УДК 517.946+511.37

І. І. Волянська, В. С. Ільків (Нац. ун-т "Львівська політехніка“)

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ БЕЗТИПНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ

Two-point boundary value Dirichlet-type problem for linear partial differential equation with one spatial variable is considered. The unity theorem and existence theorems of the solution of problem in space $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{Q})$ are proved. Correctness after Hadamard of the problem is shown, which distinguishes it from an ill-conditioned after Hadamard problem with many spatial variables.

Розглянуто двоточкову крайову задачу типу Діріхле для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. Доведено теореми існування та єдиності розв'язку задачі у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{Q})$. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної задачі з багатьма просторовими змінними.

Вступ. В останні роки велика увага приділяється дослідженню коректності некласичних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, серед яких задачі типу Діріхле. Відомо, що для еліптичних рівнянь крайові задачі з даними по всій границі області досліджені дость добре [1–3]. У той же час задачі для безтипних рівнянь мало вивчені, а їх дослідження почалось порівняно недавно. Очевидно, це пов'язано з тим, що у загальному випадку, крайові задачі для нееліптичних рівнянь є некоректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків.

Коректність крайових задач типу Діріхле для рівнянь з частинними похідними досліджувалась у роботах багатьох авторів, зокрема [4–7].

У статті розглянуто крайову задачу типу Діріхле для безтипного диференціального рівняння з частинними похідними у двовимірній області. Подібна задача для рівняння з багатьма просторовими змінними є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від оцінки знизу малих знаменників [8]. Особливістю даної роботи є те, що на відміну від задачі у багатовимірній дійсній області, у задачі для диференціального рівняння з однією просторовою змінною відповідні вирази знизу вдалося оцінити сталими, що вказує на її коректність.

1. Постановка задачі. Позначимо через $\mathcal{Q}$ декартовий добуток відрізка $[0,T]$, де $T>0$, і відрізка $\mathcal{X}=[0,\pi]$, тобто $\mathcal{Q}=[0,T]\times\mathcal{X}$.

Введемо шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{X})\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{Q})\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\mathcal{X})$ — гільбертовий простір функцій $\gamma=\gamma(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k\sin kx$, причому $\gamma_k\in\mathbb{C}$, з нормою

$$\|\gamma\|_{\mathbf{H}_q(\mathcal{X})}=\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\tilde{k}^{2q}|\gamma_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}},\qquad \tilde{k}=\sqrt{1+k^2},$$

а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{Q})$, $n\in\mathbb{Z}_+$ — банахів простір функцій $u(t,x)$ таких, що функції $\dfrac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}$, $r=0,1,\ldots,n-1$, для кожного $t\in[0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{X})$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{Q})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{H^n_q(\Omega)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{H_{q-r}(\mathcal{X})}.$$

В області Ω розглянемо задачу для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \sum_{|s|\le n} a_{s_0,s_1} \frac{\partial^{2s} u}{\partial t^{2s_0} \partial x^{2s_1}} = 0, \tag{1}$$

$$M_l u = \left.\frac{\partial^{2l} u}{\partial t^{2l}}\right|_{t=0} = \varphi_l, \quad M_{n+l} u = \left.\frac{\partial^{2l} u}{\partial t^{2l}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+l}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\right|_{x=\pi} = 0, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

де $|s| = s_0 + s_1$, $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,x)$ – шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n-1}$ – задані функції змінної $x \in \mathcal{X}$.

Якщо виконується умова $u \in \mathbf{H}^{2n}_q(\Omega)$, то вірними є формули $Lu \in \mathbf{H}^0_{q-2n}(\Omega)$, $M_l u \in \mathbf{H}_{q-2l}(\mathcal{X})$ і $M_{n+l} u \in \mathbf{H}_{q-2(n+l)}(\mathcal{X})$ для $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Означення 1. *Під розв'язком задачі* (1)–(3) *будемо розуміти функцію* $u = u(t,x)$*, яка задовольняє рівняння* (1) *і умови* (2), (3) *та належить до простору* $\mathbf{H}^{2n}_q(\Omega)$.

Для існування розв'язку задачі (1)–(3) необхідно, щоб функції φ_l та φ_{n+l} належали до просторів $\mathbf{H}_{q-2l}(\mathcal{X})$, $\mathbf{H}_{q-2(n+l)}(\mathcal{X})$ при $l = 0, 1, \dots, n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком з означення розв'язку задачі та властивостей просторів $\mathbf{H}^n_q(\Omega)$ і $\mathbf{H}_q(\mathcal{X})$.

2. Побудова формального розв'язку. Теорема єдиності. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(t) \sin kx, \tag{4}$$

де коефіцієнти $u_k = u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Очевидно, що функція (4) задовольняє умови (3). Залишається визначити коефіцієнти $u_k(t)$ так, щоб ряд (4) задовольняв рівняння (1) та умови (2).

