УДК 519.21

М. М. Капустей, П. В. Слюсарчук (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДНУ ФОРМУ ПСЕВДОМОМЕНТІВ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ БЛИЗЬКОСТІ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ДВОХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains estimates of approximation of convergence of sums not identically distributed random variables in the term of pseudomoments.

Робота містить оцінки близькості розподілів сум різно розподілених випадкових величин в термінах псевдомоментів.

В теорії ймовірностей важливе значення мають дослідження близькості розподілів двох сум [1–4], а також наближення розподілів сум представником певного класу розподілів [3], зокрема, стійким законом [5]. Ми розглядаємо близькість розподілів двох сум, коли на випадкові величини однієї із сум накладається обмеження, що використане в [2, стор. 382]. У даній роботі продовжуються дослідження, аналогічні [4], але використовуються дещо видозмінені псевдомоменти. У результаті, на відміну від [4], одержуємо оцінки, у яких сталі залежать тільки від α, а залежність від λ здійснюється через псевдомоменти. Як наслідок, одержуємо оцінки швидкості збіжності до стійких законів розподілу для нормованих сум різно розподілених випадкових величин, що узагальнюють результати роботи [5].

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ та $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ – дві послідовності випадкових величин з функціями розподілу відповідно $F_k(x)$ і $G_k(x)$, характеристичними функціями $f_k(t)$ і $g_k(t)$. $\Phi_n(x)$ і $Q_n(x)$ – функції розподілу випадкових величин $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$, а $H_k(x) = F_k(x) - G_k(x)$, $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)|$.

Нехай виконуються умови:

існує число $\alpha \in (0, 2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що

$$|g_i(t)| \le e^{-\lambda |t|^{\alpha}}; \tag{1}$$

$$\mu_{ik} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dH_i(x) = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots; k = 1, m), \tag{2}$$

де $m = 1$ при $\alpha \le 1$ і $m = 2$ при $1 < \alpha \le 2$.

Позначимо

$$\kappa_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} \left| H_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| dx, \;\; \kappa_{i0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^{\alpha}) \left| H_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| dx,$$

$$\nu_{i0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^{\alpha}) \left| dH_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right|,$$

$$\kappa = \max_{1 \le i \le n} \kappa_i, \;\; \kappa_0 = \max_{1 \le i \le n} \kappa_{i0}, \;\; \nu_0 = \max_{1 \le i \le n} \nu_{i0}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (1) і (2). *Тоді для всіх* $n \geq 1$ *справедливі нерівності*:

$$\rho_n \leq C^{(1)} n^{\frac{-1}{\alpha}} \max\left\{\kappa, \kappa^{\frac{n}{(\alpha+1)n+1}}\right\},$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} n^{\frac{-1}{\alpha}} \max\left\{\kappa_0, \kappa_0^{\frac{n}{n+1}}\right\}, \rho_n \leq C^{(3)} n^{\frac{-1}{\alpha}},$$

де $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ – *сталі, що залежать тільки від* α.

Із одержаних результатів, як наслідок, одержуємо оцінки швидкості збіжності до стійких законів.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні випадкові величини з функціями розподілу $F_k(x)$, та характеристичними функціями $f_k(t)$. Позначимо $G_\alpha(x, \lambda)$ функцію розподілу стійкого закону із характеристичною функцією

$$\varphi_\alpha(t, \lambda) = \exp\{-\lambda|t|^\alpha(1 - i\beta \cdot \mathrm{sign} t \cdot \omega(t, \alpha))\},$$

де

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \mathrm{tg}\, \frac{\pi\alpha}{2}, & \text{при} \quad 0 < \alpha \leq 2,\ \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln|t|, & \text{при} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$\bar{F}_n(x)$ – функція розподілу випадкової величини $(n\lambda)^{\frac{-1}{\alpha}}(\xi_1 + \cdots + \xi_n) + A_n$, де $A_n = 0$ при $\alpha \neq 1$; $A_n = \frac{2}{\pi}\beta \ln \lambda$ при $\lambda = 1$. Без обмеження загальності будемо вважати, що $M\xi_k = 0$, якщо вони існують.

