УДК 519.21: 519.6

А. О. Пашко (КНУ імені Тараса Шевченка)

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ОДНОРІДНИХ ТА ІЗОТРОПНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

In the works studied method of simulation of homogeneous and isotropic Gaussian random fields. Found parameter estimation models that approximate the field with the specified precision and reliability in norm $L_p, p \geq 1$.

В работі досліджується метод моделювання гауссових однорідних та ізотропних випадкових полів. Знайдено оцінки параметрів моделей, що наближають поля з заданими точністю і надійністю в нормах просторів $L_p, p \geq 1$. Досліджено параметри моделей в двох - та трьохвимірному просторі.

Вступ. В роботі продовжуються дослідження методів моделювання випадкових полів [1,2]. Знайдено оцінки точності моделювання та параметри моделей для гауссових однорідних та ізотропних випадкових полів в нормах просторів $L_p, p \geq 1$. Моделі гауссових однорідних та ізотропних полів використовуються при дослідження руху повітряних мас в атмосфері, розповсюдженні морських хвиль, тощо.

1. Основні поняття та означення. Нехай $(\Omega, B, P)-$ - стандартний ймовірносний простір, (R^d, Σ, ν) - деякий вимірний простір, Σ - борелівська σ - алгебра, $\nu(.)$ - скінчена міра. Нехай $\rho(\vec{t}, \vec{s})$,- деяка евклідова метрика в або метрика їй еквівалентна, наприклад, $\tilde{\rho}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Нехай T — множина вигляду $T = \{\vec{t}\colon \rho(\vec{t}, 0) \leq L\}$, де $L \geq 0$ деяке число. Нехай $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ — гауссове центроване випадкове поле, що може бути зображене у вигляді

$$X(\vec{t}) = \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{R^d} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})\, dZ_r(\vec{\lambda}),$$

де $Z_r(S)$, $S \in \Sigma$ — некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі ν, а $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})$ такі функції, що при кожному $\vec{t} \in T$, $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) \in L_2(R^d, \nu)$, а при кожному $\vec{\lambda} \in R^d$ функція $f(\vec{t}, \vec{\lambda})$ неперервна по $\vec{t}$. Нехай A — однозв'язна, з кусково-гладкою межею область в R^d, D_n — розбиття області A на n однозв'язних областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ з кусково-гладкими межами, $\vec{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — фіксовані точки в R^d такі, що $\vec{\lambda}_i \in \Delta_i$. Позначимо апроксимаційну модель

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i) Z_r(\Delta_i).$$

Зауважимо, що $Z_r(\Delta_i)$ — це некорельовані випадкові величини такі, що $EZ_r(\Delta_i) = 0$, $E(Z_r(\Delta_i))^2 = \nu(\Delta_i)$, тобто апроксимаційна модель процесу X це сума $\sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}_i)\theta_i$, де θ_i — некорельовані гауссові випадкові величини такі, що $E\theta_i = 0$, $E\theta_i^2 = \nu(\Delta_i)$.

В роботах [1,2] досліджувались оцінки точності моделювання гауссових випадкових полів у просторах $L_2(T)$ та $L_p(T)$. В даній роботі досліджуються точність і надійність моделювання гауссових однорідних та ізотропних випадкових полів в нормах цих же просторів. Ці дослідження продовжують дослідження розпочаті в роботах [1-3] для гауссових випадкових полів та покращують результати отримані для однорідних та ізотропних гауссових полів.

Означення 1. *Нехай $SO(d)$ группа обертань R^d навколо початку координат. Однорідне випадкове поле $X(\vec{t}), \vec{t} \in R^d$, називаеться ізотропним, якщо для кожного елемента g з групи $SO(d)$ для будь-яких $\vec{t}, \vec{s} \in R^d$ виконуеться співвідношення*

$$EX(\vec{t})X(\vec{s}) = EX(g\vec{t})X(g\vec{s}).$$

Кореляційна функція $B(\vec{t}, \vec{s})$ однорідного та ізотропного поля залежить лише від віддалі між точками $\vec{t}$ та $\vec{s}$

$$B(\vec{t}, \vec{s}) = B(r).$$

Однорідне випадкове поле з кореляційною функцією $B(\vec{t}) = \int\limits_{R^d} cos(\vec{\lambda}, \vec{t}) d\nu(\lambda)$ буде ізотропним тоді та лише тоді, коли міра в зображенні має таку властивість:

$$\nu(s) = \nu(gs)$$

для будь-яких $g \in SO(d)$ та борелівської множини S.

