УДК 519.217; 519.718; 519.837

**С. В. Антонюк** (Чернівецький нац. ун-т)

# СТІЙКІСТЬ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ З УСІЄЮ ПЕРЕДІСТОРІЄЮ

The stability of solutions of stochastic dynamic systems of random structure with unbounded memory is investigated in this article. Sufficient conditions for asymptotic stochastic stability, stability in probability and asymptotic mean square stability of solutions of considered system are obtained.

В роботі досліджується стійкість розв'язку стохастичної динамічної системи випадкової структури з усією передісторією. Знайдені достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості, стійкості за ймовірністю та асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язку розглядуваної системи.

**1. Постановка задачі.** Нехай $R^n$ – $n$-вимірний дійсний евклідовий простір і $1 \le p < \infty$. $X$ є простором попередньої історії, тобто простір $R^n \times D^p_\rho$, де $D^p_\rho$ – простір Скорохода [4] локально обмежених неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі, $\varphi : R^+ \to R^n$ таких, що

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty.$$

Норму в просторі $X$ введемо наступним чином [6]

$$\|\varphi\|_X \equiv \left( |\varphi(0)|^p + \int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds \right)^{1/p} \equiv \left( |\varphi(0)|^p + \|\varphi\|^p_\rho \right)^{1/p},$$

**Означення 1**. Функція $\rho : R^+ \to R^+$ називається *функцією із згладжуючою властивістю [6]*, якщо вона задовольняє таким умовам:

1) $\rho$ – сумовна в $R^+$;

2) для $\forall z \ge 0$: $K_1(z) \equiv ess\sup\limits_{s\in R^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \le K < \infty,\ K_2(z) \equiv ess\sup\limits_{s\in R^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty$;

3) $\rho > 0$ – строго додатна на $s \in (0, \infty)$;

4) $s\rho(s) \to 0$ коли $s \to \infty$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \ge 0\}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний базис; $\{\xi(t), t \ge 0\}$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y} = \{y_1, .., y_n\}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, A), A \subset \mathfrak{B}_Y$; $\{\eta_k, k \ge 0\}$ – ланцюг Маркова з значеннями в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на $k$-му кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $\{w(t), t \ge 0\} - R^n$-значний вінерів процес, узгоджений з потоком $\sigma$-алгебр $\{F_t, t \ge 0\}$.

Розглянемо дифузійну динамічну систему випадкової структури (ДДСВС) з усією передісторією

$$dx(t) = a\left(t, x^t, \xi\left(t\right)\right) dt + b\left(t, x^t, \xi\left(t\right)\right) dw(t) \tag{1}$$

з марковськими перемиканнями [2]

$$\Delta x\left(t\right)|_{t=t_k} = x\left(t_k\right) - x\left(t_k-\right) = g\left(t_k-,\ x^{t_k-}, \xi\left(t_k\right), \eta_k\right), \tag{2}$$

$$t_k \in S \equiv \left\{t_n \uparrow, n \in \mathbf{N}\right\}, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$$

і початковими умовами

$$\xi\left(t_0\right) = y \in Y,\ \ x^{t_0} = \varphi \in X,\ \ \eta_{k_0} = h. \tag{3}$$

Тут $a(t,\varphi) : R_+ \times X \to R^n$ – векторнозначний функціонал, вимірний за сукупністю змінних і при кожному $\varphi \in X$ локально обмежений по $t$; а $b(t,\varphi) : R_+ \times X \to M_n^n(R^n)$ – матричнозначний функціонал вимірний за сукупністю змінних і при кожному $\varphi \in X$ локально обмежений по $t$, а процес $x^t = (x(t), x_\rho^t)$, де

$$x_\rho^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s),\ t_0 \le s \le t; \\ \varphi(s-t),\ s > t. \end{cases}$$

Нехай при $t_0 \ge 0$, $X_{t_0}$ – простір вимірних випадкових процесів $\varphi(t)$, $t \le t_0$, таких, що $\varphi^{t_0} \in X$ з ймовірністю 1, і таких, що при кожному $t$, $\varphi(t)$ не залежить від приростів вінерового процесу $\{w(s) - w(t_0),\ s \ge t_0\}$. Початковий відрізок $\varphi$ в (6) належить $X_{t_0}$.