Покладемо $g_k(t) = \varphi_\alpha(t, \lambda)$. Тоді

$$Q_n\left(x(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = G_\alpha(x, 1),\ \ \bar{F}_n(x) = \Phi_n\left(x(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

$$\rho'_n = \sup_x |\bar{F}_n(x) - G_\alpha(x, 1)| =$$

$$= \sup_x \left|\Phi_n\left(x(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}\right) - Q_n\left(x(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| = \sup_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)| = \rho_n,$$

$$\kappa_i = \kappa_i(\alpha, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha \left|F_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_\alpha(x, 1)\right| dx,$$

$$\kappa_{i0} = \kappa_{i0}(\alpha, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^\alpha) \left|F_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_\alpha(x, 1)\right| dx,$$

$$\nu_{i0} = \nu_{i0}(\alpha, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^{\alpha+1}) \left|d\left(F_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_\alpha(x, 1)\right)\right|.$$

Позначимо

$$\mu'_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\left(F_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_\alpha(x, 1)\right),$$

$$\kappa(\alpha, \lambda) = \max_{1 \leq i \leq n} \kappa_i(\alpha, \lambda),\ \ \kappa_0(\alpha, \lambda) = \max_{1 \leq i \leq n} \kappa_{i0}(\alpha, \lambda),$$

$$\nu_0(\alpha, \lambda) = \max_{1 \leq i \leq n} \nu_{i0}(\alpha, \lambda).$$

Наслідок 1. *Якщо* $\mu'_{ik} = 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots,$ $k = \overline{1, m}$, *то для всіх* $n \geq 1$ *справедливі нерівності*:

$$\rho'_n \leq C^{(1)} n^{-\frac{1}{\alpha}} \max \left\{ \kappa(\alpha, \lambda); (\kappa(\alpha, \lambda))^{\frac{n}{(\alpha+1)n+1}} \right\},$$

$$\rho'_n \leq C^{(2)} n^{-\frac{1}{\alpha}} \max \left\{ \kappa_0(\alpha, \lambda); (\kappa_0(\alpha, \lambda))^{\frac{n}{n+1}} \right\}, \ \rho'_n \leq C^{(3)} n^{-\frac{1}{\alpha}} \nu_0(\alpha, \lambda).$$

При доведенні теореми використовуються наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $\mu_{ik} = 0$; $k = \overline{1, m}$; $i = 1, 2, ...,$ $\omega_i(t) = |f_i(t) - g_i(t)|$. *Тоді*

$$\omega_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \leq \nu_{i0} \min \left(1, \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta} |t|^{\alpha+1} \right);$$

$$\omega_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \leq \kappa_{i0} \min \left(|t|, \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta} |t|^{\alpha+1} \right); \ \omega_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \leq \kappa_i \frac{|t|^{\alpha+1} 2^{1-\delta}}{m^\delta},$$

де $\delta = \alpha + 1 - m$.

Доведення. Використовуючи нерівність ([2], стор. 372)

$$\left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \cdots - \frac{(i\alpha)^m}{m!} \right| \leq \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta} |t|^{m+\delta}, \ m = 1, 2, \ldots, \ 0 \leq \delta \leq 1, \quad (3)$$

із умов леми одержимо $\left(\Psi_i(x) = H_i \left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right)$

$$f_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) - g_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Psi_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right) d\Psi_i(x). \quad (4)$$

Тоді

$$\omega_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Psi_i(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^\alpha) |d\Phi_i(x)| = \nu_{i0},$$

а із другої рівності (4) і нерівності (3) при $\delta = \alpha + 1 - m$

$$\omega_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{k!} \frac{(itx)^k}{k!} \right| |d\Psi_i(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta} |tx|^{m+\delta} |d\Psi_i(x)| \leq$$

$$\leq \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta} |t|^{\alpha+1} \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^{\alpha+1}) |d\Psi_i(x)| = \frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta} |t|^{\alpha+1} \nu_0.$$

Звідки одержуємо першу нерівність леми.

