УДК 519.2:519.6

А. О. Пашко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ СУБГАУССОВОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

This paper investigates algorithms for simulation of the trajectories of a strictly sub-Gaussian fractional Brownian motion with given accuracy and reliability. Spectral representation of fractional Brownian motion as random series examines as a model. Estimates of the accuracy and reliability investigated in various functional spaces. Given the accuracy of the numbers and simulation algorithms error of Gaussian random variables in the model are used strictly sub-Gaussian random variables. Examples of simulation are represented below.

В роботі досліджується тосність і надійність моделювання субгауссового дробового броунівського руху в різних функціональних просторах з заданими точністю і надійністю. Модель будується на основі розкладу дробового броунівського руху у вигляді стохастичного ряду. Розглянуто приклади моделювання.

Методи статистичного моделювання використовуються для розвязку багатьох прикладних задач, а саме, при чисельному обчисленні кратних інтегралів, чисельному розвязуванні стохастичних диференційних рівнянь, при випробуваннях технічних систем [1] – [2].

В роботах [3] – [4] досліджувались оцінки точності і надійності моделювання субгауссових випадкових процесів в різних функціональних просторах. Узагальнений вінерівський процес використовується в багатьох прикладних задачах, має певні особсбливості при моделюванні, що повязані з точністю обчислення деяких параметрів спектрального розкладу.

В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделювання строго субгауссового узагальненого вінерівського процесу (строго субгауссового дробового броунівського руху).

Основні означення і поняття.

Нехай (Ω, Σ, P) - стандартний ймовірносний простір, $T (T = [0, T]$ або $T = [0, \infty])$- деяка параметрична множина.

Для моделювання випадкових процесів використовуються зображення процесів у вигляді стохастичних рядів $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\xi_k$, де $\{\xi_k\}$ - послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім та $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$. Модель будується у вигляді $S(t, M) = \sum_{k=1}^{M} f_k(t)\xi_k$. Нехай (T, Θ, μ) - деякий вимірний простір. Нехай всі $S(t, M)$ та $X(t)$ належать деякому функціональному простору $A(T)$.

Означення 1. *Модель $S(t, M)$ наближає процес $X(t)$ із заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю $0 < \varepsilon < 1$ в нормі функціонального простору $A(T)$, якщо $P\{\|X(t) - S(t, M)\|_A \geq \delta\} \leq 1 - \varepsilon$.*

При реальному моделюванні послідовності $\{\xi_k\}$ отримуються, як правило, строго субгауссові випадкові величини.

Означення 2. *Випадкова величина ξ називається субгауссовою, якщо існує $a > 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}$.*

Клас субгауссових випадкових величин є банаховим простором. Властивості субгауссових випадкових величин і процесів досліджувались в роботі [5]. При $E\xi^2 = a^2$ маємо клас строго субгауссових випадкових величин.

Позначимо $L_U(T)$ - простір Орліча,що породжується C-функцією $U(x), x \in R$.

Означення 3. *Простором Орліча, що породжується функцією $U(x)$, називається сімя функцій $\{f(t), t \in T\}$, для кожної з яких існує константа r, при якій виконується умова $\int_T U\left(\frac{f(t)}{r}\right) d\mu(t) < \infty$.*

Простір $L_U(T)$ є банаховим простором відносно норми Люксембурга [5].

Означення 4. *Дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста $\alpha \in (0,1)$ називається гауссівський процес $\{W_\alpha(t), t \in T\}$ з нульовим середнім $EW_\alpha(t) = 0$ та кореляційною функцією*

$$R(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha}\right),$$

такий, що $W_\alpha(0) = 0$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо стандартний вінерівський процес. Процес $W_\alpha(t)$ можна зобразити у вигляді [7]

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n t)}{x_n} \xi_n^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(y_n t)}{y_n} \xi_n^2 \tag{1}$$

де $\{\xi_n^1, \xi_n^2\}$ – незалежні гауссові випадкові величини з нульовим середнім та

$$E(\xi_n^1)^2 = \frac{2c}{x_n^{2\alpha} J_{1-\alpha}^2(x_n)},$$

$$E(\xi_n^2)^2 = \frac{2c}{y_n^{2\alpha} J_{-\alpha}^2(y_n)},$$

$$c = \frac{\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)}{\pi},$$

де $\{x_n\}$ - дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$, $\{y_n\}$ - дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$. Зображення (1) можна переписати у вигляді

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=1}^{M} d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n,$$

де

$$c_n = \frac{\sqrt{2c}}{x_n^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_n)},$$

$$d_n = \frac{\sqrt{2c}}{y_n^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_n)},$$

$\{X_n, Y_n\}$ - незалежні гауссові випадкові величини з $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$.