Позначимо через $\mathcal{R}_{t_0} \equiv \sigma\left\{\varphi(t)\left|t \le t_0\right.\right\}$, а через $\mathcal{R}_t \equiv \mathcal{R}_{t_0} \vee \mathcal{F}_t$.

Справедлива наступна лема [6]:

**Лема 1.** *Нехай при $t \ge t_0$ $\{x(\cdot)\}$ – $R_t$-прогресивно вимірний, без розривів другого роду, неперервний справа та функція $x^{t_0}(\cdot,\omega) \in X$ з ймовірністю 1.*

*Тоді для $t \ge t_0$ маємо, що $x^t \in X$ з ймовірністю 1, і процес $x^t$ - $\mathcal{R}_t$-прогресивно вимірний, без розривів другого роду та неперервний справа.*

**Означення 1**. Стохастичний процес $\{x(t) = x(t,\omega),\ t \in (-\infty, T]\}$ називається *сильним розв'язком* задачі (1)-(3), якщо $x(t)$ прогресивно вимірний відносно $\mathcal{R}_t$ при $t \le T$, відрізки траєкторій процесу $x^t \in X$ при $t \in [t_0, T]$, $x^{t_0} = \varphi$ м.н. і

$$x\left(t\right) = x\left(s\right) + \int_s^t a\left(\tau, x^\tau, \xi\left(\tau\right)\right) d\tau + \int_s^t b\left(\tau, x^\tau, \xi\left(\tau\right)\right) dw\left(\tau\right) \tag{4}$$

виконується з ймовірністю 1 для всіх $s \in \left[t_k, t_{k+1}\right), t \in \left(s, t_{k+1}\right)$ та для $t_k \ge t_0$:

$$x(t_k) = x(t_k-) + g(t_k-, x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \tag{5}$$

Припустимо, що

1) функціонали $a : R \times X \to R^n,\ b : R \times X \to M_n^n(R^n),\ g : R \times X \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to R^n$ вимірні за сукупністю змінних;

2) існує стала $L > 0$ така, що

$$|a(t,\varphi_1,y) - a(t,\varphi_2,y)| + |b(t,\varphi_1,y) - b(t,\varphi_2,y)| + \\ + |g(t,\varphi_1,y,h) - g(t,\varphi_2,y,h)| \le L \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X \tag{6}$$

для $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$, $\forall t \in [t_0, T]$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

3) існує стала $C > 0$

$$|a(t,\varphi,y)| + |b(t,\varphi,y)| + |g(t,\varphi,y,h)| \le C(1 + \|\varphi\|_X) \tag{7}$$

для $\forall \varphi \in X$, $\forall t \in [t_0, T]$ та $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$.

Тоді згідно [9] існує єдиний сильний розв'язок задачі (1)-(3) з точністю до стохастичної еквівалентності.

При $\xi(t_0) = y, \eta_{k_0} = h$ та $x^{t_0} = \varphi \in X$ позначимо через $x^t(s,\varphi,y,h), t \ge s$ історію процесу $x(t), t \in [t_0, \infty)$ на відрізку $[s,t]$.

Для спрощення викладок вважатимемо, що $\xi(t)$ – однорідний ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів. Згідно [3,10] $\{x^t(s), \xi(t)\}$ є марковським процесом, в якому випадкова складова $x(t) \in X$ характеризує зміни вектора стану системи, а $\xi(t)$ – випадкові зміни її структури з врахуванням ланцюга Маркова $\{\eta_k, k \ge 0\}$, що входить як аргумент у функцію відображення $g(\cdot,\cdot,\cdot,\eta_k)$. Цим і пояснюється означення системи (4) як системи випадкової структури.