Після інтегрування частинами в (4), одержимо

$$f_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) - g_i \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) = -it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Psi_i(x) dx, \quad (5)$$

$$f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = -it\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(itx)^k}{k!}\right)\Psi_i(x)dx. \qquad (6)$$

Із (6) і (3) (поклавши в ній $m-1$ замість m) отримаємо другу нерівність леми:

$$\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \left|t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(itx)^k}{k!}\right)\Psi_i(x)dx\right| \le$$

$$\le |t|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2^{1-\delta}|tx|^{m-1+\delta}}{(m-1)!\,m^\delta}|\Psi_i(x)|dx = \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^\alpha|\Psi_i(x)|dx = \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_i.$$

Зокрема,

$$\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\max(1,|x|^\alpha)|\Psi_i(x)|dx = \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_{i0},$$

а із (5)

$$\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le |t|\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Psi_i(x)|dx \le |t|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\max(1,|x|^\alpha)|\Psi_i(x)|dx = |t|\kappa_0.$$

Третя нерівність леми доведена.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (1) *та* (2) *і нехай* θ_i *– величини, для яких, при деякому* $s \in [0;\alpha{+}1]$ *і* $R \in (0;2]$, *для всіх дійсних* t *виконується нерівність* $\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \theta_i\min(|t|^s, R|t|^{\alpha+1})$, $i = 1, 2, \ldots$ *Покладемо* $\theta = \max\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$,

$$c \in \left(0, \min\left\{e^{-\frac{2}{\alpha}}; \sup\left\{x : x \in (0;1); \frac{1}{2} - R\sqrt{x}(-\ln x)^{\frac{1}{\alpha}} > 0\right\}; 2^{-3}\right\}\right).$$

Якщо $\theta \le c$, $|t| \le (-\ln\theta)^{\frac{1}{\alpha}} = T_1'$, *то*

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_1'|t|^\alpha}, \qquad (7)$$

де $c_1' = \frac{1}{2} - R\sqrt{c}(-\ln c)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$. *При* $\theta \le c$ *і* $|t| > T_1'$ $(T_1' \ge 1)$

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le 2\theta|t|^s. \qquad (8)$$

Якщо $\theta > c$ *і* $|t| \le T_2' = \frac{c}{\theta}(T_2' < 1)$, *то*

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_2'|t|^\alpha}, \qquad (9)$$

де $c_2' = 1 - ceR > 0$.

Доведення. Із умови (1)

$$\left|\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \left|\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| + \left|g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha} + \omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right). \quad (10)$$

Нехай $\theta \le c$, $|t| \le T_1'$. З (10) і умов леми

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha} + e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}\theta_i R|t|^{\alpha+1}\right) \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + e^{\frac{1}{2}T_1'^\alpha}\theta_i R|t|^\alpha T_1'\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + \sqrt{\theta}R|t|^\alpha(-\ln\theta)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Оскільки функція $y = x^{\frac{\alpha}{2}}\ln x$ є спадною при $x \in \left(0, e^{-\frac{2}{\alpha}}\right)$ і $y \to 0$ при $x \to 0$, а $0 < c \le e^{-\frac{2}{\alpha}}$ і $\theta \le c$, то

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + R|t|^\alpha\sqrt{c}(-\ln c)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \le e^{-c_1'|t|^\alpha}.$$

У випадку $\theta \le c$ і $|t| > T_1'$ із (10) одержуємо (враховуючи, що $T_1' \ge 1$)

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha} + \omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le e^{-T_1'^\alpha} + \theta_i|t|^s \le \theta + \theta|t|^s \le 2\theta|t|^s.$$

Нехай $\theta > c$ і $|t| \le T_2' = \frac{c}{\theta}$, тоді із (10) ($T_2' < 1$)

$$\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha} + \omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = e^{-|t|^\alpha}\left(1 + e^{-|t|^\alpha}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \le$$

$$\le e^{-|t|^\alpha}(1 + e^{|t|^\alpha}\theta_i R|t|^{\alpha+1}) \le e^{-|t|^\alpha}(1 + eRc|t|^\alpha) \le e^{-c_2'|t|^\alpha}.$$

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми 2. Тоді існують сталі $C^{(4)}$ і $C^{(5)}$, що залежать тільки від α, s, R, такі, що при $n \ge 2$ $\rho_n \le C^{(4)}n^{-\frac{1}{\alpha}}\max(\theta, \theta^p)$, а при $s > 0$ $\rho_1 \le C^{(5)}\left(1 + \frac{1}{s}\right)\max(\theta, \theta^p)$, де $p = \min\left(1, \frac{n}{sn+1}\right)$.*

