УДК 512.84

А. А. Кирилюк (Ужгородський національний університет)

КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $GL(3,\mathbb{Z}_p)$

Oll finite subgroups of the group $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ ($\mathbb{Z}_p$ – is the rihg of the rational p-adic integers) are described up to conjugasy for $n \leq 3$.

Всі скінченні підгрупи групи $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ ($\mathbb{Z}_p$ – кільце цілих раціональних p-адичних чисел) описані з точністю до спряженості для $n \leq 3$.

Пусть K – область целостности с единицей, $\mathbb{Q}_p$ – поле рациональных p-адических чисел с кольцом целых величин $\mathbb{Z}_p$), $\bar{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ и $GL(n,K)$ – полная линейная группа степени n над кольцом K.

Все конечные подгруппы группы $GL(n,K)$ описаны с точностью до сопряженности в случае, когда $K = \mathbb{Z}$ – кольцо целых рациональных чисел и $n \leq 4$ (см. [1,2]). В [3] описаны с точностью до сопряженности все неприводимые конечные подгруппы группы $GL(5,\mathbb{Z})$.

В настоящей работе на основании методов теории целочисленных представлений групп классифицируются с точностью до сопряженности конечные подгруппы группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ при $n \leq 3$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $A, B, C \in GL(n,\mathbb{Z}_p)$. Подгруппу $V \in GL(n,\mathbb{Z}_p)$, порождённую матрицами A и B, обозначим $V = \{A, B\}$, а через $W = \{V, C\}$ – подгруппу группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$, порождённую матрицами A, B и C. C_m обозначает циклическую группу порядка m, $G \times H$ – прямое произведение групп G и H. Символами D_m, K_m, A_m, S_m обозначим группы диедра и кватернионов порядка $2m$, знакопеременную и симметрическую группы степени m соответственно. Обозначим далее через $\bar{A}$ матрицу, полученную из матрицы $A \in GL(n,\mathbb{Z}_p)$ приведением всех элементов A по модулю идеала $p\mathbb{Z}_p$. Пусть

$$f : GL(n,\mathbb{Z}_p) \longrightarrow GL(n,\bar{\mathbb{Z}}_p) \tag{1}$$

– гомоморфизм Минковского, при котором для $A \in GL(n,\mathbb{Z}_p)$ $f(A) = \bar{A}$.

В дальнейшем часто будут использоваться следующие леммы:

Лемма 1 (см. [4]). *Пусть H – конечная подгруппа группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$. H изоморфна некоторой подгруппе $\bar{H}_1$ группы $GL(n,\bar{\mathbb{Z}}_p)$ при $p \neq 2$ и $H \cong \bar{H}_2 \subset GL(n,\bar{\mathbb{Z}}_4)$ при $p = 2$ ($\bar{\mathbb{Z}}_4 = \mathbb{Z}_2/4\mathbb{Z}_2$).*

Лемма 2 (см. [4]). *Пусть V_1 и V_2 – конечные p'-подгруппы группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ и $\bar{V}_i = = f(V_i)$ $(i = 1, 2)$. Группы V_1 и V_2 тогда и только тогда сопряжены в группе $GL(n,\mathbb{Z}_p)$, когда $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ сопряжены в группе $GL(n,\bar{\mathbb{Z}}_p)$.*

Так как всякая конечная p'-подгруппа группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ вполне приводима и любая p'-подгруппа из $GL(n,\bar{\mathbb{Z}}_p)$ поднимается до некоторой конечной p'-подгруппы группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$, то в силу леммы 2 описание с точностью до сопряженности конечных p'-подгрупп группы $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ сводится к описанию несопряженных неприводимых p'-подгрупп группы $GL(n,\bar{\mathbb{Z}}_p)$. Поскольку группа $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ при $n \leq 3$ и $p > 3$ не содержит p-подгрупп, а неприводимые подгруппы группы $GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p)$ $(n \leq 3)$ описаны в [6–8], из вышесказанного получаем описание с точностью до сопряженности всех конечных подгрупп группы $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ $(n \leq 3; p > 3)$.

Таким образом при $n \leq 3$ осталось классифицировать несопряженные конечные подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ лишь для $p = 2$ и $p = 3$. Такая классификация приводится ниже.

1.Конечные подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Z}_2)$, $(n \leq 3)$

Приведем следующий результат из [4].

