

УДК 517.95

З. М. Нитребич¹, Б. Й. Пташник^{1,2}, С. М. Репетило² (¹Нац. ун-т "Львівська політехніка", ²ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У СМУЗІ

We find the classes of univalent solvability of the problem with Dirichlet-Neumann conditions in time variable for hyperbolic equation homogeneous with respect to the order of differentiation, in a strip. These classes contain entire functions of order not higher than the first. Using the differential-symbol method we construct a solution of the problem in the form of action of differential expressions (generally of infinite order), whose symbols are right-hand sides of the Dirichlet-Neumann conditions and the equation, onto some meromorphic functions of parameters.

Знайдено класи однозначної розв'язності задачі з умовами Діріхле-Неймана за часом для гіперболічного рівняння, однорідного за порядком диференціювання, у смузі. Ці класи містять цілі функції порядку, не вище першого. За допомогою диференціально-символьного методу побудовано розв'язок задачі у вигляді дії диференціальних виразів (загалом нескінченного порядку), символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів.

Вступ. Крайові задачі з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь, взагалі, є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1, 2] та бібліографію в них). Щоб забезпечити коректність таких задач, на шуканий розв'язок накладають певні додаткові умови. У випадках, коли область є смугою чи шаром, такими умовами є, наприклад: додаткові умови за часовою змінною [3], умови періодичності, майже періодичності [4-6] або певні умови щодо поведінки розв'язку на нескінченності [7-10] за просторовими координатами.

У даній праці знайдено класи однозначної розв'язності задачі Діріхле-Неймана для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння порядку $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) зі сталими коефіцієнтами у смузі. Цими класами є цілі функції, порядок яких не перевищує одиниці. Для дослідження задачі та побудови її розв'язку використано диференціально-символьний метод [11].

1. Формулювання задачі. В області $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2: 0 < t < h, x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу

$$L \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) := \sum_{s=0}^n a_s \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n-2s} \partial x^{2s}} = f(t, x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^{2r-2} u}{\partial t^{2r-2}} \Big|_{t=0} = \varphi_r(x), \quad \frac{\partial^{2r-1} u}{\partial t^{2r-1}} \Big|_{t=h} = \varphi_{n+r}(x), \quad r \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $s \in \{0, \dots, n\}$, $a_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^n a_s \lambda^{2n-2s} = 0 \quad (3)$$

є дійсними та різними, а отже, і відмінними від нуля. Нехай λ_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, — додатні корені рівняння (3), причому $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Поряд із задачею (1), (2) розглядатимемо відповідну їй однорідну задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^{2r-2} u}{\partial t^{2r-2}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2r-1} u}{\partial t^{2r-1}} \Big|_{t=h} = 0, \quad r \in \{1, \dots, n\}. \quad (5)$$

2. Основні результати. Розв'язок неоднорідної задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним. Наприклад, однорідна задача

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t, x) = 0, \quad u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=h} = 0$$

має нетривіальні розв'язки $u(t, x) = \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2h} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2h}$, де $k \in \mathbb{Z}$, тому відповідна неоднорідна задача не може мати єдиного розв'язку.

Розв'язок задачі (1), (2) зобразимо у вигляді суми

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x), \quad (6)$$

де $v(t, x)$ — розв'язок задачі (1), (5), а $w(t, x)$ — розв'язок задачі (4), (2).

2.1. Задача для однорідного рівняння та неоднорідних умов. Дослідимо задачу (4), (2). Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) T(t, \nu) = 0, \quad (7)$$

яке одержуємо з (4) формальною заміною $\frac{\partial}{\partial x}$ на ν , де ν — деякий параметр, $\nu \in \mathbb{C}$.

Випадок $\nu \neq 0$. Фундаментальна система розв'язків рівняння (7) є такою:

$$\left\{ \exp[\nu \lambda_j t], \exp[-\nu \lambda_j t], \quad j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Загальний розв'язок рівняння (7) визначає формула

$$T(t, \nu) = \sum_{l=1}^n (C_l(\nu) \exp[\nu \lambda_l t] + C_{n+l}(\nu) \exp[-\nu \lambda_l t]),$$

де $C_l(\nu)$, $l \in \{1, \dots, 2n\}$, — довільні функції параметра ν .

