УДК 512.643.8

М. Ю. Бортош (Інститут математики НАН України, Київ)

ПРО ОДИН КЛАС ЗВІДНИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

It is proved the reducibility of monomial matrices of some form over a commutative ring.

Доведена звідність мономіальних матриць деякого вигляду над комутативним кільцем.

Задача про класифікацію, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем (що не є полем) як правило дуже важка; в більшості випадків вона є дикою, як у випадку кілець класів лишків [1], і розв'язана лише над деякими кільцями головних ідеалів для матриць малих порядків (див., напр., [2]– [4]). В такій ситуації більш важливою стає задача про вивчення незвідних та звідних матриць над кільцями.

У ряді робіт (див., напр., [5], [6]) вивчалися властивості матриць над комутативним кільцем вигляду

$$M(t, s_1, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

де $s_1 \ldots, s_n \in \{0, 1\}$, і, зокрема, їх звідність чи незвідність (основним випадком є випадок, коли t не є оборотним). Тут і надалі замість трьох горизонтальних і вертикальних крапок завжди стоять нульові елементі, а три діагональні крапки можут означати як нульові, так і ненульові елементи (в кожному конкретному випадку очевидно, про які елементи йде мова).

Ми розглядаємо наступний частинний випадок цієї задачі:

$$M(t, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2l+1}, a_1, a_2, \ldots, a_m, 1, 1, 1) = \begin{array}{c} \begin{array}{l} \overbrace{\hphantom{0\ 0\ \ldots\ 0}}^{2l+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad (1)$$

де $a_i \in \{0, 1\}$ і $l > 0, m \geq 0$ — цілі числа. Ця матриця має розмір $n \times n$, де $n = 2l + m + 4$. Число $l + m + 1$ позначимо через s.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне кільце характеристики 2 і t — його ненульовий елемент. Якщо $n \geq 8$, то матриця (1) звідна над кільцем K.*

Доведення. Схема доведення (разом з її реалізацією у випадку $m = 0$) запропонована В. М. Бондаренком [7].

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccccccc|ccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \ldots\ 0}}^{l+1}} & & & & & & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \ldots\ 1}}^{l}} & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
1 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0
\end{array}\right),$$

яку зручно трактувати, як суму матриці N_1, яка є прямою сумою матриці

$$M(t, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{l+1}, a_1, a_2, \ldots, a_m, 1, 1) = \left(\begin{array}{cccccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \ldots\ 0}}^{l+1}} & & & & & & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_m & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0
\end{array}\right)$$

та матриці

$$M(t, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{l}, 1) = \left(\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \ldots\ 0}}^{l}} & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & t \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0
\end{array}\right),$$

і матриці

$$N_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} & & & l+2 & & & & & & & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Покладемо

$$C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} & & & & & l+2 & & s+2 & & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ s+3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & \dots & t & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тоді

$$C^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} & & & & & l+2 & & s+2 & & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ s+3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & \dots & t & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Безпосереднім перемноженням матриць отримуємо рівність

$$
C^{-1}NC=\left(\begin{array}{cccccccccc|ccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \dots\ 0}}^{l+1}} & & & & & & & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 1}}^{l}} & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right). \qquad (2)
$$

Мономіальна матриця, яка стоїть в правій частині рівності (2) (однаковою) перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду

$$
M(t,\underbrace{0,0,\dots,0}_{2l+1},a_1,a_2,\dots,a_m,1,1,1)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ 0\ \dots\ 0}}^{2l+1}} & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t\\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

Теорема 1 доведена.

Розглянемо один приклад.

Як і раніше, ми розглядаємо матриці над комутативним кільцем K і t позначає його ненульовий елемент.

За теоремою 1 матриця $M(t,0,0,0,1,0,1,1,1)$ є звідною. Ми продемонструємо доведення теореми 1 у цьому частинному випадку.

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

і покладемо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і беспосереднім перемноженням матриць отримуємо рівність

$$C^{-1}NC = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array}\right),$$

причому мономіальну матрицю, яка стоїть у правій частині цієї рівності (одночасною) перестановкою рядків та стовпців можна привести до вигляду

$$M(t,0,0,0,1,0,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Бондаренку за постановку задачі та корисні поради.

1. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов // Математический сборник. – Киев: Из-во "Наукова думка", 1976. – С. 275–277.
2. *Шевченко В. Н., Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
3. *Pizarro A.* Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – **54**. – P. 29–51.
4. *Prasad A., Singla P., and Spallone S.* Similarity of matrices over local rings of length two// `http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf`.
5. *Динис Р. Ф., Тилищак О. А.* Про звідність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, №1. – С. 57–62.
6. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16, N2**. – P. 171–187.
7. *Бондаренко В. М.* Про один метод доведення звідності мономіальних матриць // Усне повідомлення. – 2013.

Одержано 09.06.2014