fourier method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ -subgaussian right hand side // Random operators and stochastic equations. – 2005, – Vol. 13, No. 3, – P. 281–296.
12. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. Properties of solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ -subgaussian right side// Random operators and stochastic equations. – 2009, – Vol. 17, – P. 221–241.
13. Довгай Б.В. Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з φ -субгауссовою правою частиною // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2009, – Вип. 81, – С. 25-30.
14. Довгай Б.В. Моделювання розв'язку гіперболічного рівняння // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2011, – Вип. №3, – С. 18-23.
15. Довгай Б.В. Гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22, N 2. – С. 64–78.
16. Довгай Б.В. Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з Орлічевою правою частиною // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012, – Вип. №1, – С. 13-17.
17. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. – Kiev: "ТВиМС"; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2000. – 257 p.
18. E. Barrasa de la Krus and Yu. V. Kozachenko. Boundary-value problem for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions // Random operators and stochastic equations. – 1995. – Vol. 3, No. 3. – P. 201 – 220.
19. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. – Москва: Высшая школа, 1964. – 559 с.

Одержано 15.02.2013