УДК 519.615

Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ КОРЕНІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

The constructing of numerical method for finding roots of algebraic and transcendental equations with the use of non-classical majorants and Newton diagrams of functions defined in tabular form is considered. The method does not require smoothness of the function in the neighborhood of the root.

Побудовано чисельний метод відшукання коренів алгебраїчних і трансцендентних рівнянь з використанням апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. Метод не вимагає гладкості функції в околі кореня.

Вступ. Для чисельного розв'язування алгебраїчних і трансцендентних рівнянь широко використовуються метод дотичних (Ньютона) і метод хорд [1]. Однак ці методи вимагають гладкості функції в околі кореня рівняння. Тому виникає задача побудови чисельного методу, який би не вимагав гладкості функції в околі кореня. Побудова такого методу розглядається в статті, використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [2] .

Побудова методу. Розглянемо алгебраїчне чи трансцендентне рівняння $f(x) = 0$. Припустимо, що на проміжку $[a,\, b]$ рівняння має єдиний корінь $x = \alpha$, причому $f(a)f(b) < 0$. Покладемо $\varphi(x) = f(x) + c$, де c – будь-яке число, для якого $\varphi(x) \geq A > 0$, $x \in [a,\, b]$. Тоді корінь рівняння $f(x) = 0$ буде і коренем рівняння $\varphi(x) = c$. Тому замість відшукання кореня рівняння $f(x) = 0$ можна знаходити корінь рівняння $\varphi(x) = c$.

Позначимо $y_a = \varphi(a)$, $y_b = \varphi(b)$ і для функції $y = \varphi(x)$ побудуємо некласичну мажоранту Ньютона $M_\varphi(x)$ за двома точками (a, y_a) і (b, y_b). Одержимо

$$M_\varphi(x) = \left(y_a^{b-x} y_b^{x-a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, x \in [a,\, b].$$

Прологарифмуємо рівняння $M_\varphi(x) = c$ і позначимо його корінь через x_1. Одержимо

$$\ln\left(y_a^{b-x_1} y_b^{x_1-a}\right)^{\frac{1}{b-a}} = \ln\, c,$$

або

$$\frac{b-x_1}{b-a}\ln\, y_a + \frac{x_1-a}{b-a}\ln\, y_b = \ln c,$$

$$b\ln\, y_a - a\ln\, y_b + x_1(\ln\, y_b - \ln\, y_a) = (b-a)\ln\, c.$$

Звідси

$$b\ln\left(\frac{y_a}{c}\right) - a\ln\left(\frac{y_b}{c}\right) = x_1\ln\left(\frac{y_a}{y_b}\right).$$

Отже,

$$x_1 = \frac{a \ln (y_b/c) - b \ln (y_a/c)}{\ln (y_b/y_a)}$$

або

$$x_1 = \frac{\underline{x}_0 \ln (\varphi(\bar{x}_0)/c) - \bar{x}_0 \ln (\varphi(\underline{x}_0)/c)}{\ln (\varphi(\bar{x}_0)/\varphi(\underline{x}_0))},$$

де $\underline{x}_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$.

Отже, ми одержимо значення x_1, яке виражає перше наближення кореня $x = \alpha$.

Для знаходження другого наближення кореня визначаємо проміжок $[\underline{x}_1, \bar{x}_1]$, на якому міститься корінь $x = \alpha$, тобто покладаємо $\underline{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_0$, якщо $f(x_1)f(\bar{x}_0) < 0$, або $\underline{x}_1 = \underline{x}_0$, $\bar{x}_1 = x_1$, якщо $f(x_1)f(\underline{x}_0) < 0$. Тоді друге наближення кореня $x = \alpha$ визначається за формулою

$$x_2 = \frac{\underline{x}_1 \ln (\varphi(\bar{x}_1)/c) - \bar{x}_1 \ln (\varphi(\underline{x}_1)/c)}{\ln (\varphi(\bar{x}_1)/\varphi(\underline{x}_1))}.$$

Взагалі, для знаходження $(n+1)$-го наближення кореня $(n \geq 1)$ матимемо формулу

$$x_{n+1} = \frac{\underline{x}_n \ln (\varphi(\bar{x}_n)/c) - \bar{x}_n \ln (\varphi(\underline{x}_n)/c)}{\ln (\varphi(\bar{x}_n)/\varphi(\underline{x}_n))}, \tag{1}$$

де $\underline{x}_n = x_n$, $\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1}$, якщо $f(x_n)f(\bar{x}_{n-1}) < 0$, або $\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1}$, $\bar{x}_n = x_n$, якщо $f(x_n)f(\underline{x}_{n-1}) < 0$.

Оскільки некласична мажоранта Ньютона $M_\varphi(x)$ на проміжку $[a,\, b]$ є опуклою функцією, то метод є найефективніший у випадку, коли функція $f(x)$ на проміжку $[a,\, b]$ є опуклою. В цьому випадку метод буде швидше збігатися, ніж метод хорд.

