УДК 517.9

М. П. Сергієнко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОРІДНОГО ТА ІЗОТРОПНОГО ГАУССОВОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ

We consider the homogeneous and isotropic, continuous in the mean square Gaussian random field $\xi(x)$ defined on $\mathbb{R}^n$ for which the estimates for the deviations distribution from spherical average of the correlation function and $\mathbf{E}\xi(x) = 0$ have been obtained. Using these inequalities we built criterion for testing the hypothesis of the correlation function of the random field.

В статті розглядається однорідне та ізотропне неперевне в середньому квадратичному гаусове випадкове поле $\xi(x)$ задане на $\mathbb{R}^n$ для якого отримані оцінки для розподілу відхилень сферичного середнього від кореляційної функції і $\mathbf{E}\xi(x) = 0$. За допомогою отриманих нерівностей побудовано критерій перевірки гіпотези про кореляційну функцію випадкового поля.

1. Основні означення. Нехай $\xi(x)$ - неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне гауссове випадкове поле в $\mathbb{R}^n$ з математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Це означає, що $\mathbf{E}|\xi(x)|^2 < +\infty$ та $\mathbf{E}\xi(x)\overline{\xi(y)}$ залежить лише від відстані між x та y, тобто для кореляційної функції випадкового поля справедлива рівність

$$B(x, y) = \mathbf{E}\xi(x)\overline{\xi(y)} = B(|x - y|).$$

Кореляційна функція $B(x, y)$ однорідного та ізотропного випадкового поля залежить лише від відстані між x та y. Відомо, що [7]

$$B(r) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}}d\Phi(\lambda),$$

де $r = |x - y|$ - відстань між x та y, а $\Phi(\lambda)$ - спектральна функція поля. Ввівши в розгляд сферичну бесселеву функцію

$$Y_n(z) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(z)}{(z)^{\frac{n-2}{2}}},$$

можна переписати $B(r)$ у вигляді

$$B(r) = \int\limits_0^{+\infty} Y_n(\lambda r)d\Phi(\lambda). \tag{1}$$

Позначимо $S_R(x)$ та $V_R(x)$ сферу і кулю радіуса R з центром в точці x, $m_n^{(R)}(\cdot)$– лебегову міру на $S_R(x)$. Тоді

$$U_n(R) = \frac{R^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad \omega_n(R) = \frac{2R^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

відповідно об'єм кулі та поверхня сфери радіуса R.

Розглянемо випадкове поле

$$\eta_R(x) = \frac{1}{\omega_n(R)}\int\limits_{S_R(x)}\xi(y)m_n^{(R)}(dy).$$

Теорема 1. *[7] Випадкове поле $\eta_R(x)$ є однорідним та ізотропним. Випадкові поля $\eta_R(x)$ та $\xi(x)$ однорідно та ізотропно пов'язані між собою та мають місце рівності*

$$\mathbf{E}\eta_{R_1}(x_1)\eta_{R_2}(x_2) = \int\limits_0^{+\infty} Y_n(\lambda R_1)Y_n(\lambda R_2)Y_n(\lambda r_{x_1x_2})d\Phi(\lambda),$$

$$\mathbf{E}\eta_R(x_1)\xi(x_2) = \int\limits_0^{+\infty} Y_n(\lambda R)Y_n(\lambda r_{x_1x_2})d\Phi(\lambda),$$

де $r_{x_1x_2} = |x_1 - x_2|$ - відстань між точками x_1 та x_2.

2. Оцінювання кореляційної функції по спостереженням за неперервною траєкторією. Нехай випадкове поле $\xi(x)$ спостерігається на кулі $V_{R+r}(0)$, $r \geq 0$, і нехай спектральна функція $\Phi(\lambda)$ поля $\xi(x)$ абсолютно неперервна.