Знайдемо розв'язки $\tilde{T}_j(t, \nu)$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, рівняння (7), які задовольняють умови

$$\frac{d^{2r-2} \tilde{T}_j}{dt^{2r-2}} \Big|_{t=0} = \delta_{r,j}, \quad \frac{d^{2r-1} \tilde{T}_j}{dt^{2r-1}} \Big|_{t=h} = \delta_{n+r,j}, \quad r \in \{1, \dots, n\}, \quad (8)$$

$$\text{де } \delta_{r,j} = \begin{cases} 1, & r = j, \\ 0, & r \neq j. \end{cases}$$

Ці розв'язки зображаємо формулами

$$\tilde{T}_j(t, \nu) = \sum_{l=1}^n \{C_{j,l}(\nu) \exp[\nu\lambda_l t] + C_{j,n+l}(\nu) \exp[-\nu\lambda_l t]\}, \quad j \in \{1, \dots, 2n\},$$

де $C_{j,l} := C_{j,l}(\nu)$, $j, l \in \{1, \dots, 2n\}$, — функції параметра ν , які визначаємо зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^n \{C_{j,l} + C_{j,n+l}\} (\nu\lambda_l)^{2r-2} = \delta_{r,j}, \\ \sum_{l=1}^n \{C_{j,l} \exp[\nu\lambda_l h] - C_{j,n+l} \exp[-\nu\lambda_l h]\} (\nu\lambda_l)^{2r-1} = \delta_{n+r,j}, \end{cases} \quad r \in \{1, \dots, n\}. \quad (9)$$

Головний визначник $\Delta(h, \nu)$ системи (9) є визначником матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\nu\lambda_1)^2 & \dots & (\nu\lambda_n)^2 & (\nu\lambda_1)^2 & \dots & (\nu\lambda_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\nu\lambda_1)^{2(n-1)} & \dots & (\nu\lambda_n)^{2(n-1)} & (\nu\lambda_1)^{2(n-1)} & \dots & (\nu\lambda_n)^{2(n-1)} \\ \nu\lambda_1 e^{\nu\lambda_1 h} & \dots & \nu\lambda_n e^{\nu\lambda_n h} & -\nu\lambda_1 e^{-\nu\lambda_1 h} & \dots & -\nu\lambda_n e^{-\nu\lambda_n h} \\ (\nu\lambda_1)^3 e^{\nu\lambda_1 h} & \dots & (\nu\lambda_n)^3 e^{\nu\lambda_n h} & -(\nu\lambda_1)^3 e^{-\nu\lambda_1 h} & \dots & -(\nu\lambda_n)^3 e^{-\nu\lambda_n h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\nu\lambda_1)^{2n-1} e^{\nu\lambda_1 h} & \dots & (\nu\lambda_n)^{2n-1} e^{\nu\lambda_n h} & -(\nu\lambda_1)^{2n-1} e^{-\nu\lambda_1 h} & \dots & -(\nu\lambda_n)^{2n-1} e^{-\nu\lambda_n h} \end{pmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(h, \nu) = (-2)^n \nu^{2n^2-n} \prod_{1 \leq s < l \leq n} (\lambda_s^2 - \lambda_l^2)^2 \prod_{j=1}^n (\lambda_j \operatorname{ch}[\nu\lambda_j h]). \quad (10)$$

Запишемо множину M тих значень ν , для яких визначник $\Delta(h, \nu)$ обертається в нуль, тобто

$$M = \left\{ \frac{(2m+1)\pi}{2\lambda_j h} i, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j \in \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (11)$$

Для всіх $\nu \in \mathbb{C} \setminus M$ система рівнянь (9) має єдиний розв'язок і ми отримуємо розв'язки задач (7), (8):

$$\tilde{T}_j(t, \nu) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\Delta_{j,l}(h, \nu)}{\Delta(h, \nu)} \exp[\nu\lambda_l t] + \frac{\Delta_{j,n+l}(h, \nu)}{\Delta(h, \nu)} \exp[-\nu\lambda_l t] \right),$$

де $\Delta_{j,l}(h, \nu)$, $j, l \in \{1, \dots, 2n\}$, — алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j -го рядка та l -го стовпця у визначнику $\Delta(h, \nu)$.

Спростивши вирази, отримуємо, що для всіх $\nu \in \mathbb{C} \setminus M$ шукані розв'язки задач (7), (8) $\tilde{T}_j(t, \nu)$, $\tilde{T}_{n+j}(t, \nu)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, набувають вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{T}_j(t, \nu) &= \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^{n+j} S_{n-j}^{(l)} \operatorname{ch}[\nu\lambda_l(h-t)]}{\nu^{2n-2} \operatorname{ch}[\nu\lambda_l h] \prod_{s=1, s \neq l}^n (\lambda_l^2 - \lambda_s^2)}, \\ \tilde{T}_{n+j}(t, \nu) &= \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^{n+j} S_{n-j}^{(l)} \operatorname{sh}[\nu\lambda_l t]}{\nu^{2n-1} \lambda_l \operatorname{ch}[\nu\lambda_l h] \prod_{s=1, s \neq l}^n (\lambda_l^2 - \lambda_s^2)}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $S_q^{(l)}$ — сума всіх можливих добутоків елементів $(\nu\lambda_1)^2, \dots, (\nu\lambda_{l-1})^2, (\nu\lambda_{l+1})^2, \dots, (\nu\lambda_n)^2$, узятих по $q \geq 1$ штук у кожному добутку, $S_0^{(l)} \equiv 1, l \in \{1, \dots, n\}$.

