УДК 517.518.84:519.652

М. М. Пагіря (Мукачів. держ. ун-т)

ОЦІНКИ ЗАЛИШКОВИХ ЧЛЕНІВ КВАЗІ–ОБЕРНЕНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

New estimates of remainders of quasi–reciprocal interpolation continued fraction of Thiele type and quasi –reciprocal interpolation continued fraction of type C–fraction obtained.

Отримані нові оцінки залишкових членів квазі–оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу Тіле та квазі–оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу C–дробу.

Вступ. Нехай розглядається інтерполяція функції $f(x)$ однієї дійсної змінної на компакті $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. Найкраще ця задача вивчена у випадку, коли агрегат наближення вибраюъть у вигляді багаточлена, або узагальненого багаточлена, який побудований за чебишовською системою функцій [1, 2]. Ланцюгові дроби в якості інтерполяційного агрегату досліджувались в роботах Вронського [3, 4], Тіле [5], Ньорлунда [6], Мілн–Томсона [7]. У вказаній роботі Мілн–Томпсона доведена формула залишкового члена для інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Формула залишкового члена була узагальнена на випадок функціональних інтерполяційних ланцюгових дробів в роботі [8]. Подальші оцінки залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле були отримані в роботі [9]. Дана робота присвячена встановленню оцінок залишкових членів квазі–обернених інтерполяційних ланцюгових дробів типу Тіле та типу C–дробу.

1. Постановка задачі інтерполяції. Обернені ланцюгові дроби. Нехай $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ — компакт. Функція $f(x)$, $f(x) \in \mathbf{C}(\mathcal{R})$, задана своїми значеннями в точках множини

$$X = \{x_i \,:\, x_i \in \mathcal{R}, x_i \neq x_j, \text{коли}\, i \neq j, i, j = 0, 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Досліджується задача інтерполяції функцій на компакті оберненим ланцюговим дробом

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \left(b_0(x) + \frac{a_1(x)}{b_1(x)} + \frac{a_2(x)}{b_2(x)} + \cdots + \frac{a_{n-1}(x)}{b_{n-1}(x)} + \frac{a_n(x)}{b_n(x)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}\right)^{-1}, \tag{2}$$

де $b_0(x), a_k(x), b_k(x) \in \mathbf{C}(\mathcal{R})$, $a_k(x) \not\equiv 0, k = 1, \ldots, n$. Ланцюговий дріб (2) має задовольняти інтерполяційну умову

$$D_n(x_i) = y_i, \qquad \text{де} \quad x_i \in X,\ y_i = f(x_i). \tag{3}$$

Вибираючи елементи ланцюгового дробу $b_0(x), a_k(x), b_k(x), k = 1, 2, \ldots, n$, в тому чи іншому вигляді, можна побудувати, взагалі кажучи, різні функціональні інтерполяційні ланцюгові дроби [10]– [17].

Канонічний знаменник $Q_n(x)$ оберненого ланцюгового дробу (2) визначається через елементи цього дробу за формулою Ойлера–Міндінґа [18, 19]

$$Q_n(x) = B_0^{[n]}(x) \sum_{k=0}^{r} R_{k,0}^{[n]}(x), \tag{4}$$

де

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(x)\, R_{k-1,i+2}^{[n]}(x), \quad R_{0,s}^{[n]}(x) = 1, \tag{5}$$

$$X_i(x) = \frac{a_i(x)}{b_i(x)\, b_{i+1}(x)}, \quad B_0^{[n]}(x) = \prod_{i=0}^{n} b_i(x), \quad r = \left[\tfrac{n+1}{2}\right].$$

За допомогою методу повної математичної індукції доводиться, що $R_{k,0}^{[n]}(x)$ містить $\prod\limits_{i=1}^{k}(n-2k+i+1)/k!$ доданків.