За оцінку кореляційної в точці r візьмемо

$$\widehat{B}(r) = \frac{1}{U_n(R)} \int\limits_{V_R(0)} \xi(x) \left[\frac{1}{\omega_n(r)} \int_{S_r(x)} \xi(t) m_n^{(r)}(dt)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{U_n(R)} \int\limits_{V_R(0)} \xi(x)\eta_r(x)dx. \qquad (2)$$

Ця оцінка є незміщенною оцінкою функції $B(r)$. Тоді

$$\mathbf{E}\left(\widehat{B}(r) - B(r)\right)^2 = \frac{1}{U_n^2(R)} \int\limits_{V_R(0)} \int\limits_{V_R(0)} \left[B(|x-y|) \int\limits_0^{+\infty} Y_n^2(\lambda r)Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^{+\infty} Y_n(\lambda r)Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)\right)^2\right] dxdy$$

Розглянемо $Z(r) = \widehat{B}(r) - B(r)$. $Z(r)$ - квадратично гауссів випадковий процес, оскільки $\widehat{B}(r)$ - границя інтегральних сум виду

$$\frac{1}{U_n^2(R)} \sum_k \eta_k(x_k)\xi(x_k)\Delta x_k, \quad \mathbf{E}Z(r) = 0,$$

а інтегральна сума - це квадратична форма гауссових векторів. Обчислимо

$$\mathbf{E}(Z(r) - Z(r'))^2 = \mathbf{E}(\widehat{B}(r) - \widehat{B}(r'))^2 - (B(r) - B(r'))^2.$$

$$\mathbf{E}(\widehat{B}(r) - \widehat{B}(r'))^2 = \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n(R)} \int\limits_{V_R(0)} \xi(x)\eta_r(x)dx - \frac{1}{U_n(R)} \int\limits_{V_R(0)} \xi(x)\eta_{r'}(x)dx\right)^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n(R)} \int\limits_{V_R(0)} \xi(x)(\eta_r(x) - \eta_{r'}(x))dx\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{U_n^2(R)} \int\limits_{V_R(0)} \int_{V_R(0)} \mathbf{E}\xi(x)(\eta_r(x) - \eta_{r'}(x))\xi(y)(\eta_r(y) - \eta_{r'}(y))dxdy =$$

$$= \frac{1}{U_n^2(R)} \int\limits_{V_R(0)} \int_{V_R(0)} [\mathbf{E}\xi(x)(\eta_r(x) - \eta_{r'}(x))\mathbf{E}\xi(y)(\eta_r(y) - \eta_{r'}(y))dxdy +$$

$$+\mathbf{E}\xi(x)\xi(y)\mathbf{E}(\eta_r(x)-\eta_{r'}(x))(\eta_r(y)-\eta_{r'}(y))+$$

$$+\mathbf{E}\xi(x)(\eta_r(y)-\eta_{r'}(y))\mathbf{E}\xi(y)(\eta_r(x)-\eta_{r'}(x))]\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{U_n^2(R)}\int\limits_{V_R(0)}\int\limits_{V_R(0)}\Big[\big(\mathbf{E}\xi(x)\eta_r(x)\mathbf{E}\xi(y)\eta_r(y)-\mathbf{E}\xi(x)\eta_{r'}(x)\mathbf{E}\xi(y)\eta_r(y)-$$

$$-\mathbf{E}\xi(x)\eta_r(x)\mathbf{E}\xi(y)\eta_{r'}(y)+\mathbf{E}\xi(x)\eta_{r'}(x)\mathbf{E}\xi(y)\eta_{r'}(y)\big)+$$

$$+B(|x-y|)\big(\mathbf{E}\eta_r(x)\eta_r(y)-\mathbf{E}\eta_r(x)\eta_{r'}(y)-\mathbf{E}\eta_{r'}(x)\eta_r(y)+\mathbf{E}\eta_{r'}(x)\eta_{r'}(y)\big)+$$

$$+\big(\mathbf{E}\xi(x)\eta_r(y)\mathbf{E}\xi(y)\eta_r(x)-\mathbf{E}\xi(x)\eta_{r'}(y)\mathbf{E}\xi(y)\eta_r(x)-\mathbf{E}\xi(x)\eta_r(y)\mathbf{E}\xi(y)\eta_{r'}(x)+$$

