УДК 512.64+512.547

В. М. Бондаренко, И. В. Литвинчук (Институт математики НАН Украины, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка)

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РАЗМЕРНОСТИ $m < 4$ ГРУППЫ $(2, 2, \dots 2)$, ИМЕЮЩИХ ПОСТОЯННЫЙ РАНГ

In 2008 J. F. Carlson, E. M. Friedlander and J. Pevtsova introduced, for finite groups and fields of positive characteristic, the concept of the modules of constant rank, constant Jordan type, etc., which can be naturally reformulated in term of matrix representations. The case of elementary abelian groups is one of the main in this new theory and a number of works are devoted to him. In particular, in previous works the authors described the matrix representation of the group $(2, 2)$ of constant Jordan type and proved that the problem of the description of such representations for an elementary abelian 2-group of order more than four is wild. In this article, for all such abelian groups, we study matrix representation of small orders that have constant Jordan type or constant rank (these two conditions are equivalent in this case).

У 2008 році Д.Ф. Карлсон, Е.М. Фрідлендер і Ю. Пєвцова ввели, для скінченних груп і полів додатної характеристики, поняття модулів постійного рангу, постійного жорданового типу, тощо, які природнім чинном можна переформулювати на мові матричних зображень. Випадок елементарних абелевих груп є одним із основних у цій новій теорії і йому присвячего низка робіт. Зокрема, у попередніх роботах автори описали матричні зображення групи $(2, 2)$ постійного жорданого типу та довели, що задача про опис таких зображень для елементарної абелевої 2-групи порядку більшого ніж чотири є дикою. У цій статті для всіх таких абелевих груп вивчаються матричні зображення малих порядків, що мають постійний жордановий тип або постійний ранг (ці дві умови еквівалентні у цьому випадку).

Введение. В этой работе изучаются модули постоянного жорданового типа элементарных абелевых групп.

Мы будем пользоваться определениями и результатами работы [1], написанной под влиянием работы Д.Ф. Карлсона, Е.М. Фридлендера и Ю. Певцовой [2], в которой для конечной группы и поля положительной характеристики вводятся и изучаются модули постоянного жорданового типа. В [1] (в отличии от [2]) рассматриваются не только представления групп, а и другие матричные задачи (без ограничения на характеристику поля). Однако в этой статье мы ограничимся стандартным в смысле работы [2] случаем, рассматривая при этом произвольную элементарную абелеву группу

$$G_n = (2, 2, \dots, 2) \text{ (n прямых множителей)}$$

и алгебраически замкнутое поле k характеристики 2, причем вместо модулей рассматриваются соответствующие им матричные представления (которые часто будут называться просто представлениями).

Матричное представление этой группы будем отождествлять с набором матриц

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n),$$

соответствующих стандартным образующим $g_1, g_2, \dots, g_n$ группы G_n; тогда $A_1^2 = A_2^2 = \dots = A_n^2 = E$ и $A_iA_j = A_jA_i$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, где E обозначает единичную матрицу. Матричное представление A называется *представлением постоянного ранга*, если ранг матрицы

$$\alpha_1(E + A_1) + \alpha_2(E + A_2) + \dots + \alpha_s(E + A_n)$$

не зависит от выбора элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ поля k, среди которых есть хотя бы один ненулевой. Очевидно, что в этом случае жорданова форма этой матрицы также не зависит от выбора элементов поля.

Хорошо известно (и это легко доказать), что свойство матричного представления группы G_n быть представлением конечного ранга не зависит от выбора образующих группы.

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Матричные представления $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ размерности $m < 4$ группы G_n, $n > 1$, над полем k характеристики 2, имеющие постоянный ранг, исчерпываются (с точностью до эквивалентности) следующими представлениями:*

1) *$n \geq 2$, $m = 1, 2, 3$ и $A_1 = E_m$, $A_2 = E_m, \dots, A_n = E_m$, где E_m — единичная матрица размера $m \times m$;*

2) *$n = 2$ $m = 3$ и*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3) *$n = 2$ $m = 3$ и*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом неразложимыми являются все представления, кроме представлений вида 1) при $m > 1$.

Заметим, что мы не рассматриваем случай $n = 1$, так как все представления (циклической) группы G_1 являются представлениями постоянного ранга.

1. Предварительные сведения. Через E_i будем обозначать, как обычно, единичную матрицу размера $i \times i$;

В работе [3] авторами доказано, что задача об описании представлений постоянного ранга группы G_n (над полем k характеристики 2) не является дикой тогда и только тогда, когда $n < 3$. Случай $n = 1$ тривиальный (см. выше), а в случае $n = 2$ неразложимые представления описываются следующей теоремой (теорема 5 [1]).