Предложение 1 [4]. *Конечные подгруппы группы* $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ *с точностью до сопряженности исчерпываются следующими группами*:

1) *абелевыми группами*

$$V_0 = \{E\};\ V_1 = \{-E\};\ V_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\};\ V_3 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\};$$

$$V_4 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \{\widetilde{\varepsilon}\};\ V_5 = \{V_2, -E\};\ V_6 = \{V_3, -E\};$$

$$V_7 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \{\widetilde{i}\};\ V_8 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \{-\widetilde{\varepsilon}\},$$

где $V_0 \cong C_1$; $V_1 \cong V_2 \cong V_3 \cong C_2$; $V_4 \cong C_3$; $V_5 \cong V_6 \cong C_2 \times C_2$; $V_7 \cong C_4$; $V_8 \cong C_6$, E – *единичная матрица*;

2) *неабелевыми группами*

$$U_1 = \{\widetilde{\varepsilon}, V_3\};\ U_2 = \{\widetilde{i}, V_3\};\ U_3 = \{-\widetilde{i}, V_3\}; U_4 = \left\{\widetilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \theta + \tau & -\theta \end{pmatrix}\right\} = \{\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{i}_1\},$$

где (θ, τ) – *некоторое решение уравнения* $x^2 + xy + y^2 = -1$ *в кольце* $\mathbb{Z}_2$, $U_1 \cong S_3 : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$; $U_2 \cong D_4 : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$; $U_3 \cong D_6 : a^6 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$; $U_4 \cong G_1 : a^3 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$.

Пусть W – конечная подгруппа группы $GL(3, \mathbb{Z}_2)$. В силу леммы 1 имеем

$$|W| \,\Big|\, 2^{12} \cdot 3 \cdot 7. \tag{2}$$

Предложение 2. *С точностью до сопряженности* p*-подгруппы группы* $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ *исчерпываются группами* $V_1, \ldots, V_{38}$, *где*

1) $V_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix}\right\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* C_3;

2) $V_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}\right\} = \{\widetilde{\varepsilon}\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* C_7

$(\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4$, ξ – *первообразный корень степени* 7 *из* 1);

3) $V_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \{A_1, B_1, -E\}$;

$$V_4=\left\{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}=\{A_2,B_2,-E\}\ –$$

подгруппы, изоморфные группе $D_4\times C_2$;

$V_5=\{A_1,\,B_1\}$; $V_6=\{A_1,\,-B_1\}$; $V_7=\{-A_1,\,B_1\}$; $V_8=\{-A_1,\,-B_1\}$;

$V_9=\{A_2,\,B_1\}$; $V_{10}=\{A_2,\,-B_1\}$; $V_{11}=\{-A_2,\,B_1\}$; $V_{12}=\{-A_2,\,-B_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* D_4;

$V_{13}=\{A_1^2,B_1,-E\}$; $V_{14}=\{A_1^2B_1,B_1,-E\}$; $V_{15}=\{A_2^2,B_1,-E\}$;

$V_{16}=\{A_2^2B_1,B_1,-E\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $C_2\times C_2\times C_2$;

$V_{17}=\{A_1,-E\}$; $V_{18}=\{A_2,-E\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $C_4\times C_2$;

$V_{19}=\{A_1^2,-E\}$; $V_{20}=\{A_1^2,B_1\}$; $V_{21}=\{B_1,-E\}$; $V_{22}=\{A_1^2,-B_1\}$; $V_{23}=\{-A_1^2,B_1\}$;

$V_{24}=\{A_1B_1,-A_1^2\}$; $V_{25}=\{A_1B_1,A_1^2\}$; $V_{26}=\{A_2^2,B_1\}$; $V_{27}=\{A_2^2,-B_1\}$;

$V_{28}=\{A_2B_1,A_2^2\}$; $V_{29}=\{-A_2^2,B_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $C_2\times C_2$;

$V_{30}=\{A_1\}$; $V_{31}=\{-A_1\}$; $V_{32}=\{A_2\}$; $V_{33}=\{-A_2\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_4;

$V_{34}=\{-E\}$; $V_{35}=\{-A_1^2\}$; $V_{36}=\{A_1^2\}$; $V_{38}=\{B_1\}$; $V_{39}=\{-B_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_2.

Доказательство. Пусть H_p – силовская p-подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2$. В силу (2) $p\le 7$. Из [9] и предложения 1 вытекает, что $H_2\cong D_4\times C_2$ и $H_3\cong C_3$. Покажем, что $H_7\cong C_7$. Очевидно,

$$\Phi_7(x)=f_1(x)\cdot f_2(x), \tag{3}$$

где $\Phi_7(x)$ – полином деления круга порядка 7. а $f_i(x)$ – неприводимый над $\mathbb{Z}_2$ полином степени 3 ($i=1,2$). Если ξ – первообразный корень степени 7 из 1, то над кольцом $\mathbb{Z}_2[\xi]$ имеет место разложение

$$\Phi_7(x)=(x-\xi)\cdots(x-\xi^6). \tag{4}$$

Пусть G – группа Галуа поля $\mathbb{Q}_2(\xi)$ над полем $\mathbb{Q}_2$. Легко видеть, что $G=(\varphi)$, где $\varphi^3=1$ и $\varphi(\xi)=\xi^3$. Тогда из (3) и (4) вытекает

$$f_1(x)=(x-\xi)(x-\xi^2(x-\xi^6)=x^3-\alpha x^2-(\alpha+1)x-1,$$

где $\alpha=\xi+\xi^2+\xi^4$. Поскольку $\varphi(\alpha)=\alpha$, то $\alpha\in\mathbb{Z}_2$. Полиному $f_1(x)$ соответствует неприводимое $\mathbb{Z}_2$-представление группы $C_7=(a)$:

$$\Gamma: a\to\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&\alpha+1\\0&1&\alpha\end{pmatrix}=\widetilde{\xi}.$$

