УДК 517.956

Т. І. Фірман (Львівський нац. ун-т ім. І.Франка)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

In this paper we proved theorem about a correct local solvability of the Cauchy problem for countable system of quasi-linear hyperbolic equations of first order.

В даній статті для зліченної системи гіперболічних квазілінійних рівнянь першого порядку доведено теорему про коректну локальну розв'язність задачі Коші.

Вступ. Диференціальні рівняння в просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей називають зліченними системами диференціальних рівнянь в банахових просторах і їх вивчення розпочалось із робіт А.Тихонова, К.Персидського, О.Жаутикова (див. огляд літератури, в [1,2]). Оригінальні результати для таких систем щодо побудови теорії інваріантних тороїдальних многовидів, поведінки розв'язків, теорії звідності, вивчення зліченноточкових нелінійних крайових задач одержано в роботах [1, 2].

Однак, наприклад, при дослідженні стійкості розв'язків зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь або представлені розв'язку нелінійного рівняння через нескінченний ряд Фур'є приходимо до зліченних систем рівнянь з частинними похідними першого порядку [3–5]. Зліченні системи гіперболічних рівнянь виникають в багатьох теоретичних та прикладних проблемах [5–7].

У цій роботі за допомогою методу характеристик та теореми Банаха про стискуючі відображення, використовуючи методику А.М.Самойленка та Ю.В.Теплінського для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь [1], доведено теорему про коректну розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

1. Формулювання задачі. В смузі $\Pi^T = \{(x,t)\ : -\infty < x < \infty, 0 \le t \le T\}$ розглянемо задачу Коші для зліченної квазілінійної гіперболічної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u_1,u_2,...)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u_1,u_2,...),\ \ i \in \{1,...\} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_i(x,0) = g_i(x),\ \ i \in \{1,...\}. \tag{2}$$

Надалі будемо використовувати позначення $u = (u_1, u_2, ...)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$, $f = (f_1, f_2, ...)$, $g = (g_1, g_2, ...)$.

Задачу розглядатимемо в просторі C^∞, елементами якого є зчисленна сукупність неперервних функцій, обмежених деякою сталою. В просторі C^∞ визначимо норму для вектора $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ...)$

$$||u|| = \sup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\(x,t)\in\Pi^T}} \{|u_i(x,t)|\}.$$

Дослідимо достатні умови розв'язності задачі (1) - (2).

2. Узагальнений розв'язок задачі. Позначимо через $\varphi_i[u](\tau; x, t)$ характеристики системи (1), тобто розв'язок задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau, u_1(\xi, \tau), u_2(\xi, \tau), ...),\ i \in \{1, ...\} \tag{3}$$

з початковими умовами

$$\xi|_{\tau=t} = x. \tag{4}$$

При виконанні умов гладкості (див. нижче наведену теорему) розв'язок такої задачі існує і єдиний для довільного фіксованого набору $u(x, t)$ [1]. У випадках, коли потрібно наголосити на залежності $\varphi_i[u](\tau; x, t)$ від x, t або u, будемо записувати $\varphi_i(\tau; x)$, $\varphi_i(\tau; t)$ та $\varphi_i[u](\tau)$, відповідно.

Розв'язок вихідної задачі будемо шукати у фундаментальній області D, тобто множині точок $(x, t) \in \Pi^T$ таких, що усі характеристики, що виходять з цих точок в напрямку прямої $t = 0$, перетинають її при довільних значеннях $u \in C^\infty$.

Означення 1. *Функція $f : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Коші-Ліпшиця за змінними $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ з деякою неперервною функцією $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, якщо виконується нерівність:*

$$|f_i(x, t, u_1', u_2', ..., u_n', ...) - f_i(x, t, u_1'', u_2'', ..., u_n'', ...)| \le \alpha(x, t) \cdot \Delta u,$$

де $\Delta u = \sup\limits_i \{|u_i' - u_i''|\}$, $i \in \{1, ...\}$.

Будемо вважати, що функція $f : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в Π^T, якщо $f_i \in Lip_x(\Pi^T)$ для довільного набору $u_1, u_2, ...$ та для всіх $i \in \{1, ...\}$.