**2. Основні означення стійкості розв'язків дифузійних динамічних систем випадкової структури зі всією передісторією**

Позначимо через $P_k((y,h), A \times B)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $\{\xi(t_k), \eta_k\}$ на $k$-му кроці:

$$P_k\left((y,h), A \times B\right) \equiv \; P\left(\xi(t_{k+1}) \in A, \eta(t_{k+1}) \in B | \xi(t_k) = y, \eta(t_k) = h\right),$$

при всіх $t_k \ge t_0, (y,h) \in \mathbf{Y} \times \mathbf{H}$

Далі введемо в розгляд функцію

$$P_k\left((x,y,h,), X \times A \times B\right) \equiv$$

$$P\left(x^{t_{k+1}}\left(t_k,\varphi,y_0,h_0\right) \in X_1, \xi(t_{k+1}) \in A, \eta(t_{k+1}) \in B |\right.$$

$$\left. x^{t_k}\left(t_{k-1},\varphi,y_0,h_0\right) = x, \xi(t_k) = y, \eta(t_k) = h\right),$$

при всіх $t_k \in S \bigcup \{t_0\}$, $k \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, $\varphi \in X$ і борелевих $A \subset \mathcal{B}_{\mathbf{Y}}, B \subset \mathcal{B}_{\mathbf{H}}$.

**Означення 2.** Дискретний оператор Ляпунова-Красовського $(lv_k)(\psi,y,h)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k(\psi,y,h) : X \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \to R$, $k \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, для ДДСВС (4) з зовнішніми марковськими перемиканнями (5) визначимо рівністю

$$(lv_k)\left(x,y,h\right) \equiv \int\limits_{X \times Y \times H} P_k\left(x,y,h\right)\left(dl \times du \times dz\right) v_k\left(l,u,z\right) - v_k\left(x,y,h\right).$$

**Означення 3.** Якщо $t_k = k\beta$ для всіх $k \in \mathbf{N}$ і при деякому $\beta > 0$ відображення $a$, $b$, $g$ не залежать від $t$, процес $\xi(t)$ і ланцюг Маркова $\eta_k$ однорідні, то систему (4)-(5) назвемо автономною.

У випадку автономної системи (4)-(5) можна нехтувати індексом $k$ в функції $P_k((x,y,h), X_1 \times A \times B)$ і дискретний оператор Ляпунова-Красовського слід визначити рівністю

$$(lv)(x,y,h) := \int\limits_{X \times Y \times H} P(x,y,h)(dl \times du \times dz)\, v(l,u,z) - v(x,y,h).$$

**Означення 4.** Функціоналом Ляпунова–Красовського для системи випадкової структури (4) назвемо послідовність невід'ємних функцій $v_k(\varphi, y, h)$, $k \geq 0$, для яких виконані умови:

1) при всіх $k \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in X$ визначений дискретний оператор Ляпунова–Красовського $(lv_k)(\varphi, y, h)$;

2) при $r \to \infty$

$$\bar{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k \in N, y \in Y \\ h \in H,\ \|\varphi\|_X \geq r}} v(\varphi, y, h) \to +\infty;$$

3) при $r \to 0$ маємо

$$\underline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k \in N, y \in Y \\ h \in H, \|\varphi\|_X \geq r}} v(\varphi, y, h) \to 0,$$

причому $\bar{v}(r)$і $\underline{v}(r)$– неперервні і монотонні.

Будемо досліджувати стійкість тривіального розв'язку системи (1)-(3)

**Означення 5.** Розв'язок задачі (1)-(3) назвемо:

– стійким за ймовірністю, якщо для $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з $\|\varphi\|_X < \delta$ випливає нерівність

$$P\left\{\sup_{T \geq t} \left\|x^t\right\|_X > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2 \tag{8}$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

– асимптотично стійким за ймовірністю, якщо $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з $\|\varphi\|_X < \delta$,

$$\lim_{T \to \infty} P\left\{\sup_{T \geq t} \left\|x^t\right\|_X > \varepsilon\right\} = 0 \tag{9}$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

–$p$-стійким ($p > 0$), якщо для $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що при $\|\varphi\|_X < \delta$

$$\mathbf{E}\left\|x^t\right\|_X < \varepsilon \tag{10}$$

при всех $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, **;**

– асимптотично $p$-стійким, якщо система $p$-стійка і існує таке $\delta > 0$, що з $\|\varphi\|_X < \delta$ випливає

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\left\|x^t\right\|_X^p = 0. \tag{11}$$

При $p$=2 маємо стійкість в середньому кадратичному (l.i.m.) (10) і асимптотичну стійкість в l.i.m. (11).