Легко проверить, что группа $I_m\Gamma$ – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 7 группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$. Отсюда получаем, что $H_7\cong C_7$ и H_7

сопряжена с $I_m\Gamma$ в $GL(3,\mathbb{Z}_2$. Используя предложение 1 нетрудно показать, что 3-подгруппа Силова группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ сопряжена с группой V_1. Опишем теперь 2-подгруппы группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$. В силу [9] и предложения 1 силовская 2-подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ изоморфна группе

$$D_4\times C_2 : a^4=b^2=c^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1},\ ac=ca,\ bc=cb.$$

Пусть Γ – точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы $D_4\times C_2$. Из предложения 1 и [10] вытекает, что Γ можно представить в виде:

$$\Gamma : a\to\begin{pmatrix}\gamma&0&\beta\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\Gamma_a,\ b\to\begin{pmatrix}\delta&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\Gamma_b,\ c\to\Gamma_c,$$

где $\gamma,\delta=\pm1$; $\beta=0,1$. Из соотношений $\Gamma_a\Gamma_c=\Gamma_c\Gamma_a$, $\Gamma_b^2=E$ и $\Gamma_b\Gamma_c=\Gamma_c\Gamma_b$ легко получить, что

$$\Gamma_c=\pm\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\pm D,\ \Gamma_c=\pm E.$$

Легко видеть, что группа $U_1=\{\Gamma_a,\Gamma_b,\pm D\}$ сопряжена в $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ с группой $U_2=\{\Gamma_a,\Gamma_b,-E\}$, а группы V_3 и V_4 не сопряжены.

Так как всякая 2-подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, то из вышедоказанного можно получить описание с точностью до сопряженности всех 2-подгрупп группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Если W – конечная подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, то*

$$|W||2^4\cdot3\cdot7. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть K – коммутативное кольцо с 1, G – конечная группа и $H\le G$. Пусть $\widetilde{H}$ – подгруппа группы $GL(n,K)$, изоморфная H и $\mathfrak{N}(G,\widetilde{H})$ – множество всех таких представителей классов сопряженных подгрупп группы $GL(n,K)$, изоморфных группе G, которые содержат $\widetilde{H}$. Если $\widetilde{G}$–подгруппа группы $GL(n,K)$, изоморфная G, то $\widetilde{G}$ тогда и только тогда сопряжена с некоторой группой из $\mathfrak{N}(G,\widetilde{H})$, когда $\widetilde{G}$ содержит подгруппу $\widetilde{N}$, сопряженную с $\widetilde{H}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\widetilde{G}$ сопряжена в $GL(n,K)$ с некоторой группой $U\subset\mathfrak{N}(G,\widetilde{H})$, т.е. существует матрица $C\in GL(n,K)$, такая, что $C^{-1}\widetilde{G}C=U$ и $\{\widetilde{N}_\alpha|\alpha\in J\}$ – все подгруппы группы $\widetilde{G}$, изоморфные H. Тогда $C^{-1}\widetilde{N}_\alpha C\subset U$ и найдется такое $\alpha_0\in J$, что $C^{-1}\widetilde{N}_{\alpha_0}C=\widetilde{H}$.

Достаточность. Пусть $\widetilde{N}\subseteq\widetilde{G}$ сопряжена с $\widetilde{H}$, т.е. $C^{-1}\widetilde{N}C=W$ – группа, содержащая $\widetilde{H}$ и, следовательно, сопряжена с некоторой группой из $\mathfrak{N}(G,\widetilde{H})$. Лемма доказана.

Предложение 3. *Конечные подгруппы порядков $2^m\cdot3$ $(1\le m\le4)$ группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ с точностью до сопряженности исчерпываются группами $W_1,\dots,W_{30}$, где*

1) $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix}\right\}$; $W_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix}\right\}$; $W_3 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix}\right\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_6;

2) $W_4 = \{V_1, B_1\}$; $W_5 = \{V_1, -B_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* S_3;

3) $W_6 = \{W_3, -E\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $C_6 \times C_2$;

4) $W_7 = \{W_1, B_1\}$; $W_8 = \{W_2, -B_1\}; W_9 = \{W_3, B_1$ – *подгруппы, изоморфные группе* D_6;

5) $W_{10} = \left\{V_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{i}_1 \end{pmatrix}\right\}$; $W_{11} = \left\{V_1, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \widetilde{i}_1 \end{pmatrix}\right\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $G_1 : a^3 = b^4 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}$;

6) $W_{12} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \{A_3, B_2\}$; $W_3 = \left\{A_3, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$;

$W_{14} = \left\{A_3, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $A_4 : a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1$;

7) $W_{15} = \{W_8, -E\}$; $W_{16} = \{W_8, A_1^2\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $D_6 \times C_2$;