Випадок $\nu = 0$. Рівняння (7) набуває вигляду

$$\frac{d^{2n}T(t, 0)}{dt^{2n}} = 0, \tag{13}$$

а $\{t^{j-1}, j \in \{1, \dots, 2n\}\}$ є фундаментальною системою його розв'язків. Розв'язки задачі (13), (8) є такими поліномами:

$$\tilde{T}_j(t, 0) = \sum_{l=1}^{2n} C_{j,l} t^{l-1}, \quad j \in \{1, \dots, 2n\},$$

де сталі $C_{j,l}, j, l \in \{1, \dots, 2n\}$, для кожного $j \in \{1, \dots, 2n\}$ визначаються зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{j,2r-1}(2r-2)! = \delta_{r,j}, \\ \sum_{l=2r}^{2n} C_{j,l} \frac{(l-1)!}{(l-2r)!} h^{l-2r} = \delta_{n+r,j}, \end{cases} \quad r \in \{1, \dots, n\}, \tag{14}$$

з головним визначником $\Delta(h)$ вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2h & \dots & (n-1)h^{n-2} & \dots & (2n-1)h^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2 \cdot 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)(n-2)(n-3)h^{n-4} & \dots & (2n-1)(2n-2)(2n-3)h^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (2n-1)(2n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{vmatrix},$$

який обчислюється за формулою

$$\Delta(h) = 1! 2! \dots (2n-1)!$$

Розв'язуючи систему (14), знаходимо шукані функції:

$$\tilde{T}_j(t, 0) = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{j,l}(h)}{\Delta(h)} t^{l-1}, \quad j \in \{1, \dots, 2n\}, \tag{15}$$

де $\Delta_{j,l}(h), j, l \in \{1, \dots, 2n\}$, — алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j -го рядка та l -го стовпця у визначнику $\Delta(h)$.

Зауваження 1. Формули (15) можна одержати з (12) шляхом граничного переходу при $\nu \rightarrow 0$. Надалі вважатимемо, що параметр ν може набувати довільного значення з множини $\mathbb{C} \setminus M$ і на цій множині визначені функції $\tilde{T}_1(t, \cdot), \dots, \tilde{T}_{2n}(t, \cdot)$ формулами (12).

Позначимо через $A_{1,d}$ клас цілих функцій, порядок яких не перевищує одиниці, причому функції першого порядку мають тип менший, ніж d , $d > 0$, а через \mathbf{A}_d позначимо клас цілих функцій $g(t, x)$, які для кожного фіксованого $t \in [0, h]$ належать класу $A_{1,d}$.

Для встановлення класу однозначної розв'язності задачі (4), (2) нам знадобиться наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $P(z)$ — аналітична функція в крузі $B_d = \{z \in \mathbb{C} : |z| < d\}$, а $f(z)$ належить класу $A_{1,d}$. Тоді $P\left(\frac{d}{dz}\right)f(z)$ належить класу $A_{1,d}$.*

Доведення. Якщо $P(z) = \sum_{s \geq 0} a_s z^s$ — довільна аналітична в B_d функція, то функція $\tilde{P}(z) = \sum_{s \geq 0} |a_s| z^s$ також є аналітичною в B_d . Оскільки ціла функція $f(z) = \sum_{r \geq 0} b_r z^r$ належить класу $A_{1,d}$, то

$$\forall d_1 \in (0, d) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall r > N \quad |b_r| < \frac{d_1^r}{r!}.$$

Зобразимо дію виразу $P\left(\frac{d}{dz}\right)$ на $f(z)$ у вигляді $P\left(\frac{d}{dz}\right)f(z) = M_1(z) + M_2(z)$, де $M_1(z) = \sum_{0 \leq r \leq N} a_r f^{(r)}(z)$, $M_2(z) = \sum_{r > N} a_r f^{(r)}(z)$.