Підставляючи формулу (4) у рівняння (1) та умови (2), отримаємо, що функція $u_k(t)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ є розв'язком відповідної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння, а саме задачі:

$$\frac{d^{2n} u_k}{dt^{2n}} + \sum_{j=1}^{n} b_j(k) \frac{d^{2(n-j)} u_k}{dt^{2(n-j)}} = 0, \tag{5}$$

$$u_k^{(2l)}(0) = \varphi_{lk}, \quad u_k^{(2l)}(T) = \varphi_{n+l,k}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \tag{6}$$

де $b_j(k) = \sum\limits_{s_1=0}^{j} (-1)^{s_1} a_{n-j,s_1} k^{2s_1}$ — многочлени степеня не вище j, φ_{lk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_l, а $\varphi_{n+l,k}$ — коефіцієнти Фур'є функції φ_{n+l}.

Єдиність розв'язку u_k задачі (5), (6) у просторі $\mathbf{C}^{2n}[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1)–(3) у просторі $\mathbf{H}_q^{2n}(\mathcal{Q})$ для довільного $q \in \mathbb{R}$. Саме тому, якщо хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k = \hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (5), (6), то однорідна задача (1)–(3) також має нетривіальний розв'язок $u = \hat{u}(t,x)$, який визначається формулою $\hat{u}(t,x) = \hat{u}_k(t)\sin kx$ і розв'язок задачі (1)–(3) не може бути єдиним.

Для побудови розв'язку задачі (5), (6) у рівнянні (5) пронормуємо коефіцієнти $b_j(k)$, $j{=}0,1,\ldots,n$, і подамо їх у вигляді добутку $b_j(k){=}\tilde{k}^{2j}\tilde{b}_j(k)$. Функції $\tilde{b}_j(k)$, як і коефіцієнти $b_j(k)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,0}, a_{n-j,1}, \ldots, a_{n-j,j}$ і рівномірно обмежені за k. Очевидно, справджується нерівність

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \leq \sum_{s_1=0}^{j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \frac{|k|^{2s_1}}{\tilde{k}^{2j}} \leq \max_{s_1=0,1,\ldots,j} \left|a_{n-j,s_1}\right| \sum_{s_1=0}^{j} \frac{|k|^{2s_1}}{\tilde{k}^{2j}}.$$

Якщо коефіцієнти $a_{s_0,s_1}{\in}\mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$\left|\tilde{b}_j(0)\right| = \left|a_{n-j,0}\right| \leq A, \quad \left|\tilde{b}_j(\pm 1)\right| \leq (j+1)2^{-\frac{j}{2}} A \leq \frac{3}{2}A,$$

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \leq \frac{A}{\tilde{k}^{2j}} \frac{|k|^{2j+2}}{|k|^2-1} < \frac{A|k|^2}{|k|^2-1}, \quad k \notin \{-1,0,1\},$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(k)\right| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звіси випливає, що для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\pm\lambda_1(k), \ldots, \pm\lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \lambda^{2n} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\lambda^{2(n-j)}$$

виконуються нерівності [9]:

$$|\lambda_j(k)|^2 \leq 1 + \max\{|\tilde{b}_1|, \ldots, |\tilde{b}_n|\} \leq 1 + 2A. \tag{7}$$

Позначимо через $\mathbf{K}$ множину тих натуральних чисел k, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратний корінь.

У випадку різних коренів $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ з невід'ємними дійсними частинами, однорідне рівняння (5) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t}, \quad u_{k,n+j}(t) = e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \mathbf{K}.$$

Загальний розв'язок задачі (5), (6) подається у вигляді ряду

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(C_{kj}e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t} + C_{k,n+j}e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t}\right), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \mathbf{K}, \tag{8}$$

де C_{kj} та $C_{k,n+j}$ — довільні комплексні сталі, і належить до простору $\mathbf{C}^{2n}[0,T]$.

Якщо $u_k(t)$ — розв'язок задачі (5), (6), то числа C_{kj} та $C_{k,n+j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} (C_{kj} + C_{k,n+j}) = \varphi_{0k}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^2 (C_{kj} + C_{k,n+j}) = \varphi_{1k} \tilde{k}^{-2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^4 (C_{kj} + C_{k,n+j}) = \varphi_{2k} \tilde{k}^{-4}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^{2(n-1)} (C_{kj} + C_{k,n+j}) = \varphi_{n-1,k} \tilde{k}^{-2(n-1)}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left(C_{kj} e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} + C_{k,n+j} e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} \right) = \varphi_{nk}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^2 \left(C_{kj} e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} + C_{k,n+j} e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} \right) = \varphi_{n+1,k} \tilde{k}^{-2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^4 \left(C_{kj} e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} + C_{k,n+j} e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} \right) = \varphi_{n+2,k} \tilde{k}^{-4}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^{2(n-1)} \left(C_{kj} e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} + C_{k,n+j} e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} \right) = \varphi_{2n-1,k} \tilde{k}^{-2(n-1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Навпаки, якщо числа C_{kj} та $C_{k,n+j}$, де $j = 1, 2, \ldots, n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (9), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (8) є розв'язком задачі (5), (6).