8) $W_{17} = \{W_{10}, -E\}$; $W_{18} = \{W_{11}, -E\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $G_1 \times C_2$;

9) $W_{19} = \{W_{12}, -E\}$; $W_{20} = \{W_{13}, -E\}$; $W_{21} = \{W_{14}, -E\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $A_4 \times C_2$;

10) $W_{22} = \left\{A_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \{A_3, B_3\}$; $W_{23} = \{A_3, -B_3\}$;

$W_{24} = \left\{A_3, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \{A_3, B_4\}$; $W_{25} = \{A_3, -B_4\}$;

$W_{26} = \left\{A_3, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \{A_3, B_5\}$; $W_{27} = \{A_3, -B_5\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $S_4 : a^3 = b^4 = (ab)^2 = 1$;

11) $W_{28} = \{W_{22}, -E\}$; $W_{29} = \{W_{24}, -E\}$; $W_{30} = \{W_{27}, -E\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $S_4 \times C_2$.

Доказательство. Используя результаты работ [10–12] нетрудно получить описание с точностью до сопряженности всех подгрупп порядка ≤ 24 группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$.

Пусть теперь W – подгруппа порядка 48 группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ и P – силовская 2-подгруппа группы W. Тогда $|P| = 2^4$. В силу предложения 2 $P = \{P_1, -E\}$, где $P_1 = P \cap SL(3,\mathbb{Z}_2)$. Тогда $W = \{V, -E\}$, где V – подгруппа порядка 24 группы $SL(3,\mathbb{Z}_2)$ и силовская 2-подгруппа V изоморфна D_4. Поэтому из описания подгрупп порядка 24, группы $SL(3,\mathbb{Z}_2)$, силовская 2-подгруппа которых изоморфна D_4 вытекает, что V сопряжена с одной из групп W_{22}, W_{24} или W_{27}. Таким образом $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ содержит с точностью до сопряженности 3 подгруппы порядка 48. Предложение доказано.

Для описания групп порядка $2^m \cdot 3^s \cdot 7^k$ $(1 \leq m \leq 4;\ s,k = 0,1;\ s+k \neq 0)$ нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть G – группа порядка $2^m \cdot 3 \cdot 7$ $(m = 2,3,4)$. Если G не является разрешимой группой, то либо $G \cong PSL_2(7)$ – простая группа при $m=3$, либо G содержит нормальную подгруппу H такую что $H \cong PSL_2(7)$ или $G/H \cong PSL_2(7)$ при $m=4$.*

Доказательство леммы нетрудно получить на основании теоремы Шура о расщеплении (см. [13]).

Предложение 4. *Подгруппы порядка $2^m \cdot 3^s \cdot 7$ $(0 \leq m \leq 4; s = 0,1)$ группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ с точностью до сопряженности исчерпываются группами $U_1,\dots,U_5$, где*

1) $U_1 = \{-\widetilde{\xi}\}$ – *подгруппа, изоморфная* C_{14};

2) $U_2 = \left\{\widetilde{\xi}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $G_2 : a^7 = b^3 = 1$, $b^{-1}ab = a^2$ $(\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4;\ \xi^7 = 1)$;

3) $U_3 = \{U_2, -E\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $G_2 \times C_2$;

4) $U_4 = \left\{\widetilde{\xi}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha-1 \\ 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $G_3 \cong PSL_2(7); a^7 = b^2 = (ab) = (a^4b)^4 = 1$;

5) $U_5 = \{U_4, -E\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $G_3 \times C_2$.

Доказательство. Пусть T – подгруппа порядка $2^m \cdot 7$ группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$. Если $m = 1$, то существуют две неизоморфные абстрактные группы порядка 14: C_{14} и $D_7 : a^7 = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Поскольку $C_{14} \cong C_7 \times C_2$, то из леммы 3 нетрудно получить, что U_1 – единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, изоморфная C_{14}. Предположим, что группа D_7 обладает точным $\mathbb{Z}_2$-представлением Γ степени 3. Очевидно, Γ – абсолютно неприводимо, откуда $3||D_7|$, что абсурдно. Таким образом, D_7 не вложима в $GL(3,\mathbb{Z}_2)$.

Покажем, что группа $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ не содержит подгрупп порядка $2^m \cdot 7$ $(m \geq 2)$. Предположим противное, пусть G – абстрактная группа порядка $2^m \cdot 7$ $(m \geq 2)$, обладающая точным $\mathbb{Z}_2$-представлением Γ степени 3. Используя [4] легко показать, что G – неабелева, а Γ неприводимо. Тогда Γ – абсолютно неприводимо и, значит $3|2^m \cdot 7$, что невозможно. Отсюда $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ не содержит подгрупп порядка $2^m \cdot 7$ при $m \geq 2$.

Пусть T – подгруппа порядка 21 группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$. Очевидно, T – неабелева. Тогда $T \cong G_2$. Очевидно,

$$\Gamma : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \widetilde{\xi},\ b \to \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ (\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4;\ \xi^7 = 1) -$$

точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы G_2. Отсюда и из лемм 1, 2 вытекает, что группа $U_2 = I_m\Gamma$ – единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, $|U_2| = 21$.