Надалі сталі Ліпшиця для функцій u, λ, f, g позначатимемо через L, Λ, F, G, відповідно. Інші сталі, а саме букви M та E з індексами, будемо використовувати для позначення комбінації відомих сталих з метою спрощення громіздких виразів.

Проінтегруємо кожне з рівнянь системи (1) вздовж відповідних характеристик $\varphi_i[u](\tau; x, t)$ на відрізку $[0, t]$. З урахуванням початкових умов (2), отримаємо зліченну систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x, t) = g_i(\varphi_i[u](0; x, t)) + \tag{5}$$

$$+ \int\limits_0^t f_i(\varphi_i[u](\tau; x, t), \tau, u_1(\varphi_i[u](\tau; x, t), \tau), u_2(\varphi_i[u](\tau; x, t), \tau), ...)d\tau\ \ i \in \{1, ...\}.$$

Означення 2. *Функцію $u : D \to \mathfrak{M}$ назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1)-(2), *якщо $u \in C^\infty(D) \cap Lip_x(D)$ і задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (5).

Доведення коректної розв'язності задачі (1)-(2) буде базуватися на низці оцінок, які сформулюємо у вигляді лем.

3. Допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай* $\lambda : D \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *задовольняє умови:*
1) $\lambda \in C(D) \cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1, u_2, ...$;
2) Коші-Ліпшиця з функцією $\alpha(x,t)$.
Тоді для $\varphi_i(\tau; x^1)$ *та* $\varphi_i(\tau; x^2)$ *справджується нерівність*

$$\sup_i\{|\varphi_i(\tau; x^1) - \varphi_i(\tau; x^2)|\} \le E^1|x^1 - x^2|, \quad E^1 = e^{(\Lambda + AL)T}. \tag{6}$$

Доведення. Нехай δ–довільний відрізок прямої $t = 0$ який містить точку x та точки $\varphi_i(0; x, t)$. Позначимо через $\Omega = \delta \times [0,T] \cap D$ і $A = \max\limits_{(\xi,\tau)\in\Omega} |\alpha(\xi,\tau)|$, тоді

$$|\varphi_i(\tau; x^1) - \varphi_i(\tau; x^2)| = \Big| x^1 - x^2 +$$

$$+ \int\limits_t^\tau \Big(\lambda_i(\varphi_i(s; x^1), s, u_1(\varphi_i(s; x^1), s), u_2(\varphi_i(s; x^1), s), ...) -$$

$$-\lambda_i(\varphi_i(s; x^2), s, u_1(\varphi_i(s; x^2), s), u_2(\varphi_i(s; x^2), s), ...) \Big) ds \Big| \le |x^1 - x^2| +$$

$$+ \Big| \int\limits_t^\tau \Big| \lambda_i(\varphi_i(s; x^1), s, u_1(\varphi_i(s; x^1), s), u_2(\varphi_i(s; x^1), s), ...) \pm$$

$$\pm\lambda_i(\varphi_i(s; x^1), s, u_1(\varphi_i(s; x^2), s), u_2(\varphi_i(s; x^2), s), ...) -$$

$$-\lambda_i(\varphi_i(s; x^2), s, u_1(\varphi_1(s; x^2), s), u_2(\varphi_i(s; x^2), s), ...) \Big| ds \Big| \le$$

$$\le |x^1 - x^2| + \Big| \int\limits_t^\tau \Big(\Lambda |\varphi_i(s; x^1) - \varphi_i(s; x^2)| \Big) ds + \int\limits_t^\tau \Big(AL \sup_i\{|\varphi_i(s; x^1) - \varphi_i(s; x^2)|\} \Big) ds \Big|.$$

Отже,

$$\sup_i\{|\varphi_i(\tau; x^1) - \varphi_i(\tau; x^2)|\} \le |x^1 - x^2| + (\Lambda + AL) \Big| \int\limits_t^\tau \sup_i\{|\varphi_i(s; x^1) - \varphi_i(s; x^2)|\} ds \Big|.$$