Якщо елементи оберненого ланцюгового дробу (2) багаточлени, степінь багаточлену канонічного чисельника $\mathbf{deg}\, P_n(x) \leqslant n$ і функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, то залишковий член оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу визначається формулою [8]

$$R_n(x) = f(x) - D_n(x) = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x-x_k)}{(n+1)!\, Q_n(x)}\, \frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\big[f(x)\, Q_n(x)\big]\Big|_{x=\xi}, \quad \xi \in \mathbf{Int}\,\mathcal{R}. \tag{6}$$

Застосувавши формулу Лейбніца похідної $(n+1)$-го порядку добутку двох функцій маємо, що

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\big[f(x)\, Q_n(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\, Q_n(x) + \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x) \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{m} \mathbf{C}_m^j \big(B_0^{[n]}(x)\big)^{(m-j)} \sum_{k=0}^{r} \big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(j)} . \tag{7}$$

Крім того із (5) випливає наступна рекурентна формула знаходження похідних

$$\big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+1-2k} \sum_{i=0}^{m} \mathbf{C}_m^i\, X_j^{(i)}(x)\, \big(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x)\big)^{(m-i)} . \tag{8}$$

2. Оцінка залишкового члена квазі–оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу Тіле. Нехай функція $f(x)$ на компакті $\mathcal{R}$ інтерполюється ланцюговим дробом вигляду [13]

$$D_n^{(t)}(x) = \frac{P_n^{(t)}(x)}{Q_n^{(t)}(x)} = \left(d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x-x_{k-1}}{d_k}\right)^{-1}, \tag{9}$$

який називають квазі–оберненим інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле (Т–КІЛД).

Теорема 1 ([13])**.** *Коефіцієнти Т–КІЛД (9) визначаються через значення функції $y = f(x)$ у інтерполяційних вузлах (1) за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченого ланцюгового дробу*

$$d_0 = \frac{1}{y_0}, \quad d_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-d_{k-1}} + \cdots + \frac{x_k - x_1}{-d_1} + \frac{x_k - x_0}{\dfrac{1}{y_k} - d_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (10)$$

Легко перевірити, що має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Т–КІЛД Тіле (9) дробово-раціональна функція. Степені багаточленів канонічних чисельника $P_n^{(t)}(x)$ та знаменника $Q_n^{(t)}(x)$ задовольняють нерівності $\mathbf{deg}\, P_n^{(t)}(x) \leqslant [n/2]$, $\mathbf{deg}\, Q_n^{(t)}(x) \leqslant [(n+1)/2]$.*

Теорема 3. *1) Нехай функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$. 2) Нехай всі коефіцієнти Т–КІЛД (9), який побудований за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1), відмінні від нуля. Тоді залишковий член Т–КІЛД задовольняє нерівність*

$$\left| f(x) - \frac{P_n^{(t)}(x)}{Q_n^{(t)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \, |B_0^{[n]}| \prod\limits_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)! \, |Q_n^{(t)}(x)|} \Bigg(\kappa_{n+2}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Bigg), \quad (11)$$

де $\rho = \mathbf{diam}\, \mathcal{R}, \quad d_* = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |d_i|, \quad \omega = \rho/(d_*)^2, \quad f^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant r} \max\limits_{x \in \mathcal{R}} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|,$

$$\kappa_n(\omega) = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 4\omega}\right)^n - \left(1 - \sqrt{1 + 4\omega}\right)^n}{2^n \sqrt{1 + \omega}}, \quad r = \left[\tfrac{n+1}{2}\right].$$

Доведення. В випадку Т–КІЛД $X_i(x) = (x - x_i)/(d_i \, d_{i+1})$. Далі, оскільки $Y_i = X_i'(x) = 1/(d_i \, d_{i+1})$, при $i = 0, 1, \cdots, n-1$, і $X_i^{(k)}(x) \equiv 0$, коли $k = 2, 3, \cdots, n$, то формула (8) набуває вигляду

$$\left(R_{k,0}^{[n]}(x) \right)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n+1-2k} \left(X_j(x) \left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x) \right)^{(m)} + m \, Y_j \left(R_{k-1,j+2}^{[n]}(x) \right)^{(m-1)} \right). \quad (12)$$