Пусть G – абстрактная группа порядка 42. Тогда G либо абелева, либо метациклическая группа, порожденная двумя образующими a и b с определяющими соотношениями

1) $a^{14} = b^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^9$ или 2) $a^7 = b^6 = 1,\ b^{-1}ab = a^5$.

Если T – подгруппа порядка 42 группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, то очевидно T – неабелева группа. Легко видеть, что группа 1) изоморфна $G_2 \times C_2$ и из предыдущего вытекает, что U_3 – единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, изоморфная $G_2 \times C_2$.

Предположим теперь, что группа 2) вложима в $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ и Γ – точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 этой группы. Тогда можно предполагать, что Γ имеет вид: $\Gamma : a \to \widetilde{\xi},\ b \to \Gamma_b$. Легко проверить, что $tr\widetilde{\xi} \neq tr\widetilde{\xi}^5$ и Γ не точно, т.е. группа 2) не вкладывается в $GL(3,\mathbb{Z}_2)$.

Покажем, что группа $GL(3,\mathbb{Z}_2)$ не содержит разрешимых подгрупп порядка $2^m \cdot 3 \cdot 7$ при $m \geq 2$. Действительно, если V – разрешимая подгруппа порядка $2^m \cdot 3 \cdot 7$ $(m \geq 2)$, то V содержит холловскую подгруппу порядка $2^m \cdot 7$, что противоречит доказанному выше.

Пусть теперь $G_3 : a^7 = b^2 = (ab)^3 = (a^4b)^4 = 1$ – группа, изоморфная простой группе $PSL_2(7)$. Покажем, что G_3 обладает тчоными $\mathbb{Z}_2$-представлениями степени 3. В силу результатов Маранды (см. [5]) это утверждение достаточно доказать для кольца классов вычетов $\overline{Z}_{2^k}$ по $\mod 2^k$, где $k > k_0$, а k_0 определяется из равенства $|G_3|\mathbb{Z}_2 = 2^{k_0}\mathbb{Z}_2$. Очевидно, $k_0 = 3$.

Используя предложение 2, легко видеть, что представлениями

$$\Delta_1 : a \to 1; \Delta_2 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}; \Delta_3 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

исчерпываются все неэквивалентные неприводимые $\mathbb{Z}_2$-представления группы $C_7 = (a)$. Обозначим через $\Delta_i^{(k)}$ $(i = 1,2,3)$ $\overline{\mathbb{Z}}_{2^k}$-представления группы $C_7 = (a)$, такие, что

$$\overline{\Delta}_i^{(k)}(a) \equiv \Delta_i(a)(\mod 2^k\mathbb{Z}_2)\ (i = 1,2,3).$$

Очевидно, представлениями $\overline{\Delta}_i^{(k)}$ $(i = 1,2,3)$ исчерпываются до эквивалентности неприводимые $\overline{\mathbb{Z}}_{2^k}$-представления группы C_7.

1) Пусть $k = 1$, тогда $GL(3,2) = GL(3,\overline{\mathbb{Z}}_2)$. Легко видеть, что

$$\overline{\Gamma}_1 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1,\ b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1$$

задает $\overline{\mathbb{Z}}_{2^k}$-представления группы C_3. Очевидно, $\overline{\Gamma}_1$ – точно.

Пусть $U_! = \{A_1, B_1\}$, $U_2 = \{A_1, B_1'\}$ – группы, изоморфные группе G, $U_i = GL(3,2)$. Тогда существует автоморфизм φ группы $GL(3,2)$ такой, что $\varphi(A_1) = A_1$, $\varphi(B_1) = B_1'$. Как известно (см. [13]), все автоморфизмы группы $GL(3,2)$ стандартны. Тогда φ – внутренний автоморфизм группы $GL(3,2)$, либо $\varphi = \psi \cdot \tau$, где ψ – внутренний, а τ – контраградиентный автоморфизм группы $GL(3,2)$. В этом последнем случае

$$\psi \cdot \tau(A_1) = \psi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 = \psi(A_1')$$

и найдется матрица $C \in GL(3,2)$, такая, что $C^{-1}A_1^1 C = A_1$, что невозможно. Поэтому φ – внутренний автоморфизм $GL(3,2)$, т.е. $\overline{\Gamma}_1$ единственное с точностью до эквивалентности точное $\overline{\mathbb{Z}}_2$-представление степени 3 вида $a \to A_1$, $b \to \Gamma_b$ группы G_3.

Заметим, что в силу предложения 2 и леммы 3 можно ограничиться рассмотрением $\overline{\mathbb{Z}}_{2^k}$-представлений вида

$$\overline{\mathbb{Z}} : a \to \overline{\Delta}_2^{(k)}(a), \;\; b \to B$$

группы G_3, где $\Delta_2(a) \equiv \overline{\Delta}_2^{(k)}(a)(\bmod\ 2^k\mathbb{Z}_2)$.