Для знаходження невідомих C_{kj} та $C_{k,n+j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, запишемо систему (9) у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^4 & \ldots & \lambda_n^4 & \lambda_1^4 & \ldots & \lambda_n^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{2(n-1)} & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)} & \lambda_1^{2(n-1)} & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)} \\ e^{\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & e^{\lambda_n(k)\tilde{k}T} & e^{-\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & e^{-\lambda_n(k)\tilde{k}T} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n(k)\tilde{k}T} & \lambda_1^2 e^{-\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & \lambda_n^2 e^{-\lambda_n(k)\tilde{k}T} \\ \lambda_1^4 e^{\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & \lambda_n^4 e^{\lambda_n(k)\tilde{k}T} & \lambda_1^4 e^{-\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & \lambda_n^4 e^{-\lambda_n(k)\tilde{k}T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{2(n-1)} e^{\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)} e^{\lambda_n(k)\tilde{k}T} & \lambda_1^{2(n-1)} e^{-\lambda_1(k)\tilde{k}T} & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)} e^{-\lambda_n(k)\tilde{k}T} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \\ \ldots \\ C_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \tilde{k}^{-2} \\ \ldots \\ \varphi_{n-1,k} \tilde{k}_{-2(n-1)} \\ \varphi_{nk} \\ \varphi_{n+1,k} \tilde{k}^{-2} \\ \ldots \\ \varphi_{2n-1,k} \tilde{k}^{-2(n-1)} \end{pmatrix}$$

і зробимо розбиття матриць, враховуючи знак коренів $\pm\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Опустимо для спрощення індекс k та введемо такі позначення:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \ldots & \lambda_n^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{2(n-1)} & \lambda_2^{2(n-1)} & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)} \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(k)\tilde{k}T} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(k)\tilde{k}T} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n(k)\tilde{k}T} \end{pmatrix},$$

$$C^+ = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}, \; C^- = \begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_{n+2} \\ \ldots \\ C_{2n} \end{pmatrix}, \; \varphi^+ = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k}\tilde{k}^{-2} \\ \ldots \\ \varphi_{n-1,k}\tilde{k}^{-2(n-1)} \end{pmatrix}, \; \varphi^- = \begin{pmatrix} \varphi_{nk} \\ \varphi_{n+1,k}\tilde{k}^{-2} \\ \ldots \\ \varphi_{2n-1,k}\tilde{k}^{-2(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Тоді вихідне рівняння запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} W & W \\ WS & WS^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}.$$

Для визначення невідомих C^+ та C^- використаємо формулу

$$\begin{pmatrix} W & W \\ WS & WS^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & I \\ S & S^{-1} \end{pmatrix},$$

тоді $\begin{pmatrix} I & I \\ S & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^+ \\ C^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{-1}\varphi^+ \\ W^{-1}\varphi^- \end{pmatrix}$.

Позначимо $R_1 = W^{-1}\varphi^+$, $R_2 = W^{-1}\varphi^-$, тоді отримаємо лінійну систему

$$\begin{cases} C^+ + C^- = R_1, \\ SC^+ + S^{-1}C^- = R_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса та отримаємо такий результат:

$$\begin{cases} C^+ = R_1 - C^-, \\ SR_1 - SC^- + S^{-1}C^- = R_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} C^+ = R_1 - C^-, \\ C^- = (S^{-1} - S)^{-1}(R_2 - SR_1). \end{cases}$$

Запишемо R_1 у вигляді добутку $R_1 = (S^{-1} - S)^{-1}(S^{-1} - S)R_1$ та знайдемо розв'язок системи

$$\begin{cases} C^+ = (S^{-1} - S)^{-1}(S^{-1}R_1 - R_2), \\ C^- = (S^{-1} - S)^{-1}(R_2 - SR_1). \end{cases}$$

Враховуючи позначення R_1 і R_2, отримаємо формули для знаходження невідомих коефіцієнтів C^+ і C^-:

$$\begin{cases} C^+ = (S^{-1} - S)^{-1}(S^{-1}W^{-1}\varphi^+ - W^{-1}\varphi^-), \\ C^- = (S^{-1} - S)^{-1}(W^{-1}\varphi^- - SW^{-1}\varphi^+). \end{cases} \tag{10}$$

Позначимо через E^+ рядок експонент $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(k)\tilde{k}t} & e^{\lambda_2(k)\tilde{k}t} & \ldots & e^{\lambda_n(k)\tilde{k}t} \end{pmatrix}$, а через E^- — рядок $\begin{pmatrix} e^{-\lambda_1(k)\tilde{k}t} & e^{-\lambda_2(k)\tilde{k}t} & \ldots & e^{-\lambda_n(k)\tilde{k}t} \end{pmatrix}$, тоді $u_k(t) = C^+E^+ + C^-E^-$ за формулою (8).