В розглядуваному випадку $R_{k,0}^{[n]}(x)$ багаточлен степеня k, то $\left(R_{k,0}^{[n]}(x)\right)^{(m)} = 0$, коли $k < m$. Крім того $\mathbf{deg}\ P_n^{(t)}(x) \leqslant r$ згідно із теоремою 2 і $B_0^{[n]}$ не залежить від x. Тоді формула (7) перепишеться наступним чином

$$\frac{d^{n+1}}{d\, x^{n+1}} \left[f(x) \, Q_n^{(t)}(x) \right] = f^{(n+1)}(x) \, Q_n^{(t)}(x) +$$

$$+ B_0^{[n]} \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}_{n+1}^{m} \, f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^{r} \left(R_{k,0}^{[n]}(x) \right)^{(m)}. \quad (13)$$

Якщо скористатися методом повної математичної індукції, то із формули (12) отримуємо

$$\left(R^{[n]}_{m+s,0}(x)\right)^{(m)} = m!\,M^{[n,s]}_{m+s,0}(x), \qquad s = 0, 1, \cdots, r-m,$$

де

$$M^{[n,0]}_{m,0}(x) = \sum_{j_1=0}^{n+1-2m} Y_{j_1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m} Y_{j_2} \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1} Y_{j_m}, \tag{14}$$

$$M^{[n,s]}_{m+s,0}(x) = \sum_{j=0}^{n+1-2(m+s)} \Big(X_j\, M^{[n,s-1]}_{m+s-1,j+2}(x) + Y_j\, M^{[n,s]}_{m+s-1,j+2}(x)\Big). \tag{15}$$

Оскільки $|Y_i| = |1/(d_i\,d_{i+1})| \leqslant 1/(d_*)^2$, а кількість доданків в правій частині формули (14) рівна $\prod\limits_{j=1}^{m}(n-2m+j+1)/m!$, то маємо

$$\left|M^{[n,0]}_{m,0}(x)\right| \leqslant \frac{1}{m!\,(d_*)^{2m}} \prod_{j=1}^{m}(n-2m+j+1). \tag{16}$$

Спираючись на останню нерівність за допомогою методу повної математичної індукції з формули (15) отримуємо, що

$$\left|M^{[n,s]}_{m+s,0}(x)\right| \leqslant \frac{\rho^s}{m!\,s!\,(d_*)^{2(m+s)}} \prod_{j=1}^{m+s}(n-2(m+s)+j+1), \quad s = 1, 2, \ldots, r-m. \tag{17}$$

Згідно з теоремою 1 ([11]) $\left|Q^{(t)}_n(x)\right| \leqslant \left|B^{[n]}_0\right| \kappa_{n+2}(\omega)$. Звідси та з (13),(16), (17) отримуємо (11).

Теорема 4. *1) Нехай $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$. 2) Нехай коефіцієнти Т–КІЛД (9), який побудований за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1), задовольняють умову Слешинського–Прінґсгейма, тобто $|d_i| \geqslant \rho+1, i = 0, 1, \cdots, n, \rho \neq 1$. Тоді залишковий член Т-КІЛД (9) задовольняє нерівність*

$$\left|f(x) - \frac{P^{(t)}_n(x)}{Q^{(t)}_n(x)}\right| \leqslant \frac{f^*\,|B^{[n]}_0|\rho^{n+1}(\rho^{n+1}-1)}{(n+1)!\,(\rho-1)} \Bigg(\kappa_{n+2}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}^m_{n+1} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i}(n-2(m+i)+j+1)\Bigg), \tag{18}$$

де ρ, d_*, ω, f^* визначені в умові теореми 3.