$$+\mathbf{E}\xi(x)\eta_{r'}(y)\mathbf{E}\xi(y)\eta_{r'}(x)\big)\Big]\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{U_n^2(R)}\int\limits_{V_R(0)}\int\limits_{V_R(0)}\Big[\big(B^2(r)-2B(r)B(r')+B^2(r')\big)+B(|x-y|)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{+\infty}Y_n^2(\lambda r)Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)-2\int\limits_0^{+\infty}Y_n(\lambda r)Y_n(\lambda r')Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{+\infty}Y_n^2(\lambda r')Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)\right)+\left\{\left(\int\limits_0^{+\infty}Y_n(\lambda r)Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)\right)^2+\right.$$

$$-2\int\limits_0^{+\infty}Y_n(\lambda r)Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)\int\limits_0^{+\infty}Y_n(\lambda r')Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)+$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^{+\infty}Y_n(\lambda r)Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)\right)^2\right\}\Bigg]\,dxdy.$$

Отже,

$$\mathbf{E}(Z(r)-Z(r'))^2=$$

$$=\frac{1}{U_n^2(R)}\int\limits_{V_R(0)}\int_{V_R(0)}\Big[B(|x-y|)\int_0^{+\infty}(Y_n(\lambda r)-Y_n(\lambda r'))^2Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)+$$

$$+\left(\int\limits_0^{+\infty}(Y_n(\lambda r)-Y_n(\lambda r'))Y_n(\lambda|x-y|)d\Phi(\lambda)\right)^2\Bigg]\,dxdy. \tag{3}$$

Скориставшись формулою інтеграла Соніна

$$J_{r+\mu+1}(x)=\frac{x^{\mu+1}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}J_r(x\sin\theta)\sin^{r+1}\theta\cos^{2\mu+1}\theta d\theta,\quad \mu>-1,\ r>-1,$$

обчислимо

$$Y_n(\lambda r)-Y_n(\lambda r')=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}}-\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r')}{(\lambda r')^{\frac{n-2}{2}}}\right)=$$

$$=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(k)\left(\frac{\frac{(\lambda r)^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma(\frac{n}{2}-1)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}J_0(\lambda r\sin t)\sin t\cos^{n-3}t dt}{(\lambda r)^{\frac{n}{2}-1}}-\frac{\frac{(\lambda r')^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma(\frac{n}{2}-1)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}J_0(\lambda r'\sin t)\sin t\cos^{n-3}t dt}{(\lambda r')^{\frac{n}{2}-1}}\right)=$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma(\frac{n}{2}-1)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(J_0(\lambda r\sin t)-J_0(\lambda r'\sin t))\sin t\cos^{n-3}t dt=$$

$$= 2(\tfrac{n}{2} - 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (J_0(\lambda r \sin t) - J_0(\lambda r' \sin t)) \sin t \cos^{n-3} t dt.$$

Отже,

$$Y_n(\lambda r) - Y_n(\lambda r') = (n-2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (J_0(\lambda r \sin t) - J_0(\lambda r' \sin t)) \sin t \cos^{n-3} t dt. \tag{4}$$

Лема 1 (8)**.** *Нехай $T = [0, \infty)$ і нехай функція $X_\lambda(u), \lambda > 0, u \in T\lambda$ така що*

1) $\sup_{u \in T} |X_\lambda(u)| \leq B$*;*

2) $|X_\lambda(u) - X_\lambda(v)| \leq C\lambda|u - v|$ *для всіх* $u, v \in T$

Нехай $\varphi(\lambda), \lambda > 0$ - неперервна зростаюча функція, така що $\varphi(\lambda) > 0$ для всіх $\lambda > 0$ і $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ зростає при $\lambda > v0$ для деякої константи $v_0 \geq 0$. Тоді

$$|X_\lambda(u) - X_\lambda(v)| \leq \max(C; 2B) \frac{\varphi(\lambda + v_0)}{\varphi(|u - v|^{-1} + v_0)} \tag{5}$$

для всіх $\lambda \geq 0$ і $v_0 > 0$.