За лемою Гронуолла-Беллмана отримаємо

$$\sup_i\{|\varphi_i(\tau; x^1) - \varphi_i(\tau; x^2)|\} \le |x^1 - x^2| e^{(\Lambda + AL)T} = E^1 |x^1 - x^2|.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай* $\lambda : D \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *задовольняє умови:*
1) $\lambda \in C(D) \cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1, u_2, ...$;
2) Коші-Ліпшиця з функцією $\alpha(x,t)$.
Тоді для $\varphi_i[u^1](\tau)$ *та* $\varphi_i[u^2](\tau)$ *справджується оцінка*

$$\sup_i\{|\varphi_i[u^1](\tau) - \varphi_i[u^2](\tau)|\} \le M^1 T ||u^1 - u^2||, \quad M^1 = AE^1. \tag{7}$$

Доведення.

$$|\varphi_i[u^1](\tau)-\varphi_i[u^2](\tau)| \le \left|\int\limits_t^\tau \Big|\lambda_i(\varphi_i[u^1](s),s,u_1^1(\varphi_i[u^1](s),s),u_2^1(\varphi_i[u^1](s),s),...)-\right.$$

$$\left.-\lambda_i(\varphi_i[u^2](s),s,u_1^2(\varphi_i[u^2](s),s),u_2^2(\varphi_i[u^2](s),s),...)\Big|ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_t^\tau \Big|\lambda_i(\varphi_i[u^1](s),s,u_1^1(\varphi_i[u^1](s),s),u_2^1(\varphi_i[u^1](s),s),...)-\right.$$

$$-\lambda_i(\varphi_i[u^2](s),s,u_1^2(\varphi_i[u^2](s),s),u_2^2(\varphi_i[u^2](s),s),...)\pm$$

$$\left.\pm\lambda_i(\varphi_i[u^2](s),s,u_1^1(\varphi_i[u^1](s),s),u_2^1(\varphi_i[u^1](s),s),...)\Big|ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_t^\tau \Lambda|\varphi_i[u^1](s)-\varphi_i[u^2](s)|ds\right| +$$

$$+\left|\int\limits_t^\tau A\sup_i\{|u_i^1(\varphi_i[u^1](s),s)-u_i^2(\varphi_i[u^2](s),s)\pm u_i^1(\varphi_i[u^2](s),s)|\}ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_t^\tau \Lambda|\varphi_i[u^1](s)-\varphi_i[u^2](s)|ds\right| + \left|\int\limits_t^\tau AL\sup_i\{|\varphi_i[u^1](s)-(\varphi_i[u^2](s),s)|\}ds\right| +$$

$$+TA||u^1-u^2||.$$

Звідки й отримаємо оцінку

$$\sup_i\{|\varphi_i[u^1](\tau)-\varphi_i[u^2](\tau)|\} \le (AL+\Lambda)\left|\int\limits_t^\tau \sup_i\{|\varphi_i[u^1](s)-(\varphi_i[u^2](s),s)|\}ds\right| +$$

$$+TA||u^1-u^2||.$$

За лемою Гронуолла-Беллмана будемо мати

$$\sup_i\{|\varphi_i[u^1](\tau)-\varphi_i[u^2](\tau)|\} \le TA||u^1-u^2||e^{(\Lambda+AL)T} = M^1T||u^1-u^2||.$$

Лема 2 доведена.

Лема 3. *Припустимо, що:*

1) $\lambda : D\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ *задовольняє умову Коші-Ліпшиця з функцією* $\alpha(x,t)$ *і* $\lambda\in C(D)\cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1,u_2,...$;

2) $g:\mathbb{R}\to\mathfrak{M}$ *задовольняє умову Ліпшиця.*

Тоді справджуються співвідношення:

$$\sup_i\{|g_i(\varphi_i(\tau;x^1))-g_i(\varphi_i(\tau;x^2))|\} \le E^2|x^1-x^2|, \quad E^2=GE^1; \tag{8}$$

$$\sup_i\{|g_i(\varphi_i[u^1](\tau))-g_i(\varphi_i[u^2](\tau))|\} \le M^2T||u^1-u^2||, \quad M^2=GM^1.$$