Позначимо $\Phi(\lambda) = \nu(A_\lambda)$, $\lambda > 0$, де

$$A_\lambda = \left\{ \vec{v} \colon \left(\sum_{i=1}^{d} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \lambda \right\}.$$

Зрозуміло, що $\Phi(\lambda)$ неспадна функція на $[0, +\infty)$ та

$$\int\limits_0^\infty d\Phi(\lambda) = \nu(R^d) < +\infty.$$

В роботі [4] було доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Кореляційну функцію $B(r)$ центрованого однорідного ізотропного випадкового поля X можна записати у вигляді*

$$B(r) = \int\limits_0^\infty Y_d(\lambda r) \, d\Phi(\lambda),$$

де $Y_d(z)$ — сферична бесселева функція

$$Y_d(z) = 2^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) I_{\frac{d-2}{2}}(z) z^{\frac{2-d}{2}},$$

$I_\alpha(z)$ — звичайна функція Бесселя.

2. Оцінка параметрів апроксимаційної моделі. Розглянемо гауссове однорідне та ізотропне поле на множині $T = \{\vec{t} \in R^d, \tilde{\rho}(\vec{t}, \vec{0}) \le L\}$, $L \ge 0$. Як і у випадку однорідного поля, для того, щоб побудувати A-модель цього поля, побудуємо область A та її розбиття D_n. Нехай

$$A = \{\vec{\lambda}\colon\ \tilde{\rho}(\vec{\lambda}, 0) < \Lambda\} = \left\{\vec{\lambda}\colon\ \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)^{\frac{1}{2}} < \Lambda\right\}, \quad \Lambda > 0.$$

Тепер розглянемо в області A сферичні координати $\vec{\lambda} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-2}, \varphi, u)$, $0 \le \theta_s \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le u \le \Lambda$, $\lambda_1 = u\cos\theta_1$, $\lambda_2 = u\sin\theta_1\cos\theta_2, \dots, \lambda_{d-1} = u\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-2}\cos\varphi$, $\lambda_d = u\sin\theta_1\sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2}\sin\varphi$.

У сферичних координатах область A записується у вигляді $A = \{\vec{\lambda}\colon\ u < \Lambda\}$. Для деякого цілого $m > 0$ позначимо

$$k_{r_s} = \frac{\pi r_s}{m}, \qquad r_s = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

$$k_{r_\varphi} = \frac{2\pi r_\varphi}{m}, \qquad r_\varphi = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

$$k_r = \frac{\Lambda r}{m}, \qquad r = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Розбиття D_n області A визначається його елементами

$$\Delta(r_1, r_2, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r) =$$

$$= \{\vec{\lambda}\colon\ k_{r_s} \le \theta_s \le k_{r_s+1}, s = 1, 2, \dots, d-2, k_{r_\varphi} \le \varphi < k_{r_\varphi+1}, k_r \le u < k_{r+1}\}.$$

При цьому $n = m^d$. Позначимо через $\vec{\lambda}(r_1, r_2, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r)$ точку з сферичними координатами $(k_{r_1}, k_{r_2}, \dots, k_{r_{d-2}}, k_\varphi, k_r)^\top$. A-модель поля X має вигляд

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum \Big(\cos(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_1, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r)) \cdot Z_1(\Delta(r_1, r_2, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r)) +$$

$$+ \sin(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_1, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r)) \cdot Z_2(\Delta(r_1, r_2, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r))\Big),$$

де сума розглядається по множині I індексів: $0 \le r_s \le m-1$, $s = 1, 2, \dots, d$, $0 \le r_\varphi \le m-1$, $0 \le r \le m-1$.