Підінтегральна функція у (4) переписується у вигляді

$$J_0(\lambda r \sin t) - J_0(\lambda r' \sin t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big(\cos(\lambda r \sin t \sin \tau) - \cos(\lambda r' \sin t \sin \tau)\big) d\tau =$$

Тоді застосовуючи попередню лему для $X_\lambda(u) = \cos(\lambda u \sin t \sin \tau)$ знайдемо оцінку для модуля різниці $|X_\lambda(u) - X_\lambda(v)|$. Маємо $B = 1, C = 1$ і звідси нерівність (5) перепишеться

$$|\cos(\lambda u \sin t \sin \tau) - \cos(\lambda v \sin t \sin \tau)| \leq 2 \frac{\varphi(\lambda + r_0)}{\varphi(|u - v|^{-1} + r_0)}$$

для всіх $\lambda \geq 0, r_0 > 0$. Тоді

$$|Y_n(\lambda r) - Y_n(\lambda r')| \leq (n-2) \frac{2\varphi(\lambda + r_0)}{\varphi(|u - v|^{-1} + r_0)} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-3} t dt \right| =$$

$$= \frac{2\varphi(\lambda + r_0)}{\varphi(|u - v|^{-1} + r_0)}. \tag{6}$$

Нехай $\mathcal{A}$- борелева σ-алгебра на $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Нехай існують такі функції $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$ такі що: $\sigma(h) \geq 0$, $\sigma(h)$ зростає при $h > 0$, $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, $\sigma(h)$- неперервна справа і $\sup_{\rho(r, r') \leq h} \|Z(r) - Z(r')\| \leq \sigma(h)$. Відмітимо, що такі властивості має функція:

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(r, r') \leq h} \|Z(r) - Z(r')\|.$$

Нехай $d(u,v) = \|Z(u) - Z(v)\|$ і S- це множина з $\mathcal{A}$ така що $(\mu \times \mu)\{(u,v) \in S \times S,\ \rho(u,v) \neq 0\} > 0$. Нехай $\gamma(y)$ така функція, що $\gamma(y) > 0$ при $y > 0$ і така, що функція $z(y) = \frac{y}{\gamma(y)}$ зростає і $z(y) \to 0$ при $y \to 0$. Нехай $U(x)$- довільна N-функція Орлича.

Позначимо:

$$z(v) = \frac{v}{\gamma(v)};$$

$$\delta_1(t) = z(2\sigma(\sup_{s\in S}\rho(t,s)))$$

$$\nu_t(u) = \mu(B(t, \sigma_t^{(-1)}(z^{(-1)}(u)/2)) \cap S).$$

Теорема 2. *[3] Нехай $X = \{X(t),\ t \in T\}$ - сепарабельний стохастичний процес з класу Δ^2. Нехай $\gamma(v)$ - зростаюча функція. Нехай виконується умова*

$$\sup_{t\in S}\int_0^{\delta_1(t)} U^{(-1)}((\nu_t(u))^{-1})du < \infty.$$

Тоді для довільного $0 < p < 1$ має місце нерівність:

$$\sup_{t\in S}\left|X(t) - \int_S X(u)\frac{d\mu(u)}{\mu(S)}\right| \leq \frac{\eta}{p(1-p)}\sup_{t\in S}\left[Q\int_0^{\min\{\delta_1(t)p,l_0\}} U^{(-1)}((\nu_t(u))^{-1})du + Z(t)\right] = \eta a_p,$$

де

$$\eta = \left\|\frac{(X(u)-X(v))\gamma(d(u,v))}{d(u,v)}\right\|_{U,\mu\times\mu}^{S\times S}$$

є фінітна випадкова величина, l_0 це таке число, що $(\nu_t(u))^{-1} \geq U(y_0)$, якщо $u \leq l_0$; $Z(t) = 0$ якщо $\delta_1(t)p \leq l_0$ і

$$Z(t) = \int_{\min\{\delta_1(t)p,l_0\}}^{\delta_1(t)p} U^{(-1)}((\nu_t(u))^{-2})du,$$

якщо $\delta_1(t)p > l_0$.