Підставивши формули (10), отримаємо:

$$u_k(t) = (S^{-1} - S)^{-1}(S^{-1}W^{-1}\varphi^+ - W^{-1}\varphi^-)E^+ + (S^{-1} - S)^{-1}(W^{-1}\varphi^- - SW^{-1}\varphi^+)E^-.$$

Згрупуємо доданки біля векторів φ^+ і φ^-:
$u_k(t) = (S^{-1} - S)^{-1}(S^{-1}E^+ - SE^-)W^{-1}\varphi^+ + (S^{-1} - S)^{-1}(E^- - E^+)W^{-1}\varphi^-$.

Отже, у термінах коренів $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ розв'язок задачі (5), (6) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_k(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}t)}{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}T)} \cdot \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{n+l,k}\tilde{k}^{-2l} - \\ - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T))}{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}T)} \cdot \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{lk}\tilde{k}^{-2l}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\Delta(k) = \prod\limits_{1 \le r < q \le n} \big(\lambda_q^2(k) - \lambda_r^2(k)\big)$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(k)$ — його відповідні алгебричні доповнення, $j =, 1, \dots, n$, $l = 0, 2, \dots, n-1$.
З формули (4) формальний розв'язок задачі (1)–(3) подається у вигляді ряду:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}t)}{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}T)}\varphi_{n+l,k} - \frac{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T))}{\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}T)}\varphi_{lk}\right)\frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\tilde{k}^{-2l}\sin kx. \tag{12}$$

Для того, щоб задача (5), (6) мала єдиний класичний розв'язок для кожного $k \in \mathbb{N}\backslash\mathbf{K}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}T) \neq 0$ для $j = 1, \dots, n$. З цієї умови випливає, що $e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}\big(e^{-2\tilde{k}\lambda_j(k)T} - 1\big) \neq 0$. Оскільки $e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T} \neq 0$, то для виконання даної умови необхідно, щоб $e^{-2\tilde{k}\lambda_j(k)T} \neq 1$. Звідси випливає, що $-2\lambda_j(k)\tilde{k}T + 2\pi l \neq 0$ або $\lambda_j(k)\tilde{k}T - \pi l \neq 0$ для довільного $l \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином $\lambda_j(k) \neq \dfrac{\pi l}{\tilde{k}T}$ для довільних цілих додатних l і k.

У протилежному випадку, коли $\operatorname{sh}(\lambda_j(k)\tilde{k}T) = 0$ для деякого j, існує таке число $l \in \mathbb{Z}_+$, що корінь $\lambda_j(k)$ визначається за формулою: $\lambda_j(k) = \dfrac{\pi l}{\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність $\Big(\dfrac{\pi l}{\tilde{k}T}\Big)^{2n} + \sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(k)\Big(\dfrac{\pi l}{\tilde{k}T}\Big)^{2(n-j)} = 0$ чи еквівалентна їй рівність

$$1 + \sum_{j=1}^{n} b_j(k)k^jT^{2j}(\pi l)^{-2j} = 0. \tag{13}$$

Для кратних коренів ($k \in \mathbf{K}$) загальний розв'язок рівняння (5) також буде мати вигляд (8), в якому, залежно від кратності коренів $\lambda_j(k)$, замість числових коефіцієнтів C_{kj} та $C_{k,n+j}$ будуть многочленні коефіцієнти $C_{kj}(t)$, де $j = 1, \dots, 2n_1$, n_1— кількість кратних коренів. Розв'язність у цілих додатних числах l і k рівняння (10) є умовою неєдиності розв'язку задачі (5), (6) і за кратних коренів.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $\mathbf{H}_q^{2n}(\Omega)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (13) *не мало розв'язків у цілих додатних числах* l *і* k.

Доведення. *Необхідність.* Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^{2n}(\Omega)$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (5), (6) у просторі $\mathbb{C}^{2n}[0;T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ має єдиний розв'язок. Отже, $\Delta(k) \neq 0$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathbf{K}$, тобто $e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} \neq e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$ для $j=1,\ldots,n$. Отже, рівняння (10) не має розв'язків у цілих додатних числах l і k. Аналогічні нерівності отримуємо при $k \in \mathbf{K}$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай рівняння (13) має розв'язок для k^*, l^*. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\pi l^*}{\tilde{k}^* T}$, а однорідна задача (5), (6) має такі розв'язки: $e^{\tilde{k}^*\lambda_1(k)t} = e^{\pi l^* \frac{t}{T}}$, $e^{-\tilde{k}^*\lambda_1(k)t} = e^{-\pi l^* \frac{t}{T}}$. Звідси випливає, що задача (1)–(3) у просторі $\mathbf{H}_q^{2n}(\Omega)$ якщо має, то безліч розв'язків, оскільки $u^*(t,x) = \left(C_1 e^{\pi l^* \frac{t}{T}} + C_2 e^{-\pi l^* \frac{t}{T}}\right)\sin k^* x$, де C_1 і C_2— довільні комплексні сталі, є розв'язками відповідної однорідної задачі. Теорему доведено.