Якщо у відповідних означеннях покласти $\delta = +\infty$, то до відповідних означень стійкості додається термін "в цілому".

**3. Загальні теореми про стійкість розв'язків дифузійних динамічних систем випадкової структури зі всією передісторією**

Введемо позначення

$$|x(\cdot)|^*_{t_0}(t) \equiv \sup_{t_0 \le s \le t} |x(s)|$$

Одержимо спочатку оцінки розв'язку задачі (1)-(3) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$ по значенням розв'язку в точках $t_k, k \ge 0$.
При доведенні будемо використовувати сталі,що виникають в таких нерівностях

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i \right|^l \le k_l^{(m)} \sum_{i=1}^m |a_i|^l, \ l \ge 0, \tag{12}$$

$$\{a_i\} \subset R, \ m = 1, \ 2, \ 3, \ 4; \ k_l^{(m)} = m^{l-1} \vee 1.$$

А також нерівність Буххольдера-Девіса-Ганді [7]:

$$\mathbf{E} \left| \int_{t_0}^{\bullet} \psi(s) dw(s) \right|_{t_0}^{*l} (t) \le c_{l1} \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^{t} |\psi(s)|^2 ds \right)^{l/2} \tag{13}$$

для будь-яких $\mathcal{F}_t$-узгоджених процесів $\psi(t, \omega)$, таких, що $\int_0^T \psi^2(t) dt < \infty$ майже напевне.

**Лема 2.** *Нехай для ДДСВС виконується умова Ліпшица* (6) *і умова рівномірної обмеженості* (7).

*Тоді при всіх* $k \ge 0$ *для сильного розв'язку задачі Коші* (1)-(3) *має місце нерівність*

$$\begin{array}{c} \mathbf{E}\left\{ |x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(t_{k+1}) \right\} \le 15(1+2L^2) \left[ \mathbf{E} |x(\cdot)|^{*2}_{t_0}(t_k) + 2C^2(t_{k+1} - t_k) \right] \times \\ \times \exp\left\{ 5L^2((t_{k+1} - t_k)^2 + 4)(t_{k+1} - t_k) \right\} \end{array}. \tag{14}$$

***Доведення.*** При всіх $t \in [t_k, t_{k+1}), t_k > t_0$ з (4) легко одержати нерівність

$$|x(t)| \le |x(t_k)| + \int_{t_k}^{t} |a(\tau, x^\tau, \xi(\tau),) - a(\tau, 0, \xi(\tau))| d\tau + \int_{t_k}^{t} |a(\tau, 0, \xi(\tau))| d\tau +$$

$$+ \left| \int_{t_k}^{t} b(\tau, x^\tau, \xi(\tau)) - b(\tau, 0, \xi(\tau)) dw(\tau) \right| + \left| \int_{t_k}^{t} b(\tau, 0, \xi(\tau)) dw(\tau) \right|.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини одержаної нерівності, обчислимо sup від одержаного виразу. Використовуючи (12), (13), (6) та (7) матимемо

$$\mathbf{E}\left\{ |x(\cdot)|^{*2}_{t_k}(t_{k+1}) \right\} \psi(t, \omega) \le 5 \left[ E \left\| x^{t_k} \right\|_X^2 + 2C^2(t_{k+1} - t_k) + L^2\left( (t_{k+1} - t_k)^2 + 4 \right) \times \right.$$

$$\times \int\limits_{t_k}^{t} E\left\{|x(\cdot)|^2_{t_{k^*}}(\tau)/\mathcal{F}_{t_k}\right\} d\tau\Bigg].$$

Використовуючи нерівність Гронуолла [8], легко побачити, що

$$E\left\{|x(\cdot)|^2_{t_{k^*}}(t_{k+1})/\mathcal{F}_{t_k}\right\} \le 5\left[E\left\{\left|\left|x^{t_k}\right|\right|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\} + 2C^2(t_{k+1}-t_k)\right]\times$$

$$\times e^{5L^2\left((t_{k+1}-t_k)^2+4\right)(t_{k+1}-t_k)}. \tag{15}$$

При $t = t_{k+1}$ сильний розв'язок задачі (1)-(3)

$$x(t_{k+1}) = x(t_{k+1}-) + g(t_{k+1}-, x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})$$