2) Пусть $k = 2$. Легко видеть, что $A_1 \equiv A_1^{(2)}(\mathrm{mod}\ 2)$, где

$$A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\overline{\Gamma}^{(2)} : a \to \Delta_1^{(2)}$, $b \to B$ – некоторое точное $\overline{\mathbb{Z}}_4$-представление степени 3 группы G_3. Так как $B \equiv B_1(\mathrm{mod}\ 2)$, то B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & 1 + y_2 & 1 + y_3 \\ z_1 & z_2 & 1 + z_3 \end{pmatrix},$$

где $x_i, y_i, z_i \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ $(i = 1,2,3)$. Из определяющтх соотношений группы G_3 легко получить, что

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & y+2 \\ y & z-1 & z-1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{pmatrix},$$

где $y, z = 0, 2$. Отсюда получаем два неэквивалентных точных представления степени 3 группы G_3:

$$\overline{\Gamma}_1^{(2)} : a \to A_1^{(2)}, b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{\Gamma}_2^{(2)} : a \to A_1^{(2)}, b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

такие, что $\overline{\Gamma}_1^{(2)}(g) \equiv \overline{\Gamma}_2^{(2)}(g) \equiv \overline{\Gamma}_1(g) \equiv \overline{\Gamma}_1(g) (\mathrm{mod}\ 2)$ для всех $g \in G_3$.

3) Пусть $k = 4$. Тогда всякое точное $\overline{\mathbb{Z}}_{2^4}$-представление $\overline{\Gamma}_i^{(4)}$ группы G_3 такое, что $\overline{\Gamma}_i^{(4)} \equiv \overline{\Gamma}_1^{(2)} (\mathrm{mod}\ 4)$ соответственно имеет вид:

$$\overline{\Gamma}_1^{(4)} : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A_1^{(4)},\ b \to \begin{pmatrix} x_1+3 & x_2 & x_3+2 \\ y_1 & y_2+3 & y_3+2 \\ z_1 & z_2 & z_3+1 \end{pmatrix} = B_1^{(4)};$$

$$\overline{\Gamma}_2^{(4)} : a \to A_1^{(4)},\ b \to \begin{pmatrix} x_1+3 & x_2 & x_3+2 \\ y_1+2 & y_2+3 & y_3+3 \\ z_1 & z_2 & z_3+1 \end{pmatrix} = B_2^{(4)}.$$

Рассуждая аналогично случаю 2), нетрудно получить, что в этом случае группа G_3 обладает с точностью до эквивалентности одним точным $\overline{\mathbb{Z}}_{2^4}$-представлением степени 3:

$$\overline{\Gamma}^{(4)} : a \to A_1^{(4)},\ b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем $\overline{\Gamma}^{(4)}(g) \equiv \overline{\Gamma}^{(2)}(g) (\mathrm{mod}\ 4)$ для всех $g \in G_3$, а представление $\overline{\Gamma}_2^{(4)}$ не поднимается до точного $\overline{\mathbb{Z}}_{2^4}$-представления $\overline{\Gamma}_2^{(4)}$ степени 3 группы G_3. Согласно предложению 2 и лемме 2 достаточно рассматривать $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы G_3 вида: $a \to \Delta_2(a)$, $b \to B$.

Легко видеть, что отображение

$$\Gamma : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix},\ b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha-1 \\ 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задает точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы G_3. Тогда в силу доказанного выше, Γ – единственное с точностью до эквивалентности точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 вида $a \to \Delta_2(a)$, $b \to B$ группы G_3 и $U_3 = I_m\Gamma$ – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 168 группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$.

Пусть G – группа порядка $2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что если G_1 – подгруппа порядка $2^4 \cdot 3 \cdot 7$ группы $GL(3,\mathbb{Z}_2)$, то G_1 неразрешима. Тогда, в силу леммы 4, возможны случаи:

1) G содержит такую нормальную подгруппу H, что $H \approx PSL_2(7)$;

2) G содержит такую нормальную подгруппу H, что $G/H \cong PSL_2(7)$, где G – абстрактная группа, изоморфная G_1. Если Γ – точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы G, то Γ неприводимо. Тогда Γ абсолютно неприводимо и если $\mathfrak{z}$ – центр группы G, то $|\mathfrak{z}(G)| \leq 2$ и $G \cong N \times \mathfrak{z}(G)$, где N – группа без центра. Рассмотрим случай 1): Пусть $H \lhd G$ и $H \cong PSL_2(7)$. Если $|\mathfrak{z}(G)| = 2$, то с точностью до изоморфизма H единственная подгруппа группы G порядка $|H| = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Тогда $G \cong PSL_2(7) \times C_2$. Если $G \cong \widetilde{G} \subset GL(3,\mathbb{Z}_2)$, то $\mathfrak{z}(\widetilde{G}) = \{\pm E\}$ и всякое точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы G имеет вид: $a \to \Delta_a$, $b \to \Delta_b$, $c \to -E$, где Δ – некоторое точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы $H \cong PSL_2(7)$. Отсюда и из леммы 4 U_5 – единственная с точностью