Доведення. Згідно з теоремою 2 ([11]) при виконанні умов теореми канонічний знаменник Т–КІЛД задовольняє нерівність $\left|Q^{(t)}_n(n)\right| \geqslant (\rho^{n+1}-1)/(\rho-1)$. Крім того, $|x - x_i| \leqslant \rho,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді із умов даної теореми та теореми 3 отримуємо оцінку (18).

3. Оцінка залишкового члена квазі–оберненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу C–дробу. На компакті $\mathcal{R}$ функцію $f(x)$ можна також інтерполювати ланцюговим дробом вигляду

$$D_n^{(c)}(x) = \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} = \left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{e_k(x - x_{k-1})}{1}\right)^{-1}, \tag{19}$$

який називається квазі–оберненим інтерполяційним ланцюговим дробом типу C – дробу (C–КІЛД).

Теорема 5. *Коефіцієнти C–КІЛД (19) визначаються через значення функції $y = f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1) за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченого ланцюгового дробу*

$$e_0 = \frac{1}{y_0}, \quad e_1 = \frac{1/y_1 - e_0}{x_1 - x_0}, \tag{20a}$$

$$e_m = \frac{1}{x_m - x_{m-1}} \left(-1 + \frac{e_{m-1}(x_m - x_{m-2})}{-1} + \frac{e_{m-2}(x_m - x_{m-3})}{-1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{e_2(x_m - x_1)}{-1} + \frac{e_1(x_m - x_0)}{1/y_m - e_0}\right), \quad m = 2, 3, \ldots, n. \tag{20b}$$

Доведення. Для доведення твердження теореми скористаємося методом повної математичної індукції. З інтерполяційної умови (3) при довільному m, $0 \leqslant m \leqslant n$, випливає, що

$$y_m = D_n^{(c)}(x_m) = \left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{m} \frac{e_k(x_m - x_{k-1})}{1}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Звідси формули (20a) очевидні. При $m = 2$ формула (20b) виконується. Зробимо припущення, що вказана формула має місце для $m = 2, 3, \ldots, s-1$. Тоді для $m = s$ з формули (21) отримуємо

$$y_s = \left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{s} \frac{e_k(x_s - x_{k-1})}{1}\right)^{-1}.$$

Позначимо через

$$S = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=2}^{s} \frac{e_k(x_s - x_{k-1})}{1}. \tag{22}$$

Тоді $y_s = 1/(e_0 + e_1(x_s - x_0)/S)$. Звідки

$$S = \frac{e_1(x_s - x_0)}{1/y_s - e_0}. \tag{23}$$

З іншого боку ланцюговий дріб в правій частині (22) — інтерполяційний ланцюговий дріб типу C–дробу, який побудований за значеннями функції в інтерполяційних вузлах $x_1, x_2, \ldots, x_s$ і коефіцієнти цього дробу визначаються за допомогою рекурентної формули [11]. Зокрема

$$e_s = \frac{1}{x_s - x_{s-1}} \left(-1 + \frac{e_{s-1}(x_s - x_{s-2})}{-1} + \cdots + \frac{e_3(x_s - x_2)}{-1} + \frac{e_2(x_s - x_1)}{S - 1}\right).$$

Підставивши в останнє співвідношення значення S з (23) отримаємо, що формула (20b) виконується і для $m = s$, а отже і для довільного m.

Зауваження 1. *Легко бачити, що C–КІЛД (19) дробово–раціональна функція і* $\mathbf{deg}\, P_n^{(c)}(x) \leqslant [n/2]\,,\ \mathbf{deg}\, Q_n^{(c)}(x) \leqslant [(n+1)/2]\,.$

C–КІЛД (19) еквівалентний Т–КІЛД (9), оскільки між коефіцієнтами ланцюгових дробів мають місце співвідношення $e_0 = d_0,\ e_1 = 1/d_1,\ e_i = 1/(d_{i-1}\, d_i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Але коефіцієнти C–КІЛД (19) можуть бути безпосередньо обчислені через значення функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах.

