

УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕГЛАДКИХ ЛОГАРИФМІЧНО ОПУКЛИХ ФУНКІЙ

The numerical method of finding of the extremum nonsmooth logarithmically convex functions is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian minorant and diagrams functions which are given discretely. The algorithm of the method converges at any starting approximation.

Розглянуто використання апарату некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, для побудови чисельного методу відшукання абсолютноого екстремуму довільних логарифмічно опуклих функцій. Збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення.

Вступ. Задача відшукання екстремуму є однією з важливих задач прикладної математики. Така задача виникає, наприклад, у теорії апроксимації, при розв'язуванні відповідних задач дослідження операцій, у застосуваннях теорії керування рухом динамічних систем та ін. В [1] побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Встановлено умови існування мінорант Ньютона та вивчено властивості. В даній роботі розроблено алгоритми для оптимізації логарифмічно опуклих функцій однієї та двох дійсних змінних, в основі яких лежить використання апарату некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично.

1. Алгоритм відшукання абсолютноого екстремуму негладких логарифмічно опуклих функцій однієї дійсної змінної на заданому проміжку. Нехай $f(x)$ є логарифмічно опукла функція на проміжку $[a, b]$. Припустимо, що $f(x) > 0$. Побудуємо алгоритм відшукання мінімуму цієї функції, використовуючи властивості некласичних мінорант Ньютона функцій, заданих таблично.

Виберемо на проміжку $[a, b]$ систему точок x_0, x_1, \dots, x_n , де $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $h = (b - a)/n$, і знайдемо значення функції $y = f(x)$ в цих точках. Нехай

$$f(x_i) = a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Оскільки $f(x)$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a, b]$, то числові нахили діаграми міноранти Ньютона, побудованої за значеннями функції в точках x_0, x_1, \dots, x_n , визначаються за формулою

$$r_k = \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} \right)^{\frac{1}{h}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При цьому

$$r_1 > r_2 > \dots > r_n,$$

а відхилення d_k діаграми δ_f міноранти Ньютона задовільнятимуть умову

$$d_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Алгоритм відшукання мінімуму функції $f(x)$ полягає в наступному. Спочатку визначаємо r_1 . Якщо $r_1 \leq 1$, то за точку мінімуму приймаємо точку x_0 . Якщо $r_1 > 1$, то визначаємо r_n . При $r_n \geq 1$ за точку мінімуму функції приймаємо x_n .

Припустимо, що $r_1 > 1$, $r_n < 1$. Тоді серед точок x_0, x_1, \dots, x_n вибираємо середню. Нехай середньою буде точка x_m . Визначаємо

$$r_m = \left(\frac{a_{m-1}}{a_m} \right)^{\frac{1}{h}}, \quad r_{m+1} = \left(\frac{a_m}{a_{m+1}} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

Тоді можливі такі випадки:

- 1) $r_m \geq 1$, $r_{m+1} \leq 1$ ($r_m \neq r_{m+1}$);
- 2) $r_m < 1$;
- 3) $r_{m+1} > 1$.

У першому випадку за точку мінімуму функції приймаємо x_m . У другому – шукаємо найменше значення індекса ν , для якого $r_{m-\nu} \geq 1$. Якщо таким значенням є $\nu = p$, то за точку мінімуму функції приймаємо x_{m-p} . У третьому випадку шукаємо найменше значення індекса ν , для якого $r_{m+\nu} \leq 1$. Якщо таким значенням є $\nu = q$, то за точку мінімуму функції приймаємо x_{m+q} . Оскільки послідовність числових нахилів є спадною, то для пошуку найменшого значення індекса ν , для якого $r_{m-\nu} \geq 1$ або $r_{m+\nu} \leq 1$, можна, наприклад, використати метод двійкового пошуку. В цьому випадку для відшукання серед точок x_0, x_1, \dots, x_n точки \bar{x} такої, що

$$f(\bar{x}) = \min_{0 \leq i \leq n} f(x_i)$$

треба зробити максимум

$$r = 1 + [\log_2(n+1)]$$

і в середньому

$$l = r - \frac{2^r - r - 1}{n+1}$$

кrokів. При цьому справедлива нерівність

$$|\bar{x} - \alpha| < h,$$

де α – точка мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$. Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ задовільняє умову Ліпшиця зі сталою L , то

$$|f(\bar{x}) - f(\alpha)| < hL.$$

Зauważення 1. Для виконання алгоритму не обов'язково шукати значення функції $f(x)$ в усіх точках x_0, x_1, \dots, x_n . Досить значення функції $f(x)$ шукати в тих точках x_i , які потрібні для обчислення r_i .