Функція $M_1(z)$ належить класу $A_{1,d}$ як дія диференціального полінома на $f(z)$ з класу $A_{1,d}$. Покажемо, що функція $M_2(z)$ також належить класу $A_{1,d}$. Оцінимо зверху за модулем коефіцієнти c_s , $s \geq 0$, степеневого ряду $M_2(z) = \sum_{s \geq 0} c_s z^s$, що обчислюються [12] за формулами $c_s = \sum_{r > N} a_r b_{r+s} \frac{(r+s)!}{s!}$, $s \geq 0$:

$$|c_s| \leq \sum_{r > N} |a_r| |b_{r+s}| \frac{(r+s)!}{s!} \leq \sum_{r > N} |a_r| \frac{d_1^{r+s}}{(r+s)!} \frac{(r+s)!}{s!} = \sum_{r > N} |a_r| d_1^r \frac{d_1^s}{s!} = \tilde{P}(d_1) \frac{d_1^s}{s!}.$$

Оскільки $|c_s| \leq \tilde{P}(d_1) \frac{d_1^s}{s!}$ для довільного $s \geq 0$, то функція $M_2(z)$ належить класу $A_{1,d}$. Отже, функція $P\left(\frac{d}{dz}\right)f(z)$ як сума цілих функцій з класу $A_{1,d}$ є цілою функцією з цього ж класу. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай $\varphi_r \in A_{1,d}$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, де $d = \pi(2h\lambda_n)^{-1}$. Тоді у класі цілих функцій \mathbf{A}_d , існує єдиний розв'язок задачі (4), (2), який можна подати у вигляді*

$$w(t, x) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_j(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0}, \quad (16)$$

де $\tilde{T}_j(t, \nu)$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, — функції вигляду (12).

Доведення. Диференціальні вирази $\varphi_r\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, нескінченного порядку визначимо шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial \nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_r(x)$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$. Тоді вираз (16) є деяким рядом. Цей ряд визначає цілу функцію $w(t, x)$, яка є цілою функцією за змінною t і для кожного фіксованого $t \in [0, h]$ належить класу $A_{1,d}$, що випливає з рівностей

$$\varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_j(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} = \tilde{T}_j \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_j(x), \quad j \in \{1, \dots, 2n\},$$

та леми 1. Отже, $w \in \mathbf{A}_d$.

Покажемо тепер, що функція (16) є розв'язком задачі (4), (2) і у класі \mathbf{A}_d не існує інших розв'язків.

Доведемо, що функція (16) задовольняє рівняння (4). З того, що функції (12) є розв'язками рівняння (7), випливає

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) w(t, x) &= L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \tilde{T}_j(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \tilde{T}_j(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \exp[\nu x] L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \tilde{T}_j(t, \nu) \right\} \Big|_{\nu=0} = 0. \end{aligned}$$

Враховуючи, що функції (12) задовольняють умови (8), і що для цілих функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, справджуються рівності $\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} = \varphi_j(x)$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2r-2} w}{\partial t^{2r-2}} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}} \left[\sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \tilde{T}_j(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \left[\frac{\partial^{2r-2} \tilde{T}_j(t, \nu)}{\partial t^{2r-2}} \right] \Big|_{t=0} \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} = \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \delta_{r,j} \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} = \sum_{j=1}^{2n} \delta_{r,j} \varphi_j(x) = \varphi_r(x), \quad r \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Подібно доводимо, що функція (16) задовольняє умови (2) у точці $t = h$.

Застосовуючи методику праці [7] до задачі (1), (2), доводимо, що задача (4), (2) не може мати двох різних розв'язків у класі функцій, які для кожного $t \in [0, h]$ зростають на нескінченності не швидше, ніж $\exp(d|x|)$, $d = \pi(2h\lambda_n)^{-1}$. Позначимо цей клас функцій через E_d .

Оскільки $\mathbf{A}_d \subset E_d$, то з вище сказаного випливає, що клас цілих функцій \mathbf{A}_d є класом однозначної розв'язності задачі (4), (2). Теорему доведено.

Нехай K_L — клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m Q_j(x) \exp[\alpha_j x], \tag{17}$$

де $\alpha_j \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $Q_j(x)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, — поліноми.

Зауважимо, що кожний квазіполіном $\varphi(x)$ вигляду (17) визначає диференціальну операцію $\sum_{j=1}^m Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)$ скінченного порядку на класі цілих функцій $\Phi(\nu)$, а саме

$$\varphi\left(\frac{d}{d\nu}\right) \Phi(\nu) = \sum_{j=1}^m Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right) \Phi(\nu + \alpha_j),$$

зокрема,

$$\varphi \left(\frac{d}{d\nu} \right) \Phi(\nu) \Big|_{\nu=0} = \sum_{j=1}^m Q_j \left(\frac{d}{d\nu} \right) \Phi(\nu) \Big|_{\nu=\alpha_j}. \quad (18)$$

Позначимо через $K_{\mathbb{C}, L}$ клас квазіполіномів двох змінних

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^N P_{l,j}(t, x) \exp[\beta_l t + \alpha_j x],$$

де $P_{l,j}(t, x)$ — поліноми змінних t та x , $\beta_l \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in L$, $\beta_l \neq \beta_r$ для $l \neq r$, $l, r \in \{1, \dots, N\}$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ для $k \neq j$, $k, j \in \{1, \dots, m\}$, $m, N \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Нехай $\varphi_r \in K_{\mathbb{C} \setminus M}$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, де M — множина (11). Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ існує єдиний розв'язок задачі (4), (2), який можна подати у вигляді (16).