Модель узагальненого вінерівського процесу будуємо у вигляді

$$S_\alpha(t,M)=\sum_{n=1}^{M}c_n\sin(x_nt)X_n+\sum_{n=1}^{M}d_n(1-\cos(y_nt))Y_n,$$

де $\{X_n,Y_n\}$ - послідовність незалежних строго субгауссових випадкових величин. Розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2(\sin(x_nt))^2+\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2(1-\cos(y_nt))^2\le\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+4d_n^2).$$

На основі роботи [8] маємо

$$x_n=(n+\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2})\pi-\frac{4\alpha^2-1}{2\pi(4n+3-2\alpha)}+...$$

$$y_n=(n+\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2})\pi-\frac{4(1-\alpha)^2-1}{2\pi(4n+1+2\alpha)}+...$$

тобто, $x_n\approx y_n\approx n\pi$ при $n\to\infty$. Для функцій Бесселя $J_\alpha(x),\alpha>-1$ має місце асимптотичне співвідношення $J_{-\alpha}^2(x)+J_{1-\alpha}^2(x)\approx\frac{2}{x\pi}$ для великих x. Тоді для x_n та y_n справедливо $J_{1-\alpha}^2(x_n)\approx\frac{2}{x_n\pi}$ та $J_{-\alpha}^2(y_n)\approx\frac{2}{y_n\pi}$ при $n\to\infty$. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+4d_n^2)\approx\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_n^{2\alpha+1}}+\frac{4}{y_n^{2\alpha+1}}\right)<\infty.$$

Отже, випадковий процес $W_\alpha(t)$ в зображенні (1), коли $\{\xi_n^1,\xi_n^2\}$ незалежні строго субгауссові випадкові величини, буде строго субгауссівським випадковим процесом [3] – [4].

Означення 5. *Строго субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста $\alpha\in(0,1)$ називається строго субгауссівський процес $\{W_\alpha(t),t\in[0,T]\}$ з нульовим середнім $EW_\alpha(t)=0$ та кореляційною функцією*

$$R(t,s)=\frac{1}{2}\big(|t|^{2\alpha}+|s|^{2\alpha}-|t-s|^{2\alpha}\big),$$

такий, що $W_\alpha(0)=0$.

В подальшому будемо розглядати строго субгауссівський узагальнений дробовий броунівський рух.

Оцінка точності і надійності моделювання. Оскільки нулі функції Бесселя точно знайти не можемо, то будемо знаходити їх з деякою точністю. Позначимо наближені значення c_n,d_n,x_n,y_n відповідно $\tilde{c}_n,\tilde{d}_n,\tilde{x}_n,\tilde{y}_n$. Нехай

$$|c_n-\tilde{c}_n|\le h_n^c,$$

$$|d_n-\tilde{d}_n|\le h_n^d,$$

$$|x_n-\tilde{x}_n|\le h_n^x,$$

$$|y_n-\tilde{y}_n|\le h_n^y,$$

де $h_n^c, h_n^d, h_n^x, h_n^y$ - задана точність. Тоді модель процесу $W_\alpha(t)$ має вигляд

$$\tilde{S}_\alpha(t, M) = \sum_{n=1}^{M} \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) X_n + \sum_{n=1}^{M} \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) Y_n,$$

Похибка моделювання $\Delta(t)$ рівна $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$.

На основі робіт [3] – [4] має місце теорема.

Теорема 1. *Модель* $\tilde{S}_\alpha(t, M)$ *наближає процес* $W_\alpha(t)$ *з точністю* $\delta > 0$ *і надійністю* $1 - \varepsilon > 0, \varepsilon \in (0,1)$ *в просторі* $L_2([0,T])$, *якщо виконуються нерівності*

$$B_M \le \delta^2,$$

та

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B_M}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_M}\right\} \le \varepsilon,$$

де

$$B_M = T \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(c_k^2 + 4d_k^2\right) + T \sum_{k=1}^{M} \left(\left(T c_k h_k^x + h_k^c\right)^2 + \left(T d_k h_k^y + 2h_k^d\right)^2 \right).$$