Зauważення 2. Якщо треба уточнити точку, яку вибрано згідно алгоритму за точку мінімуму функції $f(x)$, то той же алгоритм застосовуємо, вибравши за проміжок $[a, b]$ відповідний окіл заданої точки.

Зауваження 3. Якщо $f(x) < 0$ для всіх $x \in [a, b]$, але функція $C + f(x)$, де C – деяка стала, є логарифмічно опукла, то відшукання мінімуму функції $f(x)$ можна замінити відшуканням мінімуму функції $C + f(x)$.

Приклад 1.

Розглянемо задачу мінімізації $f(x) = 1 + |x|$ (рис.1) на проміжку $[-5; 4]$ при $n = 100$.

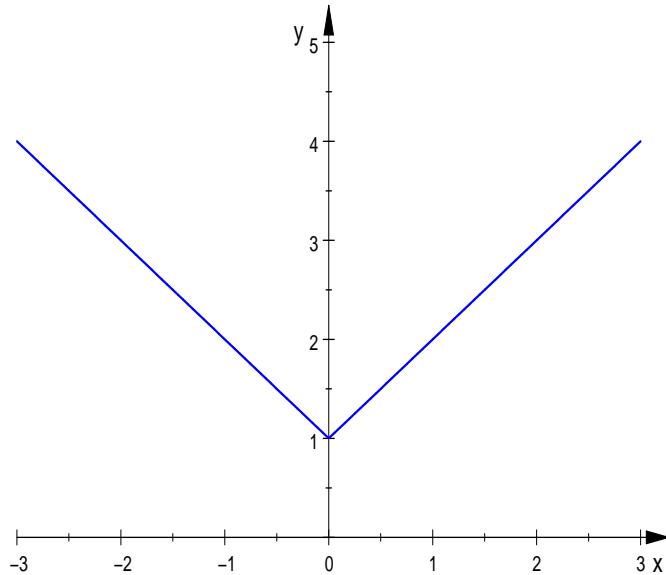


Рис. 1

Скористаємося методом двійкового пошуку [2]. Тоді $h = 0,09$, виберемо середній індекс $m = 50$ і $r_m = 1,910629$, $r_{m+1} = 1,988746$, маємо третій випадок. Покладемо $m = 75$ тоді $r_m = 0,68219$, $r_{m+1} = 0,690928$ маємо другий випадок. При $m = 62$, $r_m = 0,521184$, $r_{m+1} = 0,540348$, далі $m = 56$, $r_m = 1,112186$ і $r_{m+1} = 0,397648$. Ми одержали умови першого випадку. Тобто точку $x = 0,04$ приймаємо за точку мінімуму з точністю до величини кроку. Зменшивши крок уточнимо попередню точку і одержимо точку $x = 0$, в якій досягається мінімум функції.

2. Алгоритм типу покоординатного спуску відшукання абсолютно-го екстремуму негладких логарифмічно опуклих функцій двох дійсних змінних. Нехай треба знайти мінімум негладкої логарифмічно опуклої функції $f(x, y)$ в області $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Для цього використаємо алгоритм відшукання мінімуму негладкої логарифмічно опуклої функції однієї дійсної змінної, розглянутий в попередньому параграфі. В області D вибираємо деяке початкове наближення $(x^{(0)}, y^{(0)})$ екстремальної точки і розглядаємо $f(x, y^{(0)})$ як функцію однієї змінної x . На проміжку $[a, b]$ вибираємо систему точок

$$x_k = x_0 + kh_1, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad x_0 = a, \quad h_1 = (b - a) / n$$

і знаходимо мінімальне значення функції $f(x, y^{(0)})$, використовуючи попередній алгоритм.

Припустимо, що ми знайшли координату x , в якій функція $f(x, y^{(0)})$ із заданою точністю h_1 набуває найменшого значення. Нехай цією координатою буде

$x^{(1)}$. Зафіксуємо цю координату і розглянемо $f(x^{(1)}, y)$ як функцію однієї змінної y . Тоді на проміжку $[c, d]$ вибираємо систему точок

$$y_k = y_0 + kh_2, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad y_0 = c, \quad h_2 = (d - c) / m$$

і знаходимо мінімальне значення функції $f(x^{(1)}, y)$, використовуючи попередній алгоритм.

Припустимо, що функція $f(x^{(1)}, y)$ із заданою точністю h_2 приймає найменше значення в $y^{(1)}$. Зафіксуємо цю координату. Тоді аналогічно шукаємо $x^{(2)}$, в якій функція $f(x, y^{(1)})$ із заданою точністю на відповідній дискретній множині точок набуває найменшого значення. І т.д.