Сім'я випадкових величин $\{Z_i(\Delta(r_1, r_2, \dots, r_d, r_\varphi, r), i = 1, 2\}$ це сім'я некорельованих або незалежних гауссових випадкових величин таких, що

$$E\{Z_i^2(\Delta(r_1, r_2, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r)) = \nu(\Delta(r_1, r_2, \dots, r_d, r_\varphi, r)) = \big(\Phi(k_{r+1}) - \Phi(k_r)\big) m^{1-d}.$$

При розрахунку параметрів $A-$ моделі випадкових полів наобхідно скористатись теоремами 2-3 роботи [1]. Для заданого розбиття необхідно оцінити величини $B(\vec{t}, D_n, A)$, $B(D_n, A)$ та $G(D_n, A)$.

Легко пересвідчитись, що для поля X має місце

$$B(\vec{t}, D_n, A) = \sum \int\limits_{\Delta(r_1, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r)} 4\sin^2 \frac{(\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}(r_1, \dots, r_{d-2}, r_\varphi, r))}{2}\, d\nu(\lambda) + \nu(R^d \backslash A).$$

В формулі сума береться по множині I індексів, що визначена вище, а $\nu(R^d \setminus A) = \Phi(+\infty) - \Phi(\Lambda)$. Тепер легко отримати нерівність

$$B(\vec{t}, D_n, A) \leq Z_m \Phi(\Lambda) \sum_{i=1}^{d} t_i^2 + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda)),$$

де

$$Z_m = \max_{0 \leq r_s \leq m-1, s=1,\ldots,d 0 \leq r_\varphi \leq m-1 0 \leq r \leq m-1}$$

$$\max_{\vec{\lambda} \in \Delta(r_1,\ldots,r_{d-2},r_\varphi,r)} \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - \lambda_i(r_1, \ldots, r_{d-2}, r_\varphi, r))^2.$$

Далі, легко отримати, що при $\vec{\lambda} = \Delta(r_1, \ldots, r_{d-2}, r_\varphi, r)$ мають місце нерівності

$$\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - \lambda_i(r_1, \ldots, r_{d-2}, r_\varphi, r))^2 \leq$$

$$\leq (u - k_r)^2 + 4uk_r \left[\sum_{s=1}^{d-2} \sin^2\left(\frac{\theta_s - k_{r_s}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi - k_{r_\varphi}}{2}\right) \right] \leq$$

$$\leq \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 + k_{r+1}k_r \left[\sum_{s=1}^{d-2} \left(\frac{\pi}{m}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \right] \leq \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \left[1 + (d+2)\pi^2\right].$$

З останніх нерівностей випливає нерівність

$$B(\vec{t}, D_n, A) \leq \Phi(\Lambda) \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \left[1 + (d+2)\pi^2\right] \sum_{i=1}^{d} t_i^2 + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda)), \tag{1}$$

З (1) отримуємо, що в цьому випадку

$$B(D_n, A) \leq a(L)\Phi(\Lambda) \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \left[1 + (d+2)\pi^2\right] + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda)) b(L), \tag{2}$$

де

$$a(L) = \int_T \left(\sum_{i=1}^{d} t_i^2 \right) d\vec{t} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} L^{d+2}}{(d+2)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \qquad b(L) = \int_T d\vec{t} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} L^d}{d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},$$

$$G(D_n, A) \leq L^2 \Phi(\Lambda) \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \left[1 + (d+2)\pi^2\right] + \left[\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda)\right], \tag{3}$$

$\Gamma(x)$ - гамма-функція.