3. Оцінювання розв'язку. Теорема існування Для доведення належності розв'язку задачі (1)–(3) до простору $\mathbf{H}_q^n(\Omega)$ оцінимо абсолютну величину функцій $u_k(t)$ та їх похідних до порядку n для $t \in [0,T]$ і $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbf{K}$:

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right| \leq \frac{\tilde{k}^r}{|\Delta(k)|} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)| \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left|\lambda_j^r(k)\right| \left| \left(e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)} - (-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}\right)\right|}{\left|e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}\right|} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{l=0}^{n-1} \left|\tilde{k}^{-2l}\varphi_{lk}\right| + \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|\lambda_j^r(k)\right| \left| \left((-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t}\right)\right|}{\left|e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}\right|} \sum_{l=0}^{n-1} \left|\tilde{k}^{-2l}\varphi_{n+l,k}\right| \right).$$

Перетворимо дану нерівність до вигляду

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \leq n^3(1+2A)^{2r} \frac{\tilde{k}^{2r}}{|\Delta(k)|^2} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)|^2 \times$$
$$\times \left(\max_j \left| \frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)} - (-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}} \right|^2 + \max_j \left| \frac{(-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}} \right|^2 \right) \times \qquad (14)$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^{n-1} \left|\tilde{k}^{-2l}\varphi_{lk}\right|^2 + \sum_{l=0}^{n-1} \left|\tilde{k}^{-2l}\varphi_{n+l,k}\right|^2 \right).$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ — визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел λ_j, $j=1,\ldots,n$, то, враховуючи (7), справедливою буде оцінка:

$$|\Delta_{jl}(k)| \leq (n-1)!(1+2A)^{(n-1)^2/2}. \qquad (15)$$

Для подальшої оцінки $|u_k|$ розглянемо вираз $\prod\limits_{1 \leq r < q \leq n} \left(\lambda_q^2(k) - \lambda_r^2(k)\right)^2$. Позначимо $\mu(k) = \lambda^2(k)$. Тоді многочлен $P_k(\lambda)$ запишеться у вигляді $P_k(\lambda^2) = F_k(\mu) = \mu^n + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\mu^{(n-j)}$, і $\prod\limits_{1 \leq r < q \leq n} \left(\lambda_q^2(k) - \lambda_r^2(k)\right)^2 = \prod\limits_{1 \leq r < q \leq n} \left(\mu_q(k) - \mu_r(k)\right)^2$. Дискримінант $D(k)$ полінома $F_k(\mu)$ подамо двома способами:

$$D(k) = \prod_{1 \leq r < q \leq n} \left(\mu_q(k) - \mu_r(k)\right)^2 = \tilde{k}^{-n(n-1)} \prod_{1 \leq r < q \leq n} \left(\tilde{k}\mu_q(k) - \tilde{k}\mu_r(k)\right)^2,$$

$$D(k)=\pm\begin{vmatrix}
1 & \tilde b_1(k) & \ldots & \tilde b_{n-1}(k) & \tilde b_n(k) & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & \tilde b_{n-2}(k) & \tilde b_{n-1}(k) & \tilde b_n(k) & \ldots & 0\\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill}\\
0 & 0 & \ldots & \tilde b_1(k) & \tilde b_2(k) & \tilde b_3(k) & \ldots & \tilde b_n(k)\\
n & (n-1)\tilde b_1(k) & \ldots & \tilde b_{n-1}(k) & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & n & \ldots & 2\tilde b_{n-2}(k) & \tilde b_{n-1}(k) & 0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill}\\
0 & 0 & \ldots & n & (n-1)\tilde b_1(k) & (n-2)\tilde b_2(k) & \ldots & \tilde b_{n-1}(k)
\end{vmatrix},$$

де знак перед визначником визначається за формулою $(-1)^{(n-1)n/2}$.

Дискримінант $D(k)$ подамо у вигляді многочлена за змінною $k/\tilde k$:

$$D(k)=D_0\Big(\frac{k}{\tilde k}\Big)^{n(n-1)}+\tfrac{D_1}{\tilde k}\Big(\tfrac{k}{\tilde k}\Big)^{n(n-1)-1}+\tfrac{D_2}{\tilde k^2}\Big(\tfrac{k}{\tilde k}\Big)^{n(n-1)-2}+\ldots+\tfrac{D_{n(n-1)}}{\tilde k^{n(n-1)}}=$$
$$=\Big(\tfrac{k}{\tilde k}\Big)^{n(n-1)}\Big(D_0+\tfrac{D_1}{k}+\tfrac{D_2}{k^2}+\ldots+\tfrac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\Big), \tag{16}$$

де $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n(n-1)}$ — комплексні числа, які є многочленами від a_{s_0,s_1}, причому D_0 — дискримінат многочлена $\mu^n+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{n-j,j}\mu^{n-j}$ (цей многочлен будується за головною частиною рівняння (1)):

$$D_0=\pm\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0\\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill}\\
0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & a_{0,n}\\
n & (n-1)a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & n & \ldots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill}\\
0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \ldots & a_{1,n-1}
\end{vmatrix},$$

де знак визначаєть за формулою $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$, $D_{n(n-1)}$ — дискримінат многочлена $\mu^n+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{n-j,0}\mu^{n-j}$ (многочлен будується за коефіцієнтами біля чистих за t похідних).