Доведення. Використаємо нерівність ([6], стор. 299)

$$|F(x) - G(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T |f(t) - g(t)|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi T}\sup_x |G'(x)|. \quad (11)$$

Оскільки $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)| = \sup_x \left|\Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\lambda}}\right) - Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\lambda}}\right)\right|$, то в (11) покладемо

$$F(x) = \Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right),\ G(x) = Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

$$f(t) = \prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right), g(t) = \prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Із (1) випливає, що випадкові величини η_i мають щільність розподілу, а $G(x) = Q_n\left(x\lambda^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$ є функцією розподілу випадкової величини $\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)$, тоді

$$|G'(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{k+1}^{n} g_k\left(x\lambda^{-\frac{1}{\lambda}}\right)dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t|^\alpha}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-nt^\alpha}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-z}\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}n^{-\frac{1}{\alpha}}dz = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}\pi\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right).$$

Із (11) отримаємо

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right). \tag{12}$$

В нерівності

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|a_i - b_i|\prod_{k=1}^{i-1}|b_k|\prod_{k=i+1}^{n}|a_k|$$

покладемо $a_k = f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, $b_k = g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$. Тоді із леми 2 при $|t| \le T_l'$ ($l = 1$ при $\theta \le c$ і $l = 2$ при $\theta > c$) одержимо

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\prod_{k=1}^{i-1}\left|g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\prod_{k=i+1}^{n}\left|f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \tag{13}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i R|t|^{\alpha+1}e^{-|t|^\alpha(i-1)}e^{-c_l'|t|^\alpha(n-i)} \le n\theta R|t|^{\alpha+1}e^{-c_l'|t|^\alpha(n-1)}.$$

Нехай $\theta > c$, $T = T_2'$. Тоді із (13) при $n > 1$

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}n\theta R\int\limits_{0}^{T} t^\alpha e^{-c_2't^\alpha(n-1)}dt \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}n\theta R\int\limits_{0}^{\infty} t^\alpha e^{-c_2't^\alpha(n-1)}dt = \frac{2n\theta R}{\alpha\pi(c_2'(n-1))^{\frac{1}{\alpha}+1}}\int\limits_{0}^{T} e^{-z}z^{\frac{1}{\alpha}}dz = \tag{14}$$

$$= \frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{n}{(n-1)c_2'}\right)^{\frac{1}{\alpha}+1}\frac{2R}{\pi\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right) \le C_5\frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}},$$

де через C_k будемо позначати сталі, що залежать тільки від c, α, R.

Із (14) та (12) при $n > 1$ і $\theta > c$

$$\rho_n \le C_6\frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{15}$$

Нехай $\theta \le c$, $n > 1$. В (12)покладемо $T = \theta^{-p}c$, $T' = \min(T_1', T)$. Тоді

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T'} \left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} + \tag{16}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Враховуючи, що $T' \le T_1'$, із леми 2 та (13) при $n > 1$, аналогічно до (14), одержимо:

$$I_1 \le C_6 \frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{17}$$

Вважаємо, що $T' = T_1'$, бо інакше $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. Із леми 2, нерівності (8), одержуємо:

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} (2\theta t^s)^n \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}(2\theta)^n \int\limits_{T'}^{T} t^{sn-1} dt. \tag{18}$$

У випадку $s \ge \frac{1}{3}$ $I_3 \le \frac{2}{\pi}(2\theta)^n \frac{T^{sn}}{sn} \le \frac{6}{n\pi}(2\theta)^n(\theta^{-p}c)^{sn} \le \frac{6}{n\pi}\left(2c^{\frac{1}{3}}\right)^n \theta^{n(1-sp)}$.

Із визначення p випливає, що для довільного натурального n $n(1-sp) \ge p$, тому із умови $\theta \le c$

$$I_2 \le \frac{6\theta^p}{n\pi}\left(2c^{\frac{1}{3}}\right)^n = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\theta^p}{n^{\frac{1}{\alpha}}} n^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(2c^{\frac{1}{3}}\right)^n \le C_7 \frac{\theta^p}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{19}$$