Доведення. Перша нерівність (8) випливає з оцінок

$$\sup_i\{|g_i(\varphi_i(\tau;x^1))-g_i(\varphi_i(\tau;x^2))|\}\le G\sup_i\{|\varphi_i(\tau;x^1)-\varphi_i(\tau;x^2)|\}\le$$

$$\le GE^1|x^1-x^2|=E^2|x^1-x^2|.$$

Аналогічно одержимо другу нерівність

$$\sup_i\{|g_i(\varphi_i[u^1](\tau))-g_i(\varphi_i[u^2](\tau))|\}\le G\sup_i\{|\varphi_i[u^1](\tau)-\varphi_i[u^2](\tau)|\}\le$$

$$\le GM^1T||u^1-u^2||=M^2T||u^1-u^2||.$$

Лема 3 доведена.

Очевидно, що відносно заданої норми, простір C^∞ є повним. Тому для доведення існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(2) можна скористатися теоремою Банаха про стискуючий оператор. Для цього на просторі C^∞ розглянемо множину $\mathbb{E}_0$, елементом якої є зчисленна сукупність неперервних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця за змінною x і обмежені деякою сталою. На множині $\mathbb{E}_0$ розглянемо кулю

$$\mathbb{E}_1=\{u:||u-g||\le P\},$$

де P достатньо велике.

Введемо оператор $\mathfrak{U}:C^\infty\to C^\infty$, який визначений співвідношенням

$$\mathfrak{U}_i\{u\}(x,t)=g_i(\varphi_i[u](0;x,t))+ \tag{9}$$

$$+\int\limits_0^t f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),...)d\tau\ \ i\in\{1,...\},$$

де $u\in\mathbb{E}_1$.

Покажемо, що при достатньо малому T, $\mathfrak{U}\in\mathbb{E}_1$.

Спочатку доведемо, що $\mathfrak{U}\in C^\infty$.

Лема 4. *Припустимо, що:*

1) $\lambda,f:D\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ *задовольняють умову Коші-Ліпшиця з функціями* $\alpha(x,t)$ *та* $\beta(x,t)$, *відповідно і* $\lambda,f\in C(D)\cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1,u_2,...$;

2) $\sup_i\{|f_i(x,t,0,0,...)|\}\le\kappa(x,t)$, *де* $\kappa(x,t)$ *– деяка неперервна функція;*

3) $g:\mathbb{R}\to\mathfrak{M}$ *задовольняє умову Ліпшиця.*

Тоді $\mathfrak{U}\{u\}(x,t)\in C^\infty$.

Доведення. Нехай $K=\max\limits_{(\xi,\tau)\in\Omega}\{|\kappa(\xi,\tau)|\}$ та $B=\max\limits_{(\xi,\tau)\in\Omega}\{|\beta(\xi,\tau)|\}$.

Легко бачити, що умови леми 4 забезпечують оцінку [1]

$$|f_i(x,t,u_1,u_2,...)|\le B\sup_i\{|u_i(x,t)|\}+K,$$

для всіх $i\in\{1,...\}$.

Тому

$$||\mathfrak{U}\{u\}|| = \sup_{i,(x,t)} \{|g_i(\varphi_i[u](0;x,t)) +$$

$$+ \int_0^t f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),...)d\tau|\} \leq$$

$$\leq ||g|| + T(B||u|| + K) < \infty.$$

Отже, $\mathfrak{U}\{u\}(x,t) \in C^{\infty}$.

Лема 4 доведена.

Далі покажемо, що $\mathfrak{U} \in \mathbb{E}_0$.

Лема 5. *Припустимо, що:*

1) $\lambda, f : D \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця з функціями $\alpha(x,t)$ та $\beta(x,t)$, відповідно і $\lambda, f \in C(D) \cap Lip_x(D)$ при фіксованих $u_1, u_2, ...$;

2) $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця.

Тоді $\mathfrak{U}\{u\}(x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x.