Доведення. Згідно з формулою (18) за умов теореми випливає, що функції $\varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_j(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0}$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, належать до $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$. Оскільки функція (16) задовольняє рівняння (4) і умови (2), то в класі $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ вона є розв'язком задачі (4), (2).

Єдиність розв'язку задачі (4), (2) у парі класів $K_{\mathbb{C} \setminus M}$, $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ доведемо методом від супротивного. Припустимо, що для $\varphi_r \in K_{\mathbb{C} \setminus M}$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, у класі $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ існує два розв'язки $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ задачі (4), (2) у смузі S ; тоді їх можна подати у вигляді

$$u_1(t, x) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_{1,j}(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0},$$

$$u_2(t, x) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_{2,j}(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0},$$

де $\tilde{T}_{1,j}(t, \nu)$, $\tilde{T}_{2,j}(t, \nu)$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, — деякі розв'язки рівняння (7). Різниця цих функцій

$$\tilde{u}(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \left(\tilde{T}_{1,j}(t, \nu) - \tilde{T}_{2,j}(t, \nu) \right) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0}$$

задовольняє у смузі S рівняння (4) і умови (5).

Оскільки $\varphi_r \in K_{\mathbb{C} \setminus M}$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, то, згідно з (18) квазіполіном $\tilde{u}(t, x)$ належить до $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$. Цей квазіполіном містить значення $\tilde{T}_{1,r}(t, \nu) - \tilde{T}_{2,r}(t, \nu)$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, та значення їх відповідних похідних за ν в точках (t, ν) , де $\nu \in \mathbb{C} \setminus M$, $t \in [0, h]$. Оскільки $\tilde{T}_{1,r}(t, \nu) - \tilde{T}_{2,r}(t, \nu)$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, — розв'язки рівняння (7), які задовольняють однорідні умови (8), і $\nu \in \mathbb{C} \setminus M$, то $\Delta(h, \nu) \neq 0$ і ці розв'язки є нульовими, тобто $\tilde{T}_{1,r}(t, \nu) - \tilde{T}_{2,r}(t, \nu) \equiv 0$, $r \in \{1, \dots, 2n\}$, на $[0, h] \times (\mathbb{C} \setminus M)$. Отже, $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. Теорему доведено.

2.2. Задача для неоднорідного рівняння та однорідних умов. Нехай $\left\{ T_k(t, \nu), k \in \{0, \dots, 2n-1\} \right\}$ — нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна

система розв'язків рівняння (7). Розглянемо визначену на множині $[0, h] \times \mathbb{C}^2$ функцію

$$\Phi(t, \lambda, \nu) = \frac{\exp[\lambda t] - \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda^k T_k(t, \nu)}{L(\lambda, \nu)}, \quad (19)$$

яка є розв'язком задачі Коші

$$L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \Phi = \exp[\lambda t], \quad \left. \frac{d^k \Phi}{dt^k} \right|_{t=0} = 0, \quad k \in \{0, \dots, 2n-1\}, \quad (20)$$

та визначену на $[0, h] \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus M)$ функцію

$$F(t, \lambda, \nu) = \frac{\exp[\lambda t] - \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-2} \tilde{T}_j(t, \nu) - \exp[\lambda h] \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-1} \tilde{T}_{n+j}(t, \nu)}{L(\lambda, \nu)}, \quad (21)$$

де $\tilde{T}_j(t, \nu)$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, — функції (12).

Лема 2. Функцію $F(t, \lambda, \nu)$ можна подати у такому вигляді:

$$F(t, \lambda, \nu) = \Phi(t, \lambda, \nu) - \sum_{m=1}^n \left. \frac{d^{2m-1} \Phi}{dt^{2m-1}} \right|_{t=h} \tilde{T}_{n+m}(t, \nu). \quad (22)$$

Доведення. Елементи нормальної фундаментальної системи розв'язків $\{T_k(t, \nu), k \in \{0, \dots, 2n-1\}\}$ подамо у вигляді лінійної комбінації елементів фундаментальної системи $\{\tilde{T}_j(t, \nu), j \in \{1, \dots, 2n\}\}$:

$$T_j(t, \nu) = \sum_{m=1}^n \left(c_{j,m}(\nu) \tilde{T}_m(t, \nu) + d_{j,m}(\nu) \tilde{T}_{n+m}(t, \nu) \right), \quad j \in \{0, \dots, 2n-1\}. \quad (23)$$