У роботі [10], при $|k|\geq\dfrac{\tilde D_0}{|D_0|}$, де $\tilde D_0=2(|D_1|+|D_2|+\ldots+|D_{n(n-1)}|)$, у випадку, коли $D_0\neq 0$, доведено справедливість оцінки знизу модуля $D(k)$

$$|D(k)|\geq\frac{|D_0|}{2}\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt2}\Big)^{n(n-1)}=\big(\sqrt2\big)^{-n(n-1)-2}|D_0|, \quad . \tag{17}$$

Отримана оцінка є точною за k при $|k|\geq\dfrac{\tilde D_0}{|D_0|}$, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення дискримінанта $D(k)$, має такий вигляд $|D(k)|\leq\dfrac{3}{2}|D_0|$.

З оцінки (17) випливає також скінченність множини $\mathbf{K}$.

У формулі (14) залишається оцінити зверху наступні дроби

$$\frac{e^{\tilde k\lambda_j(k)(t-T)}-(-1)^r e^{-\tilde k\lambda_j(k)(t-T)}}{e^{-\tilde k\lambda_j(k)T}-e^{\tilde k\lambda_j(k)T}},\qquad \frac{(-1)^r e^{-\tilde k\lambda_j(k)t}-e^{\tilde k\lambda_j(k)t}}{e^{-\tilde k\lambda_j(k)T}-e^{\tilde k\lambda_j(k)T}}.$$

Для цього використаємо такі дві формули: $\left|e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\right| = e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)t} \le \max\left\{1, e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}\right\}$ та $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j| \to \infty$ при $|k| \to \infty$. Очевидно, що треба довести лише другу формулу.

Враховуючи заміну $\lambda^2 = \mu$, з рівності $2\mathrm{Re}\mu_j(k) = \mu_j(k) + \bar{\mu}_j(k) = \mu_j(k) - (-\bar{\mu}_j(k))$ і того, що $-\bar{\mu}_1(k), \ldots, -\bar{\mu}_n(k)$ є коренями многочлена $F_{1k}(\mu) = \prod\limits_{j=1}^{n}(\mu + \bar{\mu}_j(k)) = \mu^n + \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{-j}\bar{\tilde{b}}_j(k)\mu^{n-j}$, отримаємо, що числа $2\mathrm{Re}\,\mu_j(k)$ є множниками результанта $R(k) = \prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{l=1}^{n}(\mu_j(k) - (-\bar{\mu}_l(k)))$ многочленів F_k та F_{1k}. Цей результант дорівнює такому визначнику:

$$R(k) = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \ldots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{\tilde{b}}_2(k) & -\bar{\tilde{b}}_3(k) & \ldots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k). \end{vmatrix}$$

Для довільного $j = 1, \ldots, n$ оцінимо модуль даного результанта зверху

$$|R(k)| \le 2^{n^2}(1 + 2A)^{2(n^2-1)}|\mathrm{Re}\,\mu_j|.$$

Для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(k) = \Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\Big(R_0 + \frac{R_1}{k} + \frac{R_2}{k^2} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2}}\Big), \quad k \ne 0, \tag{18}$$

де R_0 дорівнює такому визначнику:

$$R_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & 0 \\ 1 & -\bar{a}_{n-1,1} & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{a}_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{a}_{n-1,1} & -\bar{a}_{n-2,2} & -\bar{a}_{n-3,3} & \ldots & (-1)^n\bar{a}_{0,n} \end{vmatrix},$$

і у випадку $R_0 \ne 0$ маємо добуток

$$R(k) = \frac{R_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\Big(2 + \frac{2}{kR_0}\Big(R_1 + \frac{R_2}{k} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2-1}}\Big)\Big).$$

Якщо $k \in \mathbb{Z}$ і $|k| \ge \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $\tilde{R}_0 = 2(|R_1| + |R_2| + \ldots + |R_{n^2}|)$, то справджується нерівність $|R(k)| \ge \dfrac{|R_0|}{2}\Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n^2} \ge (\sqrt{2})^{-n^2-2}|R_0|$.