задовольняє нерівність

$$E\{|x(t_{k+1})|^2/\mathcal{F}_{t_k}\} \le 3\left[E\{|x(t_{k+1}-)|^2/\mathcal{F}_{t_k}\} + E\{\left|\mathrm{g}\left(t_{k+1}, x^{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}\right)-\right.\right.$$

$$-\mathrm{g}\left(t_{k+1}, 0, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}\right)|^2/\mathcal{F}_{t_k}\} + E\left\{\mathrm{g}\left(t_{k+1}, 0, \xi(t_{k+1}-), \eta_{k+1}\right)|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\}] \le \tag{16}$$

$$\le 3\left[\left(1+2L^2\right)E\left\{|x(\cdot)|^2_{t_{k^*}}(t_{k+1})/\mathcal{F}_{t_k}\right\} + C^2\right].$$

Оскільки випадкова величина $|x(\cdot)|^*_{t_k}(t_{k+1})$ не залежить від подій $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_{t_k}$, то

$$E\left\{|x(\cdot)|^{*\,2}_{t_k}(t_{k+1})/\mathcal{F}_{t_k}\right\} = E\left\{|x(\cdot)|^{*\,2}_{t_k}(t_{k+1})\right\}.$$

Підставляючи (15) в (16), одержимо (13). Лема 1 доведена.

Надалі використовуватимемо наступне позначення

$$k_0 = \begin{cases} \sup\{k \in N : t_k \le t\},\ t \ge t_1, \\ 0,\ t \in [0, t_1) \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Нехай:*

1) *виконується умова Ліпшица* (6) *;*

2) *існують функціонали Ляпунова-Красовського такі, що в силу системи* (4) *виконується нерівність*

$$(lv_k)(\varphi, y, h) \le -a_k(\varphi, y, h) \tag{17}$$

$k \ge 0$, $\varphi \in X$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

3) *довжина інтервалів* $[t_k, t_{k+1})$ *не перевищує* $\Delta > 0$, $k \ge 0$.

*Тоді розв'язок задачі* (1)-(3) *асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому.*

***Доведення.*** Позначимо через $\mathcal{F}_{t_k}$ мінімальну $\sigma$-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t \in [t_0, t_k)$ і $\eta_n$ при $n \le k$. Тоді умовне математичне сподівання обчислимо за формулою [4]

$$E\left\{v_{k+1}\left(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}\right)\ /\ \mathcal{F}_{t_k}\right\} =$$

$$= \int\limits_{X\times Y\times H} P_k\left((\varphi, y, h)\left(dl\times dl\times dz\right) v_{k+1}\left(l,u,z\right)\right)\big|_{\varphi=x^{t_k}, y=\xi(t_k),\eta=\eta_k} \qquad (18)$$

Далі за означенням дискретного оператора Ляпунова-Красовського одержимо

$$E\left\{v_{k+1}\left(x^{t_{k+1}},\xi\left(t_{k+1}\right),\eta_{k+1}\right)\ / \ \mathcal{F}_{t_k}\right\} =$$
$$= v_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right) + \left(lv_k\right)\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right) \le \bar{v}\left(\left\|x^{t_k}\right\|_X\right) \qquad (19)$$

З леми 1 і властивостей функції $\bar{v}$ випливає існування умовного математичного сподівання.

Використовуючи (19), запишемо дискретний оператор Ляпунова-Красовського

$$\left(lv_k\right)\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right) = E\left\{v_{k+1}\left(x^{t_k},\xi\left(t_{k+1}\right),\eta_{k+1}\right)\ / \ \mathcal{F}_{t_k}\right\} -$$
$$-v_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right) \le -a_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right) \le 0. \qquad (20)$$

Тоді при $k \ge 0$ має місце

$$E\left\{v_{k+1}\left(x^{t_k},\xi\left(t_{k+1}\right),\eta_{k+1}\right)\ / \ \mathcal{F}_{t_k}\right\} \le v_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right)$$

А це означає, що послідовність випадкових величин $v_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right)$ представляє собою супермартингал відносно $\mathcal{F}_{t_k}$ [1].