Визначимо коефіцієнти $c_{j,m}(\nu)$, $d_{j,m}(\nu)$ на підставі умов (8):

$$\left. \frac{d^{2r-2} T_j}{dt^{2r-2}} \right|_{t=0} = \delta_{j,2r-2} = \sum_{m=1}^n c_{j,m}(\nu) \delta_{r,m} = c_{j,r}(\nu),$$

$$\left. \frac{d^{2r-1} T_j}{dt^{2r-1}} \right|_{t=h} = \sum_{m=1}^n d_{j,m}(\nu) \delta_{n+r,n+m} = d_{j,r}(\nu), \quad r \in \{1, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, 2n-1\}.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів $c_{j,r}(\nu)$, $d_{j,r}(\nu)$, $r \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{0, \dots, 2n-1\}$, у вирази (23), одержуємо такі співвідношення:

$$T_j(t, \nu) = \sum_{m=1}^n \left(\delta_{j,2m-2} \tilde{T}_m(t, \nu) + T_j^{(2m-1)}(h, \nu) \tilde{T}_{n+m}(t, \nu) \right), \quad j \in \{0, \dots, 2n-1\}. \quad (24)$$

Домноживши обидві частини рівності (24) на λ^j та підсумувавши за j , одержуємо

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \lambda^j T_j(t, \nu) = \sum_{m=1}^n \lambda^{2m-2} \tilde{T}_m(t, \nu) + \sum_{m=1}^n \tilde{T}_{n+m}(t, \nu) \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda^j T_j^{(2m-1)}(h, \nu). \quad (25)$$

Здійснимо перетворення правої частини формули (22):

$$\begin{aligned} & \Phi(t, \lambda, \nu) - \sum_{m=1}^n \frac{d^{2m-1}\Phi}{dt^{2m-1}} \Big|_{t=h} \tilde{T}_{n+m}(t, \nu) = \\ & = \frac{\exp[\lambda t] - \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda^j T_j(t, \nu)}{L(\lambda, \nu)} - \sum_{m=1}^n \frac{\lambda^{2m-1} \exp[\lambda h] - \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda^j T_j^{(2m-1)}(h, \nu)}{L(\lambda, \nu)} \tilde{T}_{n+m}(t, \nu) = \\ & = \frac{\sum_{m=1}^n \lambda^{2m-2} \tilde{T}_m(t, \nu) + \sum_{m=1}^n \tilde{T}_{n+m}(t, \nu) \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda^j T_j^{(2m-1)}(h, \nu) - \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda^j T_j(t, \nu)}{L(\lambda, \nu)} + \\ & \quad + F(t, \lambda, \nu). \end{aligned} \quad (26)$$

Із (26), на підставі формули (25), одержуємо рівність (22). Лему доведено.

Позначимо через \mathbf{A}_d^M клас цілих функцій $g(t, x)$, які для кожного фіксованого $t \in [0, h]$ належать класу $A_{1,d} \cup K_{\mathbb{C} \setminus M}$.

Теорема 3. *Нехай $f(t, x)$ належить класу \mathbf{A}_d^M , де $d = \pi(2h\lambda_n)^{-1}$, а M — множина (11). Тоді у класі цілих функцій \mathbf{A}_d^M існує єдиний розв'язок задачі (1), (5), який можна подати у вигляді*

$$v(t, x) = f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ F(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0}, \quad (27)$$

де функцію $F(t, \lambda, \nu)$ визначає формула (21).

Доведення. Згідно з теоремою Пуанкаре [13, с. 59] про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів, функція $\Phi(t, \lambda, \nu)$, яка визначена рівністю (19), як розв'язок задачі (20) є цілою стосовно λ і ν . З леми 2 випливає, що $F(t, \lambda, \nu)$ — мероморфна стосовно ν функція, полюсами якої є точки множини M , а стосовно λ є цілою функцією першого порядку скінченного типу. За цілою функцією $f(t, x)$ визначаємо диференціальний вираз нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ шляхом формальної заміни t на $\frac{\partial}{\partial \lambda}$, а x на $\frac{\partial}{\partial \nu}$ у ряді Маклорена для функції $f(t, x)$. Тоді вираз (27) є рядом, що подібно до доведення теореми 1 визначає цілу функцію $v(t, x)$, яка є цілою за змінною t , а для кожного $t \in [0, h]$ є цілою функцією класу $A_{1,d}$, тобто $v(t, x)$ належить класу \mathbf{A}_d^M .