В процесі виконання алгоритму одержуємо послідовність точок

$$(x^{(0)}, y^{(0)}), (x^{(1)}, y^{(1)}), \dots, (x^{(r)}, y^{(r)}), \dots$$

Робота алгоритму продовжується доти, доки не буде знайдена точка $(x^{(s)}, y^{(s)})$ така, що $x = x^{(s)}$ є з заданою точністю точкою мінімуму функції $f(x, y^{(s)})$, а $y^{(s)}$ з заданою точністю є точкою мінімуму функції $f(x^{(s)}, y)$ на відповідних дискретних множинах точок. Тоді точку $(x^{(s)}, y^{(s)})$ приймаємо за точку, в якій досягається, з заданою точністю, мінімум функції $f(x, y)$.

Точки $(x^{(0)}, y^{(0)}), (x^{(1)}, y^{(0)}), (x^{(1)}, y^{(1)}), \dots, (x^{(s)}, y^{(s)})$ в області D лежать на ламаній лінії рис.2.

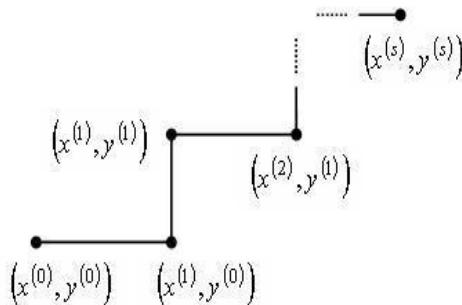


Рис. 2

Тому при переході від точки до точки досить рухатись в одному напрямі, визначеному відповідним числовим нахилом.

Щоб з більшою точністю знайти точку, в якій $f(x, y)$ досягає свого найменшого значення потрібно цей же алгоритм застосувати до функції $f(x, y)$, але за D взяти область

$$\{x^{(s)} - h_1 < x < x^{(s)} + h_1, y^{(s)} - h_2 < y < y^{(s)} + h_2\}$$

і зменшити кроки h_1 і h_2 .

Приклад 2.

Розглянемо задачу мінімізації штрафної функції №2 (рис. 3)

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 10^{-3} (x^2 + y^2 - 0, 25)^2.$$

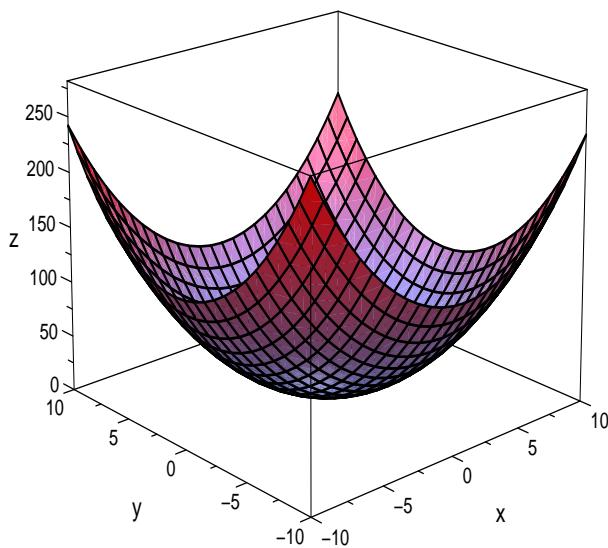


Рис. 3

За початкове наближення візьмемо точку $(-10; -10)$ і $h_1 = h_2 = 0,02$, у результаті застосування наведеного алгоритму одержимо послідовність точок $(0, 84; 1)$, $(1; 1)$. Точку $(1; 1)$ приймаємо з точністю 0,02 за точку в якій досягається мінімум функції, а значення функції в цій точці рівно 0,0030625.

Уточнимо одержану точку. Покладемо $h_1 = h_2 = 0,0003$, у результаті застосування алгоритму одержимо послідовність точок $(0, 8; 0, 8)$, $(0, 9971; 0, 8)$, $(0, 9971; 0, 9965)$, $(0, 9965; 0, 9965)$.

Отже з точністю $h = 0,0003 \min f(x, y) = 0,0030382$ при $x = 0,9965$, $y = 0,9965$.

Висновки. Використовуючи апарат некласичних мінорант і діаграм Ньютона функції однієї дійсної змінної, заданих таблично, розроблено чисельні методи відшукання абсолютноного екстремуму негладких логарифмічно опуклих функцій однієї та двох дійсних змінних. Метод можна узагальнити для довільних розривних функцій. Наведені приклади вказують на високу ефективність методу. Збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення.

- Глебена М. І. Апарат некласичних мінорант Ньютона та його використання / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2013.– Вип. 24 №1 С. 16-21.
- Цегелик Г. Г. Моделювання та оптимізація доступу до інформації файлів баз даних для однопроцесорних та багатопроцесорних систем / Г.Г.Цегелик. –Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. –192 с.

Одержано 15.10.2013