Доведення.

$$|\mathfrak{U}_i\{u\}(x^1,t) - \mathfrak{U}_i\{u\}(x^2,t)| \leq |g_i(\varphi_i(0;x^1)) - g_i(\varphi_i(0;x^2))| +$$

$$+ \int_0^t \Big| f_i(\varphi_i(\tau;x^1),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x^1),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x^1),\tau),...) -$$

$$- f_i(\varphi_i(\tau;x^2),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x^2),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x^2),\tau),...)\Big| d\tau \leq$$

$$\leq E^2|x^1 - x^2| + \int_0^t \Big| f_i(\varphi_i(\tau;x^1),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x^1),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x^1),\tau),...) -$$

$$- f_i(\varphi_i(\tau;x^2),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x^2),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x^2),\tau),...) \pm$$

$$\pm f_i(\varphi_i(\tau;x^2),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x^1),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x^1),\tau),...)\Big| d\tau \leq$$

$$\leq E^2|x^1 - x^2| + \int_0^t F|\varphi_i(\tau;x^1) - \varphi_i(\tau;x^2)|d\tau +$$

$$+ \int_0^t B \sup_i \{|u_i(\varphi_i(\tau;x^1),\tau) - u_i(\varphi_i(\tau;x^2),\tau)|\} d\tau \leq E^2|x^1 - x^2| +$$

$$+(F + BL) \int_0^t \sup_i \{|\varphi_i(\tau;x^1) - \varphi_i(\tau;x^2)|\} d\tau \leq (E^2 + (F + BL)TE^1)|x^1 - x^2|.$$

Лема 5 доведена.

Отже, $|\mathfrak{U}_i\{u\}(x^1,t) - \mathfrak{U}_i\{u\}(x^2,t)| \leq L^{\mathfrak{U}}|x^1 - x^2|$, де $L^{\mathfrak{U}} = (E^2 + (F + BL)TE^1)$.

Лема 6. *Припустимо, що:*

1) $\lambda, f : D \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *задовольняють умову Коші-Ліпшиця з функціями* $\alpha(x,t)$ *та* $\beta(x,t)$*, відповідно і* $\lambda, f \in C(D) \cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1, u_2, ...$*;*

2) $\sup\limits_i\{|f_i(x,t,0,0,...)|\} \le \kappa(x,t)$*,* $\sup\limits_i\{|\lambda_i(x,t,0,0,...)|\} \le \gamma(x,t)$*, де* $\kappa(x,t)$*,* $\gamma(x,t)$ *– деякі неперервні функції;*

3) $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}$ *задовольняє умову Ліпшиця.*

Тоді при достатньо малому $T > 0$

$$\mathfrak{U} : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_1.$$

Доведення. Нехай $\Gamma = \max\limits_{(\xi,\tau)\in\Omega}\{|\gamma(\xi,\tau)|\}$. Умови леми 6 забезпечують оцінку

$$|\lambda_i(x,t,u_1,u_2,...)| \le A\sup_i\{|u_i(x,t)|\} + \Gamma.$$

Отже, будемо мати

$$|\mathfrak{U}_i\{u\}(x,t) - g_i(x)| \le |g_i(\varphi_i[u](0;x,t)) - g_i(x)| +$$

$$+\int_0^t \Big|f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),...)\Big|d\tau \le$$

$$\le GT(A\sup_i\{|u_i(x,t)|\} + \Gamma) + T(B\sup_i\{|u_i(x,t)|\} + K).$$

Тому

$$||\mathfrak{U}\{u\} - g|| \le T(E^3||u|| + E^4) \le P$$

при достатньо малому значенні T.

Лема 6 доведена.