Покажемо, що функція (27) задовольняє рівняння (1):

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(t, x) &= L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ F(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} \right) = \\ &= f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ F(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} = \\ &= f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \exp[\nu x] L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) F(t, \lambda, \nu) \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Оскільки функції (12) задовольняють рівняння (7), то

$$\begin{aligned}
 & L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) F(t, \lambda, \nu) = \\
 & = L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \frac{\exp[\lambda t] - \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-2} \tilde{T}_j(t, \nu) - \exp[\lambda h] \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-1} \tilde{T}_{n+j}(t, \nu)}{L(\lambda, \nu)} = \\
 & = L^{-1}(\lambda, \nu) \left\{ L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \exp[\lambda t] - \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-2} L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \tilde{T}_j(t, \nu) - \right. \\
 & \left. - \exp[\lambda h] \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-1} L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \tilde{T}_{n+j}(t, \nu) \right\} = L^{-1}(\lambda, \nu) L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \exp[\lambda t] = \exp[\lambda t].
 \end{aligned} \tag{29}$$

Із (28) та (29) випливає

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(t, x) = f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \exp[\lambda t + \nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} = f(t, x).$$

Покажемо, що функція (27) справджує умови (5). Дійсно, враховуючи (8) і (21), для $r \in \{1, \dots, n\}$ отримуємо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{2r-2} v}{\partial t^{2r-2}} \Big|_{t=0} & = \left[\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}} f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ F(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} \right] \Big|_{t=0} = \\
 & = f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left[\left\{ \exp[\nu x] \frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}} F(t, \lambda, \nu) \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} \right] \Big|_{t=0} = \\
 & = f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \exp[\nu x] \frac{\lambda^{2r-2} - \sum_{j=1}^n \lambda^{2j-2} \delta_{r,j} - 0}{L(\lambda, \nu)} \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} = 0.
 \end{aligned}$$

Подібно показуємо, що функція (27) задовольняє умови (5) також у точці $t = h$.

Встановимо єдиність розв'язку задачі (1), (5) у класі функцій \mathbf{A}_d^M . У підкласі функцій, які для кожного фіксованого $t \in [0, h]$ належать до $A_{1,d}$, єдиність доводимо подібно до доведення єдиності розв'язку в теоремі 1.

Покажемо тепер, що у підкласі $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ класу \mathbf{A}_d^M немає інших розв'язків задачі (1), (5), окрім (27). Припустимо, що для $f \in K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ у класі $K_{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus M}$ існує два розв'язки $v_1(t, x)$, $v_2(t, x)$ задачі (1), (5) у смугі S ; тоді їх можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 v_1(t, x) & = f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ F_1(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0}, \\
 v_2(t, x) & = f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ F_2(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0},
 \end{aligned}$$

де $F_1(t, \lambda, \nu)$, $F_2(t, \lambda, \nu)$ — деякі розв'язки рівняння $L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right)F = \exp[\lambda t]$, які задовольняють однорідні умови

$$\frac{d^{2r-2}F}{dt^{2r-2}}\Big|_{t=0} = \frac{d^{2r-1}F}{dt^{2r-1}}\Big|_{t=h} = 0.$$

Функція $\tilde{v}(t, x) = v_1(t, x) - v_2(t, x)$ у смугі S задовольняє рівняння (4) та умови (5). Провівши далі міркування, аналогічні доведенню єдиності в теоремі 2, отримуємо, що $F_1(t, \lambda, \nu) - F_2(t, \lambda, \nu) \equiv 0$ на $[0, h] \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus M)$. Отже, $v_1(t, x) \equiv v_2(t, x)$. Теорему доведено.

2.3. Розв'язність задачі (1), (2). Оскільки розв'язок задачі (1), (2) ми можемо подати у вигляді (6), то з теорем 1–3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай $\varphi_j \in A_{1,d} \cup K_{\mathbb{C} \setminus M}$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, $f \in \mathbf{A}_d^M$, де M — множина (11), а $d = \pi(2h\lambda_n)^{-1}$. Тоді у класі \mathbf{A}_d^M існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який є сумою функцій (16) та (27).*

3. Приклад. У смугі S розв'язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \exp[x + t], \quad (30)$$

$$u|_{t=0} = \exp[x], \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=h} = \cos[x]. \quad (31)$$