У випадку, коли функція $f(x)$ є опуклою на проміжку $[a,\, b]$, формула для послідовних наближень до кореня $x = \alpha$ буде простішою. Справді, нехай на $[a,\, b]$ функція $f(x)$ є опуклою і, наприклад, монотонно зростаючою. Тоді для знаходження $(n+1)$-го наближення кореня матимемо формулу

$$x_{n+1} = \frac{x_n \ln (\varphi(b)/c) - b \ln (\varphi(x_n)/c)}{\ln (\varphi(b)/\varphi(x_n))}, n = 0,\, 1,\, ..., \tag{2}$$

де $x_0 = a$, за умови, що $M_\varphi(x) \geq \varphi(x)$ для всіх $x \in [a,\, b]$. Якщо $M_\varphi(x) < \varphi(x)$ для всіх $x \in [a,\, b]$, то формула матиме вигляд (3).

$$x_{n+1} = \frac{a \ln (\varphi(x_n)/c) - x_n \ln (\varphi(a)/c)}{\ln (\varphi(x_n)/\varphi(a))}, n = 0,\, 1,\, ... \tag{3}$$

Покажемо, що в першому випадку існує такий окіл кореня, що якщо x_0 вибрати з цього околу, то послідовні наближення будуть збігатися до кореня $x = \alpha$.

Справді, розглянемо рівняння $x = \psi(x)$, де

$$\psi(x) = \frac{x \ln (\varphi(b)/c) - b \ln (\varphi(x)/c)}{\ln (\varphi(b)/\varphi(x))}.$$

Тоді

$$\psi'(x)=\frac{\left(\ln\,(\varphi(b)/c)-b\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)\,\ln\,(\varphi(b)/\varphi(x))+(x\,\ln\,(\varphi(b)/c)+b\,\ln\,(c/\varphi(x)))\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{\ln^2\,(\varphi(b)/\varphi(x))}.$$

При $x=\alpha$

$$\psi'(\alpha)=\frac{\left(\ln\,(\varphi(b)/c)-\frac{b}{c}\varphi'(\alpha)\right)\,\ln\,(\varphi(b)/c)+\frac{\alpha}{c}\ln\,(\varphi(b)/c)\,\varphi'(\alpha)}{\ln^2\,(\varphi(b)/c)}=$$

$$=\frac{\ln\,(\varphi(b)/c)-\frac{b}{c}\varphi'(\alpha)+\frac{\alpha}{c}\varphi'(\alpha)}{\ln\,(\varphi(b)/c)}=1-\frac{b-a}{c}\,\frac{\varphi'(\alpha)}{\ln\,(\varphi(b)/c)}.$$

Отже,

$$\psi'(\alpha)=1-\frac{b-a}{c\,\ln\,(\varphi(b)/c)}\,f'(\alpha).$$

Звідси випливає, що при

$$0<\frac{b-a}{c\,\ln\,(\varphi(b)/c)}\,f'(\alpha)<1,$$

або

$$b-a<c\frac{\ln\,(\varphi(b))-\ln\,c}{f'(\alpha)}$$

виконується умова $\psi'(\alpha)\leq k<1$. Число с можна вибрати так, що ця нерівність буде мати місце. Тому існує такий окіл кореня, що якщо x_0 вибрати з цього околу, то ітераційний процес

$$x_{n+1}=\psi(x_n), n=0,\,1,\,...,$$

буде збігатися.

Якщо покласти $c=1$, то формули (1), (2) і (3) приймуть відповідно такий вигляд

$$x_{n+1}=\frac{\underline{x}_n\,\ln\,(\varphi(\bar{x}_n))-\bar{x}_n\,\ln\,(\varphi(\underline{x}_n))}{\ln\,(\varphi(\bar{x}_n)/\varphi(\underline{x}_n))}, n=0,\,1,\,...;$$

$$x_{n+1}=\frac{x_n\,\ln\,\varphi(b)-b\,\ln\,\varphi(x_n)}{\ln\,(\varphi(b)/\varphi(x_n))}, n=0,\,1,\,...;$$

$$x_{n+1}=\frac{a\,\ln\,\varphi(x_n)-x_n\,\ln\,\varphi(a)}{\ln\,(\varphi(x_n)/\varphi(a))}, n=0,\,1,\,...$$

Приклади. У таблиці наведено результати чисельного розв'язування (розв'язок з точністю 10^{-6} та кількість ітерацій k) декількох рівнянь з використанням мажорантного методу (1), методу дотичних (Ньютона) і методу хорд. Функція $f(x)$ вибраних рівнянь на заданому проміжку є опуклою.

Рівняння, проміжок	x_0, c	Розв'язок з точністю 10^{-6}	Мажорантний метод	Метод дотичних	Метод хорд
$x - \sin x = 0,25$, [0.5, 2]	$x_0 = 2$, c= 1	1.171229	k=10	k=5	k=16
$2^x - x^2 - 1 = 0$, [4, 5]	$x_0 = 4$, c= 3	4.257462	k=4	k=5	k=15
$\frac{1}{x} - 2\ln x = 0$, [1; 2]	$x_0 = 1$, c= 2	1.421529	k=6	k=5	k=10
$x + e^x + e^{-3x} = 4$, [-1, 0]	$x_0 = -1$, c= 3	0.4454279	k=5	k=6	k=30

Одержані результати свідчать про ефективність запропонованого методу, особливо у випадку опуклості функції.

Висновки. Побудовано чисельний метод відшукання коренів алгебраїчних і трансцендентних рівнянь з використанням апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. Досліджено збіжність методу у випадку опуклості функції. Метод не вимагає гладкості функції в околі кореня рівняння.

1. *Цегелик Г.Г.* Цегелик Г. Г. Чисельні методи: підручник / Г. Г. Цегелик. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408с.
2. *Цегелик Г. Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г. Г. Цегелик. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190с.

Одержано 30.09.2013