При $s \le \frac{1}{3}$ і $n \ge 2$, $\frac{n}{sn+1} \le 1$, тому $p = 1$. Тоді із (18)

$$I_2 \le \frac{2}{\pi}(2\theta)^n \int\limits_{T'}^{T} t^{sn-1}dt \le \frac{2}{\pi}(2\theta)^n (T_1')^{-\frac{1}{3}} \int\limits_{T'}^{T} t^{sn-\frac{2}{3}}dt \le \frac{2}{\pi}(2\theta)^n \frac{1}{\sqrt[3]{T_1'}} \frac{T^{sn+\frac{1}{3}}}{sn+\frac{1}{3}} \le$$

$$\le \frac{6}{\pi\sqrt[3]{T_1'}}(2\theta)^n(\theta^{-1}c)^{sn+\frac{1}{3}} \le \frac{6}{\pi}2^n c^{sn+\frac{1}{3}}(T_1')^{-\frac{1}{3}}\theta^{n(1-s)-\frac{1}{3}}.$$

Оскільки $\theta \le c \le 2^{-3}$, то $T_1' > 1$, тому

$$I_2 \le \frac{6}{\pi}2^n c^{sn+\frac{1}{3}}\theta^{\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}} \le \theta\frac{6}{\pi}2^n c^{sn+\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}(n-2)} \le \frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{6}{\pi c}\left(2c^{\frac{2}{3}}\right)^n n^{\frac{1}{\alpha}} \le C_8 \frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{20}$$

Для оцінки I_3 використаємо нерівність $\int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{-t}t^u dt \le a^u e^{-a}$ $(a > 0, u \le 0)$. Тоді із (1) і $T_1' > 1$ одержимо

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T} e^{-nt^{\alpha}} \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \int\limits_{n(T')^{\alpha}}^{\infty} e^{-z}z^{-1}dz \le$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha}(n(T')^{\alpha})^{-1}e^{-n(T')^{\alpha}} \leq \frac{1}{n\alpha}\theta^{n}\frac{2}{\pi} \leq \frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}n^{\frac{1}{\alpha}-1}c^{n-1}\frac{2}{\pi} \leq C_9\frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \qquad (21)$$

Із (12), (16), (17), (19), (20), (21) одержуємо справедливість леми у випадку $n \geq 2$, $\theta \leq c$. Враховуючи (15) одержуємо справедливість першого твердження леми.

Нехай $n = 1$. Якщо $\theta > c$, то $\rho_1 \leq 1 < \frac{\theta}{c}$. Якщо ж $\theta \leq c$, $s > 0$, то із (12) $(T = \theta^{-p}c)$ і умов леми

$$\rho_1 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|f_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{T\pi^2},$$

$$\int_0^T \left|f_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} \leq \int_0^T \theta t^{s-1}dt = \frac{\theta T^s}{s} = \theta^{1-sp}c^s\frac{1}{s} \leq \theta^p\frac{c^s}{s}.$$

Тобто, $\rho_1 \leq C^{(5)}\left(1+\frac{1}{s}\right)\max(\theta,\theta^p)$. Лема доведена.

Доведення теореми. Із леми 1 випливає, що, поклавши в лемі 3 $s = \alpha+1$, $\theta_i = \kappa_i$, одержимо першу нерівність теореми, якщо в лемі 3 покладемо $s = 1$, $\theta_i = \kappa_{i0}$, то одержимо другу нерівність теореми. Якщо $s = 0$, $\theta_i = \nu_{i0}$, то при $n \leq 2$ справедлива третя нерівність теореми. Оскільки

$$\rho_1 = \sup_x|\Phi_1(x) - Q_1(x)| = \sup_x\left|F_1\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_1\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| =$$

$$= \sup_x\left|\int_{-\infty}^{x} d\left(F_1\left(u\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_1\left(u\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|d\left(F_1\left(u\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - G_1\left(u\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\right| \leq \nu_{10},$$

то одержимо третю нерівність теореми.

1. *Золотарёв В. М.* О близости распределений двух сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и её применения. – 1965. – **29**. – Вып. 3. – С. 519–526.
2. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Нагаев С. В.* Оценка погрешности приближенимя устойчивыми законами // Теорія ймовірностей та математична стиатистика. – Вип. 56. – 1997. – С. 145–160.
4. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості двох сум для різно розподілених випадкових величин // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 4–8.
5. *Ігнат Ю. І.* Про збіжність до стійких законів розподілу // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1977. – № 10. – С. 910–911.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – 1979. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 01.10.2013