Теорема 6. *1) Нехай функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$. 2) Нехай за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1) побудований C–КІЛД (19), всі коефіцієнти якого відмінні від нуля. Тоді залишковий член C–КІЛД задовольняє нерівність*

$$\left|f(x) - \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)}\right| \leqslant \frac{f^* \prod\limits_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)!\, |Q_n^{(c)}(x)|} \Big(\kappa_{n+2}(\delta) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}_{n+1}^{m} (a^*)^m \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\delta^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1)\Big), \tag{24}$$

де $f^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant r} \max\limits_{x \in \mathcal{R}} \left|f^{(n+1-i)}(x)\right|,\ \delta = \rho e^*,\ e^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |e_i|\,,$ *а* $\kappa_n(\delta), \rho, r$ *визначені в умові теореми 3.*

Доведення. Так як у випадку C–КІЛД (19) мають місце співвідношення:

$$B_0^{[n]} = e_0,\ X_i(x) = e_{i+1}(x - x_i),\ X_i'(x) = e_{i+1},\ X_i^{(k)}(x) \equiv 0,$$

де $i = 0, 1, \ldots, n-1,\ \ k = 2, 3, \ldots, n-1$, і $\big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = 0,$ коли $k < m$, то формула (7) перепишеться наступним чином

$$\frac{d^{n+1}}{d\, x^{n+1}} \big[f(x)\, Q_n^{(c)}(x)\big] = f^{(n+1)}(x)\, Q_n^{(c)}(x) +$$

$$+ e_0 \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}_{n+1}^{m}\, f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=m}^{r} \big(R_{k,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)}\ . \tag{25}$$

За допомогою методу повної математичної індукції легко показати, що

$$\big(R_{m+s,0}^{[n]}(x)\big)^{(m)} = m!\, N_{m+s,0}^{[n,s]}(x), \quad s = 0, 1, \ldots, r - m,$$

де

$$N_{m,0}^{[n,0]}(x) = \sum_{j_1=0}^{n+1-2m} a_{j_1+1} \sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m} a_{j_2+1} \cdots \sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1} a_{j_m+1}, \tag{26}$$

$$N_{m+s,0}^{[n,s]}(x) = \sum_{j=0}^{n+1-2(m+s)} \big(X_j(x)\ N_{m+s-1,j+2}^{[n,s-1]}(x) + a_{j+1}\, N_{m+s-1,j+2}^{[n,s]}(x)\big). \tag{27}$$

Згідно з теоремою 1 ([11])

$$\left|Q_n^{(c)}(x)\right| \leqslant |e_0| \kappa_{n+2}(\delta). \tag{28}$$

В силу того, що $|e_i| \leqslant e^*, i = 1, 2, \ldots, n$, то з (26) маємо

$$|N_{m,0}^{[n,0]}(x)| \leqslant \frac{(e^*)^m}{m!} \prod_{j=1}^{m} (n - 2m + j + 1) \ . \tag{29}$$

Скориставшись методом повної математичної індукції з (27) отримуємо

$$|N_{m+s,0}^{[n,s]}(x)| \leqslant \frac{\rho^s \, (e^*)^{m+s}}{m! \, s!} \prod_{j=1}^{m+s} (n - 2(m+s) + j + 1) \ , \quad s = 0, 1, \ldots, r - m. \tag{30}$$

З (25),(28),(29) та (30) отримуємо (24).

Для подальших оцінок залишкового члена C–КІЛД (19) потрібне наступне твердження.