▼ Для побудови розв'язку задачі (30), (31) скористаємось загальними формулами (16) та (27), зауваживши, що в задачі (30), (31)

$$\varphi_1(x) = \exp[x], \quad \varphi_2(x) = \cos[x], \quad f(t, x) = t \exp[x + t],$$

$$\tilde{T}_1(t, \nu) = \frac{\operatorname{ch}[\nu(h-t)]}{\operatorname{ch}[\nu h]}, \quad \tilde{T}_2(t, \nu) = \frac{\operatorname{sh}[\nu t]}{\nu \operatorname{ch}[\nu h]},$$

$$F(t, \lambda, \nu) = \frac{1}{\lambda^2 - \nu^2} \left(\exp[\lambda t] - \frac{\nu \operatorname{ch}[\nu(h-t)] + \lambda \exp[\lambda h] \operatorname{sh}[\nu t]}{\nu \operatorname{ch}[\nu h]} \right).$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \varphi_1 \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_1(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} + \varphi_2 \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \tilde{T}_2(t, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} + \\ &\quad + f \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ F(t, \lambda, \nu) \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} = \\ &= \exp \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \right] \left\{ \frac{\operatorname{ch}[\nu(h-t)]}{\operatorname{ch}[\nu h]} \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} + \cos \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \right] \left\{ \frac{\operatorname{sh}[\nu t]}{\nu \operatorname{ch}[\nu h]} \exp[\nu x] \right\} \Big|_{\nu=0} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp \left[\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \left\{ \frac{\nu \exp[\lambda t] \operatorname{ch}[\nu h] - \nu \operatorname{ch}[\nu(h-t)] - \lambda \exp[\lambda h] \operatorname{sh}[\nu t]}{\nu(\lambda^2 - \nu^2) \operatorname{ch}[\nu h] (\exp[\nu x])^{-1}} \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0} = \\ &= \left\{ \frac{\operatorname{ch}[\nu(h-t)] \exp[\nu x]}{\operatorname{ch}[\nu h]} \right\} \Big|_{\nu=1} + \frac{1}{2} \left(\left\{ \frac{\operatorname{sh}[\nu t] \exp[\nu x]}{\nu \operatorname{ch}[\nu h]} \right\} \Big|_{\nu=i} + \left\{ \frac{\operatorname{sh}[\nu t] \exp[\nu x]}{\nu \operatorname{ch}[\nu h]} \right\} \Big|_{\nu=-i} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \exp[\nu x] \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\nu \exp[\lambda t] \operatorname{ch}[\nu h] - \nu \operatorname{ch}[\nu(h-t)] - \lambda \exp[\lambda h] \operatorname{sh}[\nu t]}{\nu(\lambda^2 - \nu^2) \operatorname{ch}[\nu h]} \right\} \Big|_{\lambda=1, \nu=1}. \quad (32)$$

Провівши обчислення у (32), отримуємо таку формулу для розв'язку задачі (30), (31):

$$u(t, x) = \frac{\operatorname{ch}[h-t]}{\operatorname{ch}[h]} \exp[x] + \frac{\sin[t] \cos[x]}{\cos[h]} + \frac{(t^2 - t) \operatorname{ch}[h] \exp[t] - (h^2 + h - 1) \operatorname{sh}[t] \exp[h]}{4 \operatorname{ch}[h]} \exp[x].$$

На підставі теорем 1–3 знайдений розв'язок є єдиним у класі \mathbf{A}_d^M , де $d = \frac{\pi}{2h}$, а $M = \left\{ \frac{\pi i}{h} \left(m + \frac{1}{2} \right), m \in \mathbb{Z} \right\}$. ▲

Висновки. За допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з умовами Діріхле-Неймана за часом для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння порядку $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) зі сталими коефіцієнтами у смузі. Встановлено, що клас цілих функцій, порядок яких не перевищує одиниці, є класом однозначної розв'язності досліджуваної задачі. При цьому розв'язок задачі зображено у вигляді дії в околі нуля диференціальних виразів (загалом нескінченного порядку), символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів. Нульове значення параметра не є полюсом цих функцій.

1. Пташник Б. И. Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
3. Ключ І. С., Пташник Б. Й. Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 40. – С. 78–86.
4. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 3. – С. 15–28.
5. Пташник Б. Й., Штабалоюк П. И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 22, № 4. – С. 669–678.
6. Rudakov I. A. A nontrivial periodic solutions of the nonlinear wave equations with homogeneous boundary conditions // Different. equations. – 2005. – 41, No. 10. – P. 1467–1475.
7. Борок В. М., Перельман М. А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
8. Нитребич З. М. Крайова задача для неоднорідного гіперболічного рівняння із частинними похідними // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – № 346. – С. 35–39.
9. Nytrebych Z. M. A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sciences. – 1996. – 79, № 6. – P. 1388–1392.
10. Kengne E. Nonlocal boundary value problem for partial differential equations with variable coefficients // Focus on African Diaspora Math. – 2008. – P. 97–108.
11. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка“, 2002. – 292 с.
12. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 11–16.
13. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

Одержано 24.10.2014