Далі, взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (19), просумувавши по k від $n \ge k_0$ до $N$, матимемо

$$E\left\{v_{N+1}\left(x^{t_{N+1}},\xi\left(t_{N+1}\right),\eta_{N+1}\right)\right\} - E\left\{v_n\left(x^{t_n},\xi\left(t_n\right),\eta_n\right)\right\} =$$
$$= \sum_{k=n}^{N} E\left\{lv_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right)\right\} \le -\sum_{k=n}^{N} E\left\{a_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right)\right\} \le 0 \qquad (21)$$

Далі легко побачити

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\ge t_0}\left\|x^t(t_0,\varphi,y,h)\right\|_X > \varepsilon_1\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}\ \sup_{t_{k_0+n-1}\le t\le t_{k_0+n}}\left\|x^t(t_0,\varphi,y,h)\right\|_X > \varepsilon_1\right\} \le$$
$$\le P\left\{\sup_{n\in N} x^{t_{k_0+n-1}}\left(t_0,\varphi,y,h\right) > \varepsilon_1\right\} \le$$
$$\le P\left\{\sup_{n\in N} v_{k_0+n-1}\left(x^{t_{k_0+n-1}},\xi\left(t_{k_0+n-1}\right),\eta_{k_0+n-1}\right) \ge \bar{v}\left(\varepsilon_1\right)\right\} \qquad (22)$$

Якщо $\|x^{t_k}\| \ge r$, то

$$\sup_{k\ge k_0,\left\|x^{t_k}\right\|\ge r} v_k\left(x^{t_k},\xi\left(t_k\right),\eta_k\right) \ge \inf_{\substack{k\ge k_0,\, y\in Y\ ,\\ h\in H,\, \|\varphi\|\ge r}} v_k\left(\varphi,y,h\right) = \bar{v}\left(r\right).$$

Використовуючи нерівність для невід'ємних супермартингалів [5] для оцінки правої частини (21) маємо:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n\in N} v_{k_0+n-1}\left(x^{t_{k_0+n-1}},\xi\left(t_{k_0+n-1}\right),\eta_{k_0+n-1}\right) \ge \bar{v}\left(\varepsilon_1\right)\right\} \le$$

$$\leq \frac{1}{\bar{v}(\varepsilon_1)} v_{k_0}(\varphi, y, h) \leq \frac{\bar{v}(x^t)}{\bar{v}(\varepsilon_1)}. \tag{23}$$

Із врахуванням (23) нерівність (22) дає можливість гарантувати виконання означення (8) стійкості за ймовірністю в цілому.

З (19) випливає оцінка

$$E\left\{v_{N+1}\left(x^{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}\right)\right\} \leq$$

$$\leq v_{k_0}(\varphi, y, h) - \sum_{k=k_0}^{N} E\left\{a_k\left(x_{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right)\right\} \leq v_{k_0}(\varphi, y, h) \tag{24}$$

при всіх $N > k_0,\ y \in \mathbf{Y},\ h \in \mathbf{H},\ \varphi \in X.$

Зауважимо, що послідовність $a_k, k \geq 0$ представляє собою функціонали Ляпунова–Красовського. А отже, існують [1,11] неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\bar{a}(r)$, рівні нулю при $r = 0$ і такі, що

$$\underline{a}\left(\|\varphi\|_X\right) \leq a_k(\varphi, y, h) \leq \bar{a}\left(\|\varphi\|_X\right)$$

для $k \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{Y},\ h \in \mathbf{H},\ \varphi \in X.$

Таким чином із збіжності ряду в лівій частині (24) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} E\left\{\bar{a}\left(\left\|x^{t_k}(t_0, \varphi, y, h)\right\|_X\right)\right\}$$

для $\forall t_0 \geq 0,\ y \in \mathbf{Y},\ h \in \mathbf{H},\ \varphi \in X.$

Тоді, із врахуванням $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0) = 0$ одержимо

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^{t_k}(t_0, \varphi, y, h)\right\|_X = 0.$$

Звідси випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\bar{v}\left(\|x^{t_k}(t_0, \varphi, y, h)\|_X\right)$ при $k \to \infty$ для всіх $t_0 \geq 0,\ y \in \mathbf{Y},\ h \in \mathbf{H},\ \varphi \in X.$

Таким чином з властивостей функціоналу Ляпунова-Красовського невід'ємний супермартингал $v\left(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k\right)$ при $k \to \infty$ прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу $\xi(t, \omega)$ і послідовності $\eta_k$.