Теорема 7. *Якщо частинні чисельники $a_i(x)$оберненого ланцюгового дробу*

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \left(a_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i(x)}{1} \right)^{-1} \tag{31}$$

для довільного $x \in \mathcal{R}$ задовольняють умову типу Пейдона–Уолла

$$|a_0(x)| \geqslant 1, \quad |a_i(x)| \leqslant t(1-t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in (0; \tfrac{1}{2}],$$

то знаменник $Q_n(x)$ оберненого ланцюгового дробу (31) задовольняє нерівність

$$|Q_n(x)| \geqslant \begin{cases} \dfrac{(1-t)^{n+3} - t^{n+3}}{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}}, & \text{якщо} \quad 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \dfrac{n+3}{2(n+2)}, & \text{якщо} \quad t = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{32}$$

Теорема 8. *1) Нехай функція $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$. 2) Нехай за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1) побудований C–КІЛД (19), всі коефіцієнти якого відмінні від нуля, а частинні чисельники C–КІЛД задовольняють умову типу Пейдона–Уолла, тобто $0 < |e_i(x - x_{i-1})| \leqslant \delta \leqslant t(1-t)$, $i = 1, 2, \ldots, n,\ t \in (0; \frac{1}{2}]$.*

Тоді має місце оцінка залишкового члена C–КІЛД (19):

а) коли $0 < t < \frac{1}{2}$

$$\left| f(x) - \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \rho^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}}{(1-t)^{n+3} - t^{n+3}} \Big(\kappa_{n+2}(t(1-t)) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}_{n+1}^{m} \frac{t^m (1-t)^m}{\rho^m} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{t^i (1-t)^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Big) \ , \tag{33}$$

б) коли $t = \frac{1}{2}$

$$\left| f(x) - \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \rho^{n+1}}{(n+1)!} \frac{2(n+2)}{n+3} \big(\kappa_{n+2}(\tfrac{1}{4}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathbf{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(4\rho)^m} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{1}{4^i \, i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \big) \ , \tag{34}$$

де $\delta, e^*, \rho, \kappa_n(\delta), f^*, r$ визначені в умовах теорем 3 та 6.

Доведення. Згідно із умовою даної теореми $e^* \leqslant t(1-t)/\rho$. Тоді з теорем 6 та 7 отримуємо нерівності (33) та (34).

1. *Гаврилюк І. П.,Макаров В. Л.* Методи обчислень. У 2 ч. — К.: Вища школа, 1995. — Ч. 1. — 367 с.
2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. В 2-х кн. – Саратов: Из-во Сарат. ун-та, 1990. — 424 с.
3. *Hoene–Wroński J. M.* Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmique. – Paris: Courcier, 1811. – 269 p.
4. *Hoene–Wroński J. M.* Philosophie de la Technie Algorithmique: Loi Suprême et universelle des Mathématiques, Paris: de L'imprimerie de P. Didot L'Aine, 1815–1817.– 286 p.
5. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. — Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. — XII + 175 S.
6. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin, J. Springer, 1924. – 551 S.
7. *Milne–Thomson L. M.* The Calculus of Finite Differences. Second Edition. – Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 2000. – XXIV+558 p.
8. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. **46**, № 4. – С. 57–64.
9. *Пагіря М. М.* Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Український математичний журнал. – 2008. – **60**, № 11. – С. 1548–1554.
10. *Пагіря М. М.* Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. праць. НАН України, Ін–т кібернетики ім. В.М.Глушков – Т. 1. – Київ,Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України,2001. – С. 328–333.
11. *Пагіря М. М.* Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 77–87.
12. *Пагіря М. М.* Еквівалентні інтерполяційному багаточлену ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 127–134.
13. *Пагіря М. М.* Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 17. – С. 179–192.
14. *Пагіря М. М.* Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2010. – Вип. 20. – С. 98–110.
15. *Pahirya M. M.* Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2001. – Vol. IX, Summer 2001. – P. 21–29.
16. *Pahirya M. M.* Interpolation Function of Non–Tiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2002. – Vol. X. – P.59–62.
17. *Pahirya M. M.* The Problem of Interpolation Function of Thiele Continued Fraction (Some Examples) // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2007. – Vol. XV, Summer 2007. – P. 34–39.
18. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. – Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 S.
19. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. Вип. I. – С. 72–79.

Одержано 04.09.2013