З останніх нерівностей випливає, що
$\tilde{k}^2|\mathrm{Re}\,\mu_j(k)| \geq \tilde{k}^2 \cdot 2^{-n^2}(1+2A)^{2(1-n^2)}|R(k)| \geq \tilde{k}^2 \cdot (\sqrt{2})^{-3n^2-2}(1+2A)^{2(1-n^2)}|R_0| = \tilde{k}^2 C \to \infty$, при $\tilde{k} \to \infty$.

Отже, $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)| \to \infty$ при $|k| \to \infty$, оскільки з $\tilde{k} \to \infty$ випливає $|k| \to \infty$ і виконуються нерівності $|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)|^2 \geq |\mathrm{Re}\,\mu| > C \to \infty$. З вище наведених оцінок отримаємо, що $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)| \geq \tilde{k} \cdot (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}n^2-1}(1+2A)^{1-n^2}|R_0|$.

Перейдемо до оцінки дробів

$$\frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)} - (-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}}, \ \frac{(-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T} - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}},$$

при $\tilde{k} \geq \dfrac{M_1}{|R_0|}$ і $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $M_1 = \dfrac{\ln 2}{T}(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}n^2-1}(1+2A)^{n^2-1}$, враховуючи при цьому знак $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)$ та парність r.

Якщо $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) > 0$ і r — парне, то на відрізку $[0,T]$ справджуються оцінки

$$\left|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} - e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| = \left|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}\left(e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} - 1\right)}{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}\left(e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1\right)}\right| \leq$$

$$\leq e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\tilde{k}t}\left|\frac{e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} - 1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1}\right| \leq \left|\frac{e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} - 1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1}\right| \leq 4;$$

$$\left|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}t} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| = \left|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}t}\left(e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}t} - 1\right)}{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}\left(e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1\right)}\right| \leq$$

$$\leq e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\tilde{k}(T-t)}\left|\frac{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}t} - 1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1}\right| \leq \left|\frac{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}t} - 1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1}\right| \leq 4.$$

Аналогічно, у випадку, коли $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) < 0$ і r — парне на $[0,T]$ виконуються такі нерівності:

$$\left|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} - e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| = \left|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}\left(1 - e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}\right)}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}\left(1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}\right)}\right| \leq$$

$$\leq e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\tilde{k}t}\left|\frac{1 - e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| \leq \left|\frac{1 - e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| \leq 4;$$

$$\left|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}t} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| = \left|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}t}\left(1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}t}\right)}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}\left(1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}\right)}\right| \leq$$

$$\leq e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\tilde{k}(T-t)}\left|\frac{1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| \leq \left|\frac{1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{1 - e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| \leq 4.$$

Якщо ж $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) > 0$ і r — непарне, то на відрізку $[0,T]$ матимемо такі оцінки

$$\left|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} + e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T} - e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\right| = \left|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}\left(e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} + 1\right)}{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}\left(e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1\right)}\right| \leq$$

$$\leq e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\tilde{k}t}\left|\frac{e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} + 1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1}\right| \leq \left|\frac{e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)} + 1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T} - 1}\right| \leq 4;$$

$$\Big|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}t}+e^{\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}-e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| = \Big|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}t}\big(e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}t}+1\big)}{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}\big(e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T}-1\big)}\Big| \leq$$

$$\leq e^{-\operatorname{Re}\lambda_j(k)\tilde{k}(T-t)}\Big|\frac{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}t}+1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T}-1}\Big| \leq \Big|\frac{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}t}+1}{e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}T}-1}\Big| \leq 4,$$

У випадку, коли $\operatorname{Re}\lambda_j(k) < 0$ і r — непарне на $[0,T]$ справедливими будуть нерівності

$$\Big|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}+e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}-e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| = \Big|\frac{e^{\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}\big(1+e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}\big)}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}\big(1-e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}\big)}\Big| \leq$$

$$\leq e^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)\tilde{k}t}\Big|\frac{1+e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{1-e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| \leq \Big|\frac{1+e^{-2\lambda_j(k)\tilde{k}(t-T)}}{1-e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| \leq 4;$$

$$\Big|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}t}+e^{\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}-e^{\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| = \Big|\frac{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}t}\big(1+e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}t}\big)}{e^{-\lambda_j(k)\tilde{k}T}\big(1-e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}\big)}\Big| \leq$$

$$\leq e^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)\tilde{k}(T-t)}\Big|\frac{1+e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{1-e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| \leq \Big|\frac{1+e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}t}}{1-e^{2\lambda_j(k)\tilde{k}T}}\Big| \leq 4.$$

Враховуючи вище наведені оцінки, при $\tilde{k} \geq \dfrac{M_1}{|R_0|} = \dfrac{(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}n^2-1}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}\ln 2$ і $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$ для виразів $\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}-(-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T}-e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}}$, $\dfrac{(-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t}-e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T}-e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}}$ справедливими будуть такі оцінки:

$$\frac{e^{\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}-(-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)(t-T)}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T}-e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}} \leq 4, \qquad \frac{(-1)^r e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)t}-e^{\tilde{k}\lambda_j(k)t}}{e^{-\tilde{k}\lambda_j(k)T}-e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}} \leq 4. \tag{19}$$