Далі, невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю з ймовірністю 1 [3].

Використовуючи лему 1 одержимо асимптотичну стійкість в за ймовірністю в цілому розв'язку задачі (1)-(3). Теорема 1 доведена.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1, причому функціонали Ляпунова-Красовського $\{v_k, k \geq 0\}$, $\{a_k, k \geq 0\}$ задовольняють нерівності*

$$c_1 |\varphi(0)|^2 \leq v_k(\varphi, y, h) \leq c_2 \|\varphi\|_X^2 \tag{25}$$

$$c_3 |\varphi(0)|^2 \leq a_k(\varphi, y, h) \leq c_4 \|\varphi\|_X^2, \tag{26}$$

*при деяких $c_i > 0,\ i = \overline{1,4}$ для всіх$\forall k \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{Y},\ h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{X}$.*

*Тоді розв'язок задачі (1)-(3) асимптотично стійкий в середньому квадратичному в цілому.*

***Доведення.*** Використовуючи (21) для $n = k_0$, в силу (25) легко одержати наступні нерівності

$$E\left\{\left\|x^{t_{N+1}}\right\|_X^2\right\} \le \frac{1}{c_1} E\left\{v_{N+1}\left(x^{t_{N+1}}, \xi\left(t_{N+1}\right), \eta_{N+1}\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_1} E\left\{v_{k_0}\left(\varphi, \xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\right)\right\} \le \frac{c_2}{c_1}\left\|\varphi\right\|_X^2$$

для всіх $N > k_0$, $\varphi \in X$ і початкових розподілах випадкового вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Звідси випливає стійкість в середньому квадратичному розв'язку задачі(1)-(3)

Використовуючи (21), (25) і (26) можна одержати нерівність

$$\sum_{k=k_0}^{N} E\left\{\left\|x^{t_{N+1}}\right\|_X^2\right\} \le \frac{1}{c_3}\sum_{k=k_0}^{N} E\left\{a_k\left(\varphi, \xi\left(t_k\right), \eta_k\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_3} E\left\{v_{k_0}\left(\varphi, \xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\right)\right\} \le \frac{c_2}{c_3}\left\|\varphi\right\|_X^2$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $E\{|x^{t_{N+1}}|_X^2\}$ для будь-яких початкових даних $x^{t_{k_0}} = \varphi$ і початковому розподілі випадкового вектора $\left\{\xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\right\}$.

Таким чином,

$$\lim_{k\to\infty} E\|x^{t_k}\|_X^2 = 0$$

при всіх $t_0 \ge 0$, що і доводить теорему 3.

**Наслідок 1.** Якщо виконуються умови теореми 2 і має місце нерівність (23), то розв'язок задачі Коші (1)-(3) стійкий в l.i.m. в цілому.


1. *Андреева Б.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.С.* Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 333 с.
2. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры – Екатеренбург: УГАПС, 1998. – 222 с.
3. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы – М.: Физматгиз, 1969. – 859 с.
4. *Гихман И.И. Скороход, А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения – Киев: Наукова думка, 1982. – 612 с.
5. *Korolyuk V.S., Limnios N.* Markov additive processes in a phase merging scheme//Theory Stochastic Processes. – 2002. – vol. 8, №24. – pp. 213 – 226.
6. *Mizel V. , Trutzer V.* Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability//Journal of Integral Equations . – 1984. – Vol.7. – pp. 1-72.
7. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic Differential equations – Sijthoff and Noodhoff, 1980. – 175 p.
8. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер – М.:Наука, 1977. – 352 с.
9. *Антонюк С.В. , Ясинский В.К.* Существование l-го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Вып. 4. – С.141-151.
10. *Антонюк С.В., Ясинский В.К.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений Ито-Скорохода со всей предысторией // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – Вып.1 – С. 126-135.


Одержано 10.10.2013