до сопряженности подгруппа порядка 336 группы $GL(3, \mathbb{Z}_2)$. Если $|\mathfrak{z}(G)| = 1$, то существует $g \in G$ и $g \notin H$, такой что $g^1 Hg = H$. Покажем, что в этом случае G не обладает точным $\mathbb{Z}_2$-представлением степени 3. Предположим противное, пусть Γ – точное $\mathbb{Z}_2$-представление степени 3 группы G и $\widetilde{G} = \Gamma(G)$. Построим гомоморфизм Минковского $\rho : GL(3, \mathbb{Z}_2) \to GL(3, 2)$, где $\rho(A) = \overline{A}$ для $A \in GL(3, \mathbb{Z}_2)$ и матрица $\overline{A}$ получается из A приведением всех элементов A по модулю идеала $2\mathbb{Z}_2$. Пусть $\Gamma(H) = \widetilde{H}$. Тогда $\rho(\widetilde{H}) = GL(3, 2)$. Пусть $\rho_{\widetilde{G}}$ – ограничение ρ на подгруппу $\widetilde{G}$. Пусть далее $g \in G$ таков, что $\Gamma(g) = \widetilde{g}$ и $\widetilde{g} \notin \widetilde{H}$. Тогда $\rho_{\widetilde{G}}(g) \in Ker\rho_{\widetilde{G}}$. Из изоморфизма $\widetilde{G}/Ker\rho_{\widetilde{G}} \cong GL(3, 2)$ следует, что $|Ker\rho_{\widetilde{G}}| = |H_1| = 2$ и $\widetilde{H}_1 \triangleleft \widetilde{G}$. Отсюда $\widetilde{H}_1 = (\widetilde{g})$ и $\widetilde{h}^{-1}\widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{g}$ для всех $\widetilde{h} \in \widetilde{H}$ и, значит, $\mathfrak{z}(\widetilde{G}) = \widetilde{H}_1$, что противоречит тривиальности $\mathfrak{z}(\widetilde{G})$.

Рассмотрим теперь случай 2). Пусть $H \triangleleft G$ и $G/H \cong PSL_2(3)$. Тогда G содержит нормальную подгруппу $H_1 \triangleleft G$ содержит нормальную подгруппу $H_1 \triangleleft G$ порядка $|H_1| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и $H = \mathfrak{z}(G)$. Отсюда $H_1 \cong PSL_2(7)$ и $G \cong PSL_2(7) \times C_2$. Таким образом случай 2) сводится к 1). Предложение доказано.

Из предложений 1–4 вытекает полное описание несопряженных конечных подгрупп группы $GL(3, \mathbb{Z}_2)$.

2.Конечные подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Z}_3)$ $(n \leq 3)$

Пусть W – конечная подгруппа группы $GL(2, \mathbb{Z}_3)$. Из леммы 1 вытекает, что

$$|W| \mid 2^4 \cdot 3. \tag{6}$$

Предложение 5. *Конечные подгруппы группы* $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ *с точностью до сопряженносты исчерпываются следующими группами*:

1) *абелевыми группами*

$$V_0 = \{E\};\ V_1 = \{-E\};\ V_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\};\ V_3 = \{\widetilde{\varepsilon}\};\ V_4 = \{\widetilde{i}\};\ V_5 = \{-\widetilde{\varepsilon}\};$$

$$V_6 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\};\ V_7 = \{V_2, -E\}, \text{ где } V_0 \cong C_1;\ V_1 \cong C_2;\ V_2 \cong C_2;\ V_3 \cong C_3;$$

$$V_4 \cong C_4;\ V_5 \cong C_6; V_6 \cong C_8;\ V_7 \cong C_2 \times C_2\ (\lambda = \sqrt{-2});$$

2) *неабелевыми группами*

$$U_1 = \left\{\widetilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\};\ U_2 = \left\{\widetilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\};\ U_3 = \{\widetilde{i}, V_2\};$$

$$U_4 = \left\{\widetilde{i}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right\};\ U_5 = \left\{-\widetilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\};\ U_6 = \left\{V_6, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\};$$

где $U_1, U_2 \cong S_3$; $U_3 \cong D_4$; $U_4 \cong K_4 : a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ b^{-!}ab = a^{-1}$; $U_3 \cong D_6$; $U_6 \cong H : a^8 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^3$ (остальные обозначения см. в формулировке предложения 1).

Доказательство. Используя [9] и леммы 1, 2, можно показать, что силовские 2-подгруппы группы $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ сопряжены с группой U_6, а силовские 3-подгруппы группы $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ сопряжены с группой V_3. Таким образом, в силу (6) порядок произвольной конечной подгруппы группы $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ делит 48.

Далее, на основании [11, 12] нетрудно получить описание с точностью до сопряженности всех подгрупп группы $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ порядка ≤ 12. Легко показать также, что $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ не содержит подгрупп порядка 24.

В заключение покажем, что $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ не содержит подгруппы порядка 48.