З нерівностей (14), (15), (17) і (19) для всіх $t \in [0,T]$ випливає оцінка розв'язку задачі (5), (6) та його похідних до порядку $2n$

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq \frac{\tilde{C}_{00}}{|D_0|}\Big(\sum_{l=0}^{n-1}|\tilde{k}|^{2r-4l}|\varphi_{lk}|^2+\sum_{l=0}^{n-1}|\tilde{k}|^{2r-4l}|\varphi_{n+l,k}|^2\Big),\ k\in\mathbb{N}\backslash\mathbf{K}_{00}, r=0,1,\ldots,n, \tag{20}$$

де $\tilde{C}_{00} = \tilde{C}_{00}(A,n) > 0$, $\mathbf{K}_{00}$ — множина цілих чисел k, для яких справедлива нерівність $|k| \leq \max\Big(\dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big)$ або нерівність $\tilde{k} \leq \max\dfrac{M_1}{|R_0|}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
(I) $D_0 \neq 0$;
(II) $R_0 \neq 0$;
(III) *для всіх* $k \in \mathbf{K}_{00}$ *рівняння* (13) *не має розв'язків у цілих числах* l;
а також $\varphi_0 \in \mathbf{H}_q(\mathcal{X})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1}(\mathcal{X})$,..., $\varphi_{2n-1} \in \mathbf{H}_{q-2n+1}(\mathcal{X})$. *Тоді існує лише один розв'язок задачі* (1)–(3), *який належить до простору* $\mathbf{H}_q^{2n}(\Omega)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}$ *умов* (2).

Доведення. За умов (I) і (II) справджується оцінка (21) розв'язку u_k задачі (5), (6) для $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbf{K}_{00}$. Якщо ж $k \in \mathbf{K}_{00}$, то розв'язок u_k існує та належить до простору $\mathbb{C}^{2n}[0,T]$ за умовою (III).

З формули (12), нерівності (20) та зі скінченності множини $\mathbf{K}_{00}$ випливає оцінка зверху квадрата норми розв'язку задачі (1)–(3):

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^{2n}_q(\mathcal{Q})} \le \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \sum_{k\in\mathbf{K}_{00}} \left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \tilde{k}^{2(q-r)} +$$
$$+\frac{\tilde{C}_{00}}{|D_0|} \sum_{r=0}^{n} \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbf{K}_{00}} \tilde{k}^{2(q-r)} \Big(\sum_{l=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2r-4l} |\varphi_{lk}|^2 + \sum_{l=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2r-4l} |\varphi_{n+l,k}|^2 \Big) \le \tag{21}$$
$$\le \frac{C_0}{|D_0|} \Big(\sum_{l=0}^{n-1} \|\varphi_l\|^2_{\mathbf{H}_{q-2l}(\mathcal{X})} + \sum_{l=0}^{n-1} \|\varphi_{n+l}\|^2_{\mathbf{H}_{q-2(n+l)}(\mathcal{X})} \Big),$$

де додатна величина C_0 залежить лише від коефіцієнтів a_{s_0,s_1} рівняння (1), а також від чисел A та n. Теорему доведено.

Висновки. У роботі розглянуто крайову задачу типу Діріхле за часовою змінною t для диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами у двовимірній області. Введено шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{X})\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{Q})\}_{q\in\mathbb{R}}$. Побудовано явну формулу для розв'язку задачі у вигляді ряду. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі у шкалі просторів $\{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{Q})\}$ при належності правих частин умов (2) функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}$ шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{X})\}$. Проведено аналіз оцінок знизу малих знаменників та показано, що на відміну від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими змінними $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, задача з однією змінною є коректною.

1. *Бицадзе А.В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – 3, вып. 6. – С. 211–212.
2. *Виноградов В.С.* О задаче Дирихле для многомерных эллиптических систем второго порядка // Докл. АН СССР. – 1968. – 179, №4. – С. 766–767.
3. *Шевченко В.И.* Эллиптические системы трех уравнений с четырьмя неизвестными // Докл. АН СССР. – 1975. – 221, №5. – С. 1050–1052.
4. *Dunninger D., Zachmanoglou E.* The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J. Math. and Mech. – 1969. – 18, №8. – p. 763–766.
5. *Пташник Б.Й.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1970. – 22, №6. – С. 841–848.
6. *Papi Frosali G.* On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation // Ann. Scuola norm. super, Pisa Cl. sci. – 1979. – 6, №4 – p. 719–728.
7. *Бурский В.П., Буряченко Е.А.* Некоторые вопросы существования нетривиального решения одно- родной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – 74, №4. – С. 1032–1043.
8. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Мир, 1976. – 624 с.
10. *Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ в комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – 10. – С. 15–26.

Одержано 28.10.2013