Нехай $U(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$. Ця функція належить до класу Δ^2 з константами $Q = 2, y_0 = 0$. Тоді з роботи [9, ст.16]

$$\mathbf{P}(\eta > x) \leq 2\exp\{\ln(1 + \frac{1}{A(S)})\frac{x}{\hat{\gamma}}\} \tag{7}$$

де $\hat{\gamma} = \sup_{u,v\in S}\gamma(d(u,v))$,

$$A(S) = \int_S\int_S \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} d(\mu(u)\times\mu(v)).$$

Теорема 3. *Нехай для довільного функції* $\varphi(\cdot)$ *виконується умова*

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi(\lambda + r_0) d\Phi(\lambda). \tag{8}$$

Тоді має місце наступна нерівність:

$$\mathbf{P}\{\sup\nolimits_{0\le\tau\le S} |B(\tau) - \widehat{B}(\tau) - \tfrac{1}{S}\int\limits_0^S B(u)du - \tfrac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}(u)du| > x\} \le$$
$$\le 2\exp\{\ln(1 + \tfrac{1}{A(S)})\tfrac{x}{\hat{\gamma}|a_p|}\},$$

де

$$a_p = \frac{1}{p(1-p)} \sup_{t\in S}[Q \int\limits_0^{\min\{\delta_1(t)p, l_0\}} U^{(-1)}((\nu_t(u))^{-1})du + Z(t)],$$

$$\hat{\gamma} = \sup_{u,v\in S} \gamma(d(u,v)), \quad A(S) = \int\limits_S\int\limits_S \frac{\gamma(d(u,v))}{\hat{\gamma}} d(\mu(u)\times\mu(v)),$$

$$z(v) = \frac{v}{\gamma(v)}, \quad \delta_1(t) = z(2\sigma(\sup_{s\in S}\rho(t,s))), \quad \nu_t(u) = \mu(B(t, \sigma_t^{(-1)}(z^{(-1)}(u)/2)) \cap S).$$

l_0 *це таке число, що* $(\nu_t(u))^{-1} \ge U(y_0)$, *якщо* $u \le l_0$; $Z(t) = 0$ *якщо* $\delta_1(t)p \le l_0$,

$$Z(t) = \int\limits_{\min\{\delta_1(t)p, l_0\}}^{\delta_1(t)p} U^{(-1)}((\nu_t(u))^{-2})du,$$

якщо $\delta_1(t)p > l_0$.

Доведення. Доведення такого типу теорем можна подивитись в [9].

Критерій 1. *Нехай для фіксованого* $\alpha, 0 \le \alpha \le 1$ *знайдемо* x_α *як розвязок рівняння* $f(x_\alpha) = \alpha$, *де*

$$f(x) = 2\exp\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{A(S)}\right)\frac{x}{\hat{\gamma}|a_p|}\right\}.$$

Тоді гіпотеза про те що $B(r)$ *- кореляційна функція випадкового поля* $\xi(x)$ *для* $0 \le \tau \le S$ *приймається, якщо*

$$\sup_{0\le\tau\le S} |B(\tau) - \widehat{B}(\tau) - \frac{1}{S}\int\limits_0^S B(u)du - \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}(u)du| < x_\alpha$$

і відхиляється в іншому разі.

Зауваження 1. *При застосуванні цього критерія ймовірність помилки першого роду не перевищує* α.

Теорема 4. *Нехай для довільного $\alpha > 1$ виконується умова*

$$\int\limits_0^{+\infty} \ln^\alpha(\lambda + r_0) d\Phi(\lambda). \tag{9}$$

Тоді має місце наступна нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\le\tau\le S} |B(\tau) - \widehat{B}(\tau) - \tfrac{1}{S}\int\limits_0^S B(u)du - \tfrac{1}{S}\int\limits_0^S \widehat{B}(u)du| > x\right\} \le$$
$$\le 2\exp\left\{\ln\left(1 + \tfrac{1}{A(S)}\right)\tfrac{x}{\hat{\gamma}|a_p|}\right\},$$

де

$$a_p = \frac{1}{p(1-p)}\sup_{t\in S}[Q\int\limits_0^{\min\left\{z\left(\frac{2C}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{\max\{t;S-t\}}+r_0\right)}\right)p,l_0\right\}} U^{(-1)}\left(\frac{\exp\left(\frac{C}{\frac{z^{(-1)}(u)}{2}}\right)^{1/\alpha} - r_0}{2}\right)du + Z(t)].$$

Доведення. Ця теорема є наслідком попередньої теореми, якщо в якості $\varphi(\lambda)$ взяти функцію $\ln^\alpha(\lambda), \alpha > 1$. У цьому разі константи оцінки перепишуться в наступному вигляді:

$$\sigma(h) = \frac{C}{\ln^\alpha(\frac{1}{h} + r_0)}, \qquad \sigma^{(-1)}(h) = \frac{1}{\exp\left(\frac{C}{h}\right)^{1/\alpha} - r_0}.$$

Далі

$$\delta_1(t) = z\left(\frac{2C}{\ln^\alpha\left(\frac{1}{\max\{t;S-t\}} + r_0\right)}\right), \quad \nu(u) = \frac{2}{\exp\left(\frac{C}{\frac{z^{(-1)}(u)}{2}}\right)^{1/\alpha} - r_0}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу для a_p матимемо необхідний вираз.