Теорема 2. *Представления группы G_2 (над алгебраически замкнутым полем k характеристики 2) вида*

a) $\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

b) $$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\qquad a\to\left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s\ \ \overline{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),\qquad b\to\left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0}\ \ E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

$$d)\qquad a\to\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),\qquad b\to\left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

где $s \geq 1$, *образуют полную систему неразложимых попарно неэквивалентных представлений постоянного ранга.*

Следствие 1. *Матричные представления размерности* $m < 4$ *группы* G_2 *над полем* k *(характеристики 2), имеющие постоянный ранг, исчерпываются, с точностью до эквивалентности, следующими представлениями* $A = (A_1, A_2)$*:*

a') $m = 1, 2, 3$ *и* $A_1 = E_m$, $A_2 = E_m$;

b') $m = 3$ *и*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

c') $m = 3$ *и*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующая лемма (для матриц над произвольным полем).

Лемма 1. *Пусть*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

коммутирующие между собой матрицы, причем C *— нильпотентна матрица ранга* 1. *Тогда*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_{12}c_{23} = 0$.

Доказательство. Обозначим через $(i.j)$ скалярное равенство, которое получается из матричного равенства $BC = CB$ приравниванием элементов матриц BC и CB, стоящих на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

Легко видеть, что эти равенства имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lll} c_{31} = 0 \ (1.1); & c_{32} = 0 \ (1.2); & c_{33} = c_{11} \ (1.3); \\ 0 = 0 \ (2.1); & 0 = 0 \ (2.2); & 0 = c_{21} \ (2.3); \\ 0 = 0 \ (3.1); & 0 = 0 \ (3.2); & 0 = c_{31} \ (3.3). \end{array}$$

Отсюда имеем, что

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{11} \end{pmatrix}.$$

Поскольку C — нильпотентная матрица, то $c_{11} = c_{22} = 0$, а поскольку ранг C равен 1, то $c_{12}c_{23} = 0$.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Через $\overline{M}$, где M — матрица размера $m \times m$, будем обозначать матрицу $M + E_m$.

Очевидно, что если матричное представление группы G_n имеет постоянный ранг, то его ограничение на любую неединичную подгруппу $H \subset G_n$, порожденную некоторыми g_i, также имеет постоянный ранг. Тогда в силу следствия 1 для представлений группы G_n имеем:

1) если $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ — представление постоянного ранга размерности $m < 4$, то $m = 1$ или $m = 3$;

2) если $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ — представление постоянного ранга размерности $m < 4$ и при этом $A_i = E_m$ для некоторого i, то $A_i = E_m$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$;

3) если $n > 2$ и $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ — представление постоянного ранга размерности 3 такое, что его ограничение на подгруппу $G_{12} = \{g_1, g_2\}$ эквивалентно представлению вида $b')$ (соответственно $c')$), то ограничение A на любую подгруппу $G_{ij} = \{g_i, g_j\}$, $i \neq j$, также эквивалентно представлению вида $b')$ (соответственно $c')$).

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что группа G_3 не имеет матричного представления постоянного ранга, ограничение которого на подгруппу $G_{12} = \{g_1, g_2\}$ имеет вид $b')$ или $c')$).

Предположим противное и рассмотрим сначала случай, когда существует представление $A = (A_1, A_2, A_3)$ группы G_3 такое, что его ограничение (A_1, A_2) на подгруппу G_{12} равно $b')$. Тогда

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 при $B = \overline{A_2}$, $C = \overline{A_3}$ имеем, что

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{12}a_{23} = 0$.

Далее, из равенства $\overline{A_1}\,\overline{A_3} = \overline{A_3}\,\overline{A_1}$ имеем (учитывая новый вид матрицы $\overline{A_3}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $a_{23} = 0$. Значит

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тогда матрица $a_{12}\overline{A_1} + a_{13}\overline{A_2} + \overline{A_3}$ является нулевой, что противоречит тому, что представление A имеет постоянный ранг.

Предположим теперь, что существует представление $A = (A_1, A_2, A_3)$ группы G_3 такое, что его ограничение (A_1, A_2) подгруппу G_{12} равно c'). Тогда

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 при $B = \overline{A_1}$, $C = \overline{A_3}$ имеем, что

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{12}a_{23} = 0$.

Далее, из равенства $\overline{A_2}\ \overline{A_3} = \overline{A_3}\ \overline{A_2}$ имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $a_{12} = 0$. Значит

$$\overline{A_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тогда матрица $a_{13}\overline{A_1} + a_{23}\overline{A_2} + \overline{A_3}$ является нулевой, что противоречит тому, что представление A имеет постоянный ранг.

Вторая часть теоремы 1 следует из теоремы 2.

1. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. – 2012, 23, №1. – С. 19-27.
2. *Carlson, J. F., Friedlander E. M., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. 191–234.
3. *Bondarenko V.M., Lytvynchuk I. V.* The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Algebra Discrete Math. — 2012. – 14, №1. – p. 29–36.

Получено 07.10.2013