Доведення. Розглянемо

$$E\big(W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)\big)^2 =$$

$$= E\big(W_\alpha(t) - S_\alpha(t, M) + S_\alpha(t, M) - \tilde{S}_\alpha(t, M)\big)^2 =$$

$$= E\Big(\sum_{n=M+1}^{\infty} \big(c_n \sin(x_n t) X_n + d_n(1 - \cos(y_n t)) Y_n\big) +$$

$$\sum_{n=1}^{M} \Big((c_n \sin(x_n t) - \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)) X_n + (d_n(1 - \cos(y_n t)) - \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) Y_n)\Big)\Big)^2 \le$$

$$\le E\Big(\sum_{n=M+1}^{\infty} \big(c_n \sin(x_n t) X_n + d_n(1 - \cos(y_n t)) Y_n\big)\Big)^2 +$$

$$E\Big(\sum_{n=1}^{M} \Big((c_n \sin(x_n t) - \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)) X_n + (d_n(1 - \cos(y_n t)) - \tilde{d}_n (1 - \cos(\tilde{y}_n t)) Y_n)\Big)\Big)^2 =$$

$$= E(D_1)^2 + E(D_2)^2.$$

За перетвореннями, аналогічними [6] отримаємо

$$E(D_1)^2 = E\Big(\sum_{n=M+1}^{\infty} \big(c_n \sin(x_n t) X_n + d_n(1 - \cos(y_n t)) Y_n\big)\Big)^2 \le$$

$$\le \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(c_n^2 + 4d_n^2\right).$$

Для $E(D_2)^2$ маємо

$$E(D_2)^2 \le \sum_{n=1}^{M}\bigl(c_n\sin(x_nt)-\tilde{c}_n\sin(\tilde{x}_nt)\bigr)^2+$$

$$\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_n(1-\cos(y_nt))-\tilde{d}_n(1-\cos(\tilde{y}_nt))\bigr)^2=A_1^2+A_2^2.$$

Для A_1^2 отримаємо

$$A_1^2=\sum_{n=1}^{M}\bigl(c_n\sin(x_nt)-c_n\sin(\tilde{x}_nt)+c_n\sin(\tilde{x}_nt)-\tilde{c}_n\sin(\tilde{x}_nt)\bigr)^2=$$

$$=\sum_{n=1}^{M}\bigl(c_n(\sin(x_nt)-\sin(\tilde{x}_nt))+(c_n-\tilde{c}_n)\sin(\tilde{x}_nt)\bigr)^2\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{M}\bigl(c_n|x_n-\tilde{x}_n|t+|c_n-\tilde{c}_n|\bigr)^2=\sum_{n=1}^{M}\bigl(c_nh_n^xt+h_n^c\bigr)^2.$$

Для A_2^2 отримаємо

$$A_2^2=\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_n(1-\cos(y_nt))-d_n(1-\cos(\tilde{y}_nt))+d_n(1-\cos(\tilde{y}_nt))-\tilde{d}_n(1-\cos(\tilde{y}_nt))\bigr)^2\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_n(-\cos(y_nt)+\cos(\tilde{y}_nt))+|d_n-\tilde{d}_n|(1-\cos(\tilde{y}_nt))\bigr)^2\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_n|y_n-\tilde{y}_n|t+2|d_n-\tilde{d}_n|\bigr)^2=\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_nh_n^yt+2h_n^d\bigr)^2.$$

На основі леми 1.13 [9] для строго субгауссівського процесу $S(t)=W_\alpha(t)-\tilde{S}_\alpha(t,M)$ маємо

$$P\Bigl\{\int_T S^2(t)d\mu(t)>\delta\Bigr\}\le\exp\Bigl\{\frac{1}{2}\Bigr\}\biggl(\frac{\delta}{\int_T(ES^2(t)d\mu(t))}\biggr)^{\frac{1}{2}}\exp\Bigl\{-\frac{\delta}{2\int_T(ES^2(t)d\mu(t))}\Bigr\}.$$

Таким чином,(нехай $d\mu(t)=dt$)

$$B_M\le\int_0^T\Bigl(\sum_{n=M+1}^{\infty}\bigl(c_n^2+4d_n^2\bigr)+\sum_{n=1}^{M}\bigl(c_nh_n^xt+h_n^c\bigr)^2+\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_nh_n^yt+2h_n^d\bigr)^2\Bigr)dt\le$$

$$\le T\sum_{n=M+1}^{\infty}\bigl(c_n^2+4d_n^2\bigr)+T\sum_{n=1}^{M}\bigl(c_nh_n^xT+h_n^c\bigr)^2+T\sum_{n=1}^{M}\bigl(d_nh_n^yT+2h_n^d\bigr)^2.$$

Теорему доведено.