Теорема 5. *Нехай для довільного $\alpha > \frac{1}{2}$ виконується умова*

$$\int\limits_0^{+\infty} (\lambda + r_0)^{2\alpha} d\Phi(\lambda). \tag{10}$$

Тоді має місце наступна нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\le\tau\le S} |B(\tau) - \widehat{B}(\tau) - \tfrac{1}{S}\int\limits_0^S B(u)du - \tfrac{1}{S}\int\limits_0^S \widehat{B}(u)du| > x\right\} \le$$
$$\le 2\exp\left\{\ln(1 + \tfrac{1}{A(S)})\tfrac{x}{\hat{\gamma}|a_p|}\right\},$$

де

$$a_p = \frac{1}{p(1-p)}\sup_{t\in S}[Q\int\limits_0^{\min\left\{z\left(\frac{2C}{\left(\frac{1}{\max\{t;S-t\}}+r_0\right)^\alpha}\right)p,l_0\right\}} U^{(-1)}\left(\frac{\left(\frac{2C}{z^{(-1)}(u)}\right)^{1/\alpha} - r_0}{2}\right)du + Z(t)].$$

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 4, якщо в якості $\varphi(\lambda)$ взяти функцію $\lambda^\alpha, \alpha > 1$. У цьому разі константи оцінки перепишуться в наступному вигляді:

$$\sigma(h) = \frac{C}{(\frac{1}{h} + r_0)^\alpha},$$

а обернена функція до $\sigma(h)$ матиме вигляд

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{1}{(\frac{C}{h})^{1/\alpha} - r_0}.$$

Далі

$$\delta_1(t) = z\left(\frac{2C}{\left(\frac{1}{\max\{t;S-t\}} + r_0\right)^\alpha}\right), \quad \nu(u) = \frac{2}{\left(\frac{2C}{z^{(-1)}(u)}\right)^{1/\alpha} - r_0}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу для a_p матимемо необхідний вираз.

Висновки. В даній статті за допомогою методу мажоруючих мір отримано оцінки для розподілу відхилень сферичного середнього від кореляційної функції. За допомогою отриманих нерівностей побудовано критерій перевірки гіпотези про кореляційну функцію випадкового поля. Оцінювання здійснюється по спостереженням за випадковим полем на кулі, а за оцінку кореляційної функції при цьому вибирвється сферичне середнє поля.

1. *Talagrand, M.* The Generic Chaining. Upper and lower bounds of stochastic processes. Springer, 2005.
2. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, volume 188 (2000).
3. *Kozachenko Yu.V., Moklyachuk O.* Large deviation probabilities in terms of majorizing measures. ROSE, Vol. 11, No1 pp.1-20 (2003).
4. *Kozachenko Yu.V., Ryazantseva V.V.* Conditions for boundedness and continuity in terms of majorizing measures of random processes in certain Orlicz space. Theory Probab. Math. Stat. 44, 77-83 (1992).
5. *Kozachenko Yu.V., Stus O.V.* Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions. Mathematical Communications 3, 1, 83-94 (1998).
6. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* On local properties of realizations of some stochastic processes and fields. Theory Probab. Math Statist. 10, 37-45 (1974).
7. *Ядренко М.И.* Спектральная теория случайных полей. К.: Вища школа, 1980. - 207с.
8. *Kozachenko Yu.V., Veresh K.I.* The heat equation with random initial conditions from Orlicz spaces. Theory Probab. Math Statist. 80, 71-84 (2010).
9. *Sergiienko M.P.* How to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics, №3, 15-18 (2013).

Одержано 19.10.2013