Сформулюємо тепер основну теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що:*

1) $\lambda, f : D \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *задовольняють умову Коші-Ліпшиця з функціями* $\alpha(x,t)$ *та* $\beta(x,t)$*, відповідно і* $\lambda, f \in C(D) \cap Lip_x(D)$ *при фіксованих* $u_1, u_2, ...$*;*

2) $\sup\limits_i\{|f_i(x,t,0,0,...)|\} \le \kappa(x,t)$*,* $\sup\limits_i\{|\lambda_i(x,t,0,0,...)|\} \le \gamma(x,t)$*, де* $\kappa(x,t)$*,* $\gamma(x,t)$ *– деякі неперервні функції;*

3) $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}$ *задовольняє умову Ліпшиця.*

Тоді при достатньо малому $T > 0$ *оператор* $\mathfrak{U}$ *на кулі* $\mathbb{E}_1$ *буде стискуючим.*

Доведення. Розглянемо

$$|\mathfrak{U}\{u^1\}_i(x,t) - \mathfrak{U}\{u^2\}_i(x,t)| \le |g_i(\varphi_i[u^1](0)) - g_i(\varphi_i[u^2](0))| +$$

$$+\int_0^t \Big|f_i(\varphi_i[u^1](\tau),\tau,u_1^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau),u_2^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau),...) -$$

$$-f_i(\varphi_i[u^2](\tau),\tau,u_1^2(\varphi_i[u^2](\tau),\tau),u_2^2(\varphi_i[u^2](\tau),\tau),...)\Big|d\tau \le M^2T||u^1-u^2|| +$$

$$+\int_0^t \Big|f_i(\varphi_i[u^1](\tau),\tau,u_1^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau),u_2^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau),...) -$$

$$-f_i(\varphi_i[u^2](\tau),\tau,u_1^2(\varphi_i[u^2](\tau),\tau),u_2^2(\varphi_i[u^2](\tau),\tau),...)\pm$$

$$\pm f_i(\varphi_i[u^2](\tau),\tau,u_1^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau),u_2^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau),...)\Big|d\tau\leq$$

$$\leq M^2T||u^1-u^2||+\int\limits_0^t F|\varphi_i(\tau;u^1)-\varphi_i(\tau;u^2)|d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t B\sup_i\{|u_i^1(\varphi_i[u^1](\tau),\tau)-u_i^2(\varphi_i[u^2](\tau),\tau)\pm u_i^1(\varphi_i[u^2](\tau),\tau)|\}d\tau\leq$$

$$\leq M^2T||u^1-u^2||+T^2(F+BL)M^1||u^1-u^2||+TB||u^1-u^2||=$$

$$=T(M^2+T(F+BL)M^1+B)||u^1-u^2||.$$

Тоді одержимо

$$||\mathfrak{U}\{u^1\}-\mathfrak{U}\{u^2\}||\leq T(M^2+T(F+BL)M^1+B)||u^1-u^2||\leq TM||u^1-u^2||.$$

Отже, при достатньо малих значеннях T існує єдина нерухома точка оператора $\mathfrak{U}$. Звідки й одержуєм існування і єдиність розв'язку задачі (1) - (2).

1. Самойленко А. М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинський.– К.: Ин-т математики, 1993. – 308с.
2. Недокіс В.А. Зліченноточкові крайові задачі для диференціальних рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02."Диференціальні рівняння"/ В.А. Недокіс.– Київ, 2006.– 25с.
3. Berzhanov A.B. Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables/ A.B. Berzhanov, E.K. Kurmangaliev// Укр. мат. журн.– 2009.– Т.61.– N2.– с.280-288.
4. Оселедец В.И. Глобальная устойчивость бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неоднородные счетные цепи Маркова/ В.И. Оселедец, Д.В. Хмелёв// Проблемы передачи информации.– 2000.– Т.36.– Вып.1.– с.60-76.
5. Filimonov M.Yu. On the justification of the Fourier method to the solution of nonlinear partial differential equations/ M.Yu. Filimonov// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.– 1996.– v.11.– N1.– p.27-39.
6. Камбулов В.Ф. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике/ В.Ф. Камбулов, А.Ю. Колесов// Матем. моделирование.– 1996.– Т.8.– N1.– с.93-102.
7. Хома Г.П. Об одной смешаной задаче/ Г.П. Хома// Матем. физика.– К.: Наукова думка.– 1971.– с.99-104.

Одержано 18.11.2013