Аналогічно, спираючись на теорему 1.3 та теорему 1.5 із [9], отримуємо такі результати:

Теорема 2. *Модель $\tilde{S}_\alpha(t, M)$ наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю $1 - \varepsilon > 0, \varepsilon \in (0, 1)$ в просторі $L_p([0, T]), p > 0$, якщо виконуються нерівності*

$$p^{\frac{1}{2}}(\mu(T))^{\frac{1}{p}} Z_M \leq \delta^2$$

та

$$2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2(\mu(T))^{\frac{2}{p}} Z_M^2}\right\} \leq \varepsilon,$$

де

$$Z_M^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(c_k^2 + 4d_k^2\right) + \sum_{k=1}^{M} \left(\left(Tc_k h_k^x + h_k^c\right)^2 + \left(Td_k h_k^y + 2h_k^d\right)^2\right).$$

Нехай $U(x), x \in R$ така C-функція Орліча, що функція

$$G_U(t) = \exp\left\{\left(U^{(-1)}(t-1)\right)^2\right\}, t \geq 1,$$

опукла при $t \geq 1$, $U^{(-1)}(t)$ - функція обернена до $U(t)$. Приклади таких функцій наведені в роботі [9].

Теорема 3. *Модель $\tilde{S}_\alpha(t, M)$ наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю $1 - \varepsilon > 0, \varepsilon \in (0, 1)$ в просторі $L_U([0, T])$, якщо виконуються нерівності*

$$\mu(T) Z_M (2 + (U^{(-1)}(1))^{-2})^{\frac{1}{2}} \leq \delta^2,$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta U^{(-1)}(1)}{Z_M \mu(T)} \exp\left\{-\frac{\delta^2 (U^{(-1)}(1))^2}{2Z_M^2 (\mu(T))^2}\right\} \leq \varepsilon,$$

де

$$Z_M^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(c_k^2 + 4d_k^2\right) + \sum_{k=1}^{M} \left(\left(Tc_k h_k^x + h_k^c\right)^2 + \left(Td_k h_k^y + 2h_k^d\right)^2\right).$$

Розрахунок параметрів моделі. Побудуємо модель строго субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для різних α з заданими точністю $\delta = 0.1$ та надійністю $\varepsilon = 0.05$ в просторі $L_2([0, T])$. Для визначення параметрів моделі, оцінимо B_M зверху, оскільки функція $f(x) = x\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$ монотонно спадає при $x > 1$. Для обчислення функції Бесселя використаємо її асимптотичне зображення [8]

$$J_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\left(\cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\alpha^2 - 1}{8x}\sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

при $x \to \infty$. Нехай $h_n^c = h_n^d = h_n^x = h_n^y = h$.

При $\alpha = 0.3$ маємо $M = 150000$ та $h = 0.00002$. На рис. 1 представлені відповідні реалізації строго субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

При $\alpha = 0.5$ (стандартний вінерівський процес) маємо $M = 550$ та $h = 0.0002$. На рис. 2 зображені відповідні реалізації строго субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

