

УДК 517.9

С. Г. Хома-Могильська (Тернопільський нац. екон. ун-т)

ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

For boundary-value 2π -periodic problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, we established that unique classical solution may be in form $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, where $u^0(x, t)$ – is a solution of the corresponding homogeneous periodic problem and $\tilde{u}(x, t)$ – is a partial solution of the non-homogeneous equation such as $\tilde{u}(x, t + 2\pi) = \tilde{u}(x, t)$, in the two cases: 1) $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$, $u^0(x, t) \equiv 0$; 2) $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, $u^0(x, t) \neq 0$.

Для крайової 2π -періодичної задачі $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, встановлено, що єдиний класичний розв'язок може існувати у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, де $u^0(x, t)$ – розв'язок відповідної однорідної періодичної задачі, а $\tilde{u}(x, t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння такий, що $\tilde{u}(x, t + 2\pi) = \tilde{u}(x, t)$, у двох випадках: 1) $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$, $u^0(x, t) \equiv 0$; 2) $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, $u^0(x, t) \neq 0$.

Важливим етапом при дослідженні крайових задач є встановлення умов існування та побудова розв'язку. У роботі [1] вперше, на нашу думку, встановлено загальні умови розв'язності крайової ω – періодичної задачі вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t + \omega) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Якщо припустити, що існує частинний розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ задачі (1), (3) такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$, то умови існування розв'язку задачі (1)–(3) мають вигляд [1, с. 915]:

$$\begin{aligned} B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k t + A_k^3 \sin \nu_k t) + \tilde{u}(0, t) &= 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos \nu_k \pi + A_k^2 \sin \nu_k \pi) \cos \nu_k t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos \nu_k \pi + A_k^4 \sin \nu_k \pi) \sin \nu_k t + \tilde{u}(\pi, t) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де A , B , A_k^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathbb{N}$, – невідомі коефіцієнти, $\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega}$.

Зрозуміло, що система (4) може мати різну структуру в залежності від вибору періоду ω та частинного розв'язку $\tilde{u}(x, t)$ періодичної задачі (1), (3).

Побудуємо розв'язок крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ у випадку, коли замість розв'язку $\tilde{u}(x, t)$ покласти функцію

$$\tilde{u}_1(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv (S_1 g)(x, t). \tag{5}$$

Покладаючи $\omega = 2\pi$ і враховуючи формулу (5), одержимо таку систему:

$$\begin{aligned}
B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos kt + A_k^3 \sin kt) + 0 &= 0, \\
A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \cos k\pi + A_k^2 \sin k\pi) \cos kt + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^3 \cos k\pi + A_k^4 \sin k\pi) \sin kt + \tilde{u}_1(\pi, t) &= 0,
\end{aligned}$$

З першого рівняння випливає, що $B = 0$, $A_k^1 = 0$, $A_k^3 = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів B , A_k^1 , A_k^3 , $k \in \mathbb{N}$, у друге рівняння, одержимо $A = -\frac{1}{\pi} \tilde{u}_1(\pi, t)$.

На основі отриманих результатів і враховуючи формулу (5), розв'язок крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ матиме вигляд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt) \sin kx + (S_1 g)(x, t) - \frac{x}{\pi} (S_1 g)(\pi, t), \quad (6)$$

де A_k^2 , A_k^4 , $k \in \mathbb{N}$, – довільні сталі. А це означає, що крайова періодична задача (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ має безліч розв'язків. На основі формули (6) стверджуємо, що розв'язок вказаної задачі буде єдиним, коли однозначно будуть визначені коефіцієнти A_k^2 , A_k^4 , $k \in \mathbb{N}$. А це можливо у двох випадках:

- 1) $A_k^2 = 0$, $A_k^4 = 0$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) A_k^2 та A_k^4 – конкретні числа.

У першому випадку впливає справедливість результатів О.Вейводи–М.Штедри [2]– [4], а в другому – результат П.Рабиновича [5, 6].

Слід зазначити, що для визначення коефіцієнтів A_k^2 та A_k^4 , $k \in \mathbb{N}$, не задано додаткових умов. Це спонукає до додаткових досліджень. З іншого боку, формула (6) не завжди є розв'язком рівняння (1), оскільки невідомо, яке значення набуває функція $(S_1 g)(x, t)$ при $x = \pi$.

Враховуючи вище зроблені зауваження відносно розв'язності крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$, нами встановлене наступне твердження.

Використовуючи для функції $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$ зображення

$$\frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{x}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt) \sin kx,$$

де $A_k^2 = a_k/k$, $A_k^4 = b_k/k$, $k \in \mathbb{N}$, a_k , b_k – коефіцієнти ряду Фур'є функції

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

розв'язок (6) крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ можна записати так:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha \right\}. \quad (7)$$

Теорема. Нехай $g \in C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$ і $g(x, t + 2\pi) = g(x, t)$. Тоді для кожної функції $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$, яка задовольняє рівняння

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau,$$

функція

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv u^0(x, t) + (S_1g)(x, t)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$.

На основі сформульованої теореми можна зробити висновок, що існування розв'язків крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ потрібно досліджувати і у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + (S_1g)(x, t)$, де $u^0(x, t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$.

Це ілюструє наступний розв'язок

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} x \sin x \sin t,$$

де $\mu(t)$ – неперервна і 2π – періодична функція така, що $\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = 0$, крайової 2π – періодичної задачі:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= \cos x \sin t, & 0 < x < \pi, & \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t &\in \mathbb{R}, \\ u(x, t + 2\pi) &= u(x, t), & 0 \leq x \leq \pi, & \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 7. – С. 912–921.
2. Vejvoda O. Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension // Czech. Math. J. – 1964. – 14, № 3. – P. 341–382.
3. Vejvoda O., Stedry M. Periodic solutions to weakly nonlinear autonomous wave equations in one dimension // Czech. Math. J. – 1975. – 25, № 4. – P. 536–555.

4. *Вейвуда О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
5. *Rabinovitz P.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145–205.
6. *Rabinovitz P.* Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // Ibid. – 1969. – **22**, № 1. – P. 15–39.

Одержано 26.05.2014