3. Оцінка параметрів моделі для випадкових полів на площині та в просторі. При $d = 2$ розглянемо гауссове однорідне та ізотропне поле на множині $T = \{\vec{t} \in R^2, \tilde{\rho}(\vec{t}, \vec{0}) \leq L\}$, $L \geq 0$. Це буде круг радіуса L. Область A та її розбиття D_n мають вигляд

$$A = \{\vec{\lambda} \colon \ \tilde{\rho}(\vec{\lambda}, 0) < \Lambda\} = \left\{ \vec{\lambda} \colon \ \left(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}} < \Lambda \right\}, \quad \Lambda > 0.$$

У сферичних координатах область A має вигляд $\vec{\lambda} = (\varphi, u)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq \Lambda$, $\lambda_1 = u\cos\varphi$, $\lambda_2 = u\sin\varphi$. Для деякого цілого $m > 0$ позначимо

$$k_{r_\varphi} = \frac{2\pi r_\varphi}{m}, \qquad r_\varphi = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$k_r = \frac{\Lambda r}{m}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Розбиття D_n області A визначається його елементами

$$\Delta(r_\varphi, r) = \{\vec{\lambda}\colon k_{r_\varphi} \leq \varphi < k_{r_\varphi+1}, k_r \leq u < k_{r+1}\}.$$

При цьому $n = m^2$. Позначимо через $\vec{\lambda}(r_\varphi, r)$ точку з сферичними координатами $(k_\varphi, k_r)^\top$. A-модель поля X має вигляд

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum \bigl(\cos(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_\varphi, r)) \cdot Z_1(\Delta(r_\varphi, r)) + \sin(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_\varphi, r)) \cdot Z_2(\Delta(r_\varphi, r))\bigr),$$

де сума розглядається по множині I індексів: $0 \leq r_\varphi \leq m-1$, $0 \leq r \leq m-1$.

Отже, при моделюванні сім'ю випадкових величин $\{Z_1(\Delta_i), Z_2(\Delta_i)\}$ розглядатимемо, як сім'ю некорельованих (незалежних) гауссових випадкових величин таких, що

$$EZ_1^2(\Delta_i) = EZ_2^2(\Delta_i) = \nu(\Delta_i) = \frac{\bigl(\Phi(k_{r+1}) - \Phi(k_r)\bigr)}{m}.$$

Для $B(D_n, A)$ та $G(D_n, A)$ використаємо оцінки (2) та (3), отже

$$B(D_n, A) \leq a(L)\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \bigl[1 + 4\pi^2\bigr] + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda))b(L),$$

де

$$a(L) = \frac{2\pi L^4}{4\Gamma(1)}, \qquad b(L) = \frac{2\pi L^2}{2\Gamma(1)},$$

$$G(D_n, A) \leq L^2\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \bigl[1 + 4\pi^2\bigr] + \bigl[\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda)\bigr],$$

Нехай функція $\Phi(x)$ має зображення $\Phi(x) = \int\limits_0^x f(u)du$. В якості $f(u)$ розглянемо функції $f_1(u) = \frac{1}{((1+u^2)^k)}$, $k \geq 1$ та $f_2(u) = \exp\bigl\{-\frac{x^2}{2}\bigr\}$. В таблиці 1-2 приведені результати оцінювання Λ та m для різних значень точності і надійності. В розрахунках вважалось, що $L = 1$.

Тепер розглянемо гауссове однорідне та ізотропне поле на множині $T = \{\vec{t} \in R^3, \tilde{\rho}(\vec{t}, \vec{0}) \leq L\}$, $L \geq 0$ в трьохвимірному просторі, $d = 3$. Як і у попередньому випадку для того, щоб побудувати A-модель цього поля, побудуємо область A та її розбиття D_n. В області A сферичні координати $\vec{\lambda} = (\theta_1, \varphi, u)$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq \Lambda$, мають вигляд $\lambda_1 = u\cos\theta_1$, $\lambda_2 = u\sin\theta_1\cos\varphi$, $\lambda_3 = u\sin\theta_1\sin\varphi$.