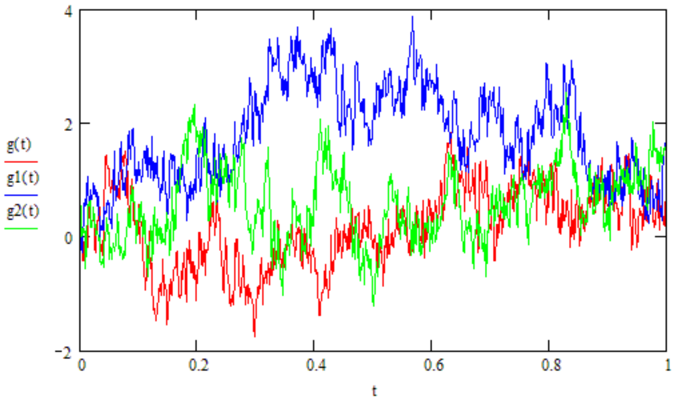

Рис. 1

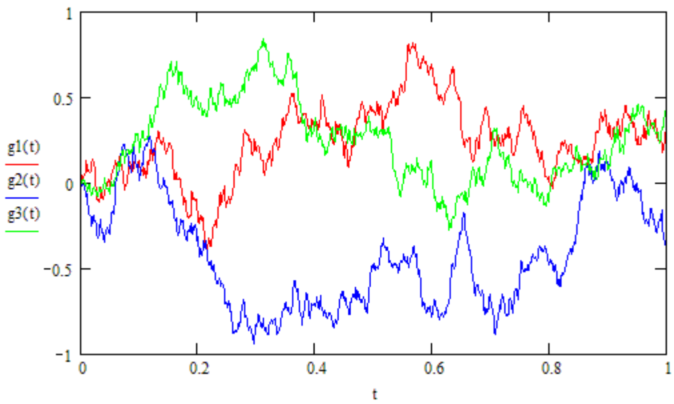

Рис. 2

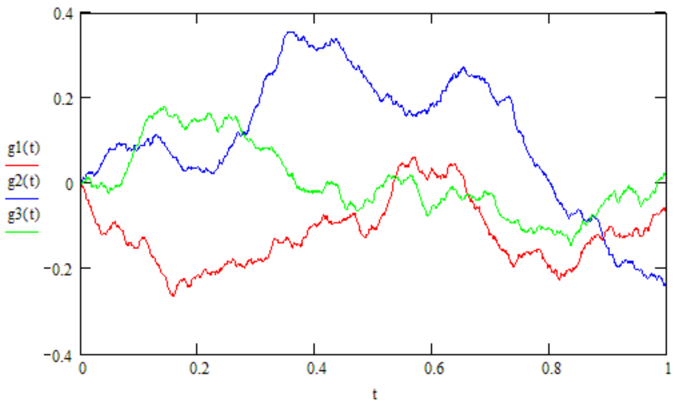

Рис. 3

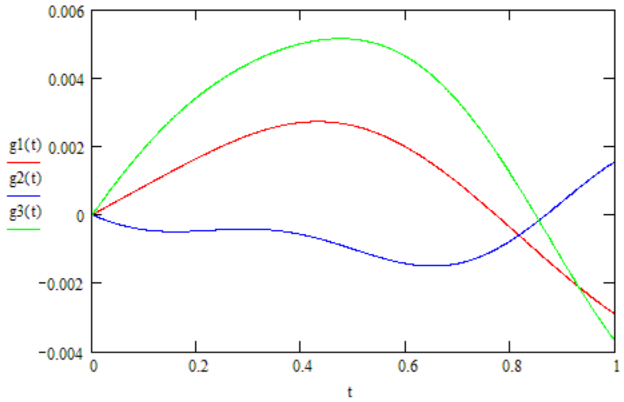

Рис. 4

При $\alpha = 0.8$ маємо $M = 25$ та $h = 0.001$. На рис. 3 зображені відповідні реалізації строго субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

Висновки. Неважко помітити, що при зростанні α значення M зменшуються. Чим ближче α до 1, тим гладша реалізація, а при $\alpha = 0.9999$ (рис. 4) реалізації попадають в діапазон допустимих похибок. Теоретично, при $\alpha = 1$ дробовий броунівський рух вироджується в пряму лінію.

Отримані оцінки можна використовувати при моделюванні дробового броунівського руху в задачах фінансової та актуарної математики, при обчисленні інтегралів, а також, в інших галузях, де використовуються методи статистичного моделювання випадкових процесів. Заслуговує на увагу використання таких оцінок при моделюванні зображення дробового броунівського процесу у вигляді стохастичного інтеграла.

1. *Ермаков С. М.,Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296с.
2. *Пригарин С. М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей. – Новосибирск, 2005. –259 с.
3. *Козаченко Ю. В.,Пашко А. О.* Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича I // Теор. ймов. та мат. статистика. – 1998. – Вип. 58. – С. 45–60.
4. *Козаченко Ю. В.,Пашко А. О.* Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича II // Теор. ймов. та мат. статистика. – 1998. – Вип. 59. – С. 75–90.
5. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К.: ТВиМС, 1998. – 289с.
6. *Kozachenko Yu. V.,Sottien T., Vasylyk O. I.* Simulation of weakly self-similar stationary increment $Sub_{\varphi}(\Omega)$ -processes: a series expansion approach //Methodology and computing in applied probability. –2005. –7. – P. 379–400.
7. *Dzhaparidze K. O.* A series expansion of fractional Brownian motion // CWI. Probability, Networks and Algorithms, R0216.
8. *Вигдорович И. И., Алексин В. А.* Асимптотические разложения корней алгебраических уравнений. – М.:МГИУ, 2007. –38с.
9. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В.* Моделювання випадкових процесів та полів. – К.:Задруга, 2007. – 230с.

Одержано 23.05.2014