Для деякого цілого $m > 0$ позначимо

$$k_{r_1} = \frac{\pi r_1}{m}, \qquad r_1 = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

Таблиця 1.
Основні параметри для моделювання випадкового поля з функцією $f_1(u)$ в L_2 при $d = 2$

δ	1-α	Λ	m	k
0.1	0.05	3700	2400000	1
0.1	0.05	19	4500	2
0.1	0.05	12	3900	2
0.05	0.05	20	12000	2
0.01	0.05	65	175000	2
0.01	0.05	6	11000	4

Таблиця 2.
Основні параметри для моделювання випадкового поля з функцією $f_2(u)$ в L_2 при $d = 2$

δ	1-α	Λ	m
0.1	0.05	5	1360
0.05	0.05	5	2750
0.01	0.05	5	15200

$$k_{r_\varphi} = \frac{2\pi r_\varphi}{m}, \qquad r_\varphi = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$
$$k_r = \frac{\Lambda r}{m}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Розбиття D_n області A визначається його елементами

$$\Delta(r_1, r_\varphi, r) = \{\vec{\lambda}\colon\ k_{r_1} \le \theta_1 \le k_{r_1+1}, k_{r_\varphi} \le \varphi < k_{r_\varphi+1}, k_r \le u < k_{r+1}\}.$$

При цьому $n = m^3$. Позначимо через $\vec{\lambda}(r_1, r_\varphi, r)$ точку з сферичними координатами $(k_{r_1}, k_\varphi, k_r)^\top$. A-модель поля X має вигляд

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum \Big(\cos(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_1, r_\varphi, r)) \cdot Z_1(\Delta(r_1, r_\varphi, r)) +$$
$$+ \sin(\vec{t}, \vec{\lambda}(r_1, r_\varphi, r)) \cdot Z_2(\Delta(r_1, r_\varphi, r))\Big),$$

де сума розглядається по множині I індексів: $0 \le r_1 \le m-1$, $0 \le r_\varphi \le m-1$, $0 \le r \le m-1$.

Сім'я випадкових величин $\{Z_i(\Delta(r_1, r_\varphi, r), i = 1, 2\}$ це сім'я некорельованих або незалежних гауссових випадкових величин таких, що

$$EZ_i^2(\Delta(r_1, r_\varphi, r)) = \nu(\Delta(r_1, r_\varphi, r)) = \frac{\big(\Phi(k_{r+1}) - \Phi(k_r)\big)}{m^2}.$$

Для оцінювання $B(D_n, A)$ та $G(D_n, A)$ використаємо оцінки (2) та (3), отже, наприклад

$$B(D_n, A) \le a(L)\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 \left[1 + 5\pi^2\right] + (\Phi(\infty) - \Phi(\Lambda))b(L),$$

де

$$a(L) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} L^5}{5\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}, \qquad b(L) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} L^3}{3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)},$$

В таблиці 3-4 приведені результати оцінювання Λ та m для різних значень точності і надійності. В розрахунках вважалось, що $L = 1$.

Таблиця 3.

Основні параметри для моделювання випадкового поля з функцією $f_1(u)$ в L_2 при $d = 3$

δ	1-α	Λ	m	k
0.1	0.05	4300	4000000	1
0.1	0.05	18	5800	2
0.05	0.05	22	16600	2
0.01	0.05	75	250000	2
0.1	0.05	5	1130	4

Таблиця 4.

Основні параметри для моделювання випадкового поля з функцією $f_2(u)$ в L_2 при $d = 3$

δ	1-α	Λ	m
0.1	0.05	5	1800
0.05	0.05	5	3620
0.01	0.05	5	20700

При виборі параметрів моделювання необхідно знаходити компроміс між значеннями Λ та m, перевага надається меншому m. В роботі розглядалось рівномірне розбиття області A. Дослідження інших варіантів розбиття області A є одним з напрямків подальших досліджень. Окрім просторів L_2 та L_p продовжуються дослідження точності і надійності моделювання гауссових випадкових полів в просторах Орліча та просторі неперервних функцій.

1. *Пашко А. О.* Чисельне моделювання гауссових однорідних випадкових полів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. –2013. –Вип. 24, №1, –С. 116-120.
2. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О.* Про моделювання випадкових полів I // Теор. ймов. та мат. статистика. – 1999. – **61**, – С. 61–74.
3. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В.* Моделювання випадкових полів. – К.: Задруга. 2007.
4. *Ядренко М.Й.* Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища школа. лит., 1980.

Одержано 25.09.2013