Для доказательства предположим, что W – подгруппа порядка 48 группы $GL(2, \mathbb{Z}_3)$. Так как W разрешима, то она содержит подгруппу V такую, что $[W : V] = 2$ или $[W : V] = 3$. Принимая во внимание, что $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ не содержит подгрупп порядка 24, заключаем, что случай $[W : V] = 2$ невозможен. Значит $[W : V] = 3$ и пусть V – подгруппа порядка 16 группы W. Тогда, очевидно, V сопряжена с группой U_6, где $U_6 \cong H : a^8 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^3$. Пусть G – абстрактная группа, изоморфная группе W. Тогда $G/H = (cH)$, где $c^3 \in H$ и пусть $\Gamma : a \to \Gamma_a,\ b \to \Gamma_b,\ c \to \Gamma_c$ точное $\mathbb{Z}_3$)-представление степени 2 группы G. Так как $-\widetilde{\varepsilon}$ – единственный с точностью до сопряженности элемент порядка 6 в группе $GL(2, \mathbb{Z}_3)$, то из $\Gamma_c^3 \in U_6$ следует, что $\Gamma_c^3 = \pm E$. Если $\Gamma_c^3 = -E$, то подгруппа групп і ;Ц;б порожденная матрицами Γ_c и B_1 изоморфна группе C_{24}, что невозможно. Значит, $c^3 = 1$. Путем несложных рассуждений показывается, что G изоморфна одной из следующих групп:

$T_1 : a^8 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^3,\ c^3 = 1,\ c^{-1}ac = a^k,\ c^{-1}bc = b\ \ (k, 2) = 1;$

$T_2 : a^8 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^3,\ c^3 = 1,\ c^{-1}ac = a^k,\ c^{-1}bc = a^2b\ \ (k, 2) = 1;$

В обоих случаях T_i содержит подгруппу порядка 24, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть теперь W – конечная подгруппа группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. По лемме 1

$$|W| \mid 2^5 \cdot 3^3 \cdot 13.$$

Предложение 6. *С точностью до сопряженности p-подгруппы группы* $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ *исчерпываются группами* $V_1, \ldots, V_{22}$*, где*

1) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \right\}$; $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_3;

2) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \right\} = \{\widetilde{\omega}\}$ – *подгруппа изоморфная группе* C_{13} ($\beta = \omega + \omega^3 + \omega^9; \gamma = \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-9}, \omega$–*первообразный корень степени* 13 *из* 1);

3) $V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{A_1, B_1, -E\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $H \times C_2$;

$V_5 = \{A_1, B_1\}$; $V_6 = \{-A_1, B_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* H;

$V_7 = \{A_1, -E\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $C_8 \times C_2$;

$V_8 = \{A_1^4, B_1, -E\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $C_2 \times C_2 \times C_2$;

$V_9 = \{A_1B_1, A_1^2\}$; $V_{10} = \{A_1B_1, -A_1^2\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* K_4;

$V_{11} = \{A_1^2, B_1\}$; $V_{12} = \{A_1B_1, A_1^4\}$; $V_{13} = \{A_1B_1, -A_1^4\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* D_4;

$V_{14} = \{A_1\}$; $V_{15} = \{-A_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_8;

$V_{16} = \{B_1, -E\}$; $V_{17} = \{A_1^4, -E\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* $C_2 \times C_2$;

$V_{18} = \{A_1^2\}$; $V_{19} = \{-A_1^2\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_4;

$V_{20} = \{-E\}$; $V_{21} = \{B_1\}$; $V_{22} = \{-B_1\}$ – *подгруппы, изоморфные группе* C_2.

Доказательство. Пусть H_p нетривиальная силовская P-подгруппа группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. В силу [9] и предложения 5 $H_3 \cong C_3$ и $H_2 \cong H \times C_8$. Так как $3^3 \equiv 1(\text{mod } 13)$, то над $\mathbb{Z}_3$ имеет место разложение

$$\Phi_{13}(x) = f_1(x) \dots f_4(x)$$

полинома деления круга $\Phi_{13}(x)$ на неприводимые приведенные полиномы $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ степени 3.

Пусть ω – первообразный корень степени 13 из 1 и φ – образующий элемент группы Галуа поля $\mathbb{Q}_3(\omega)$ над $\mathbb{Q}_3$. Легко видеть, что $\varphi(\omega) = \omega^3$ и над кольцом $\mathbb{Z}_3[\omega]$ имеет место разложение

$$\Phi_{13}(x) = (x - \omega) \dots (x - \omega^{12}).$$

Отсюда можно считать, что

$$f_1(x) = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^9) = x^3 - \gamma x^2 + \beta x - 1, \tag{7}$$

где $\gamma = \omega + \omega^3 + \omega^9$, $\beta = \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-9}$. Разложению (7) соответствует точное $\mathbb{Z}_3$-представление степени 3 группы $C_{13} = (a)$:

$$\Gamma : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Используя [9] и лемму 2 можно показать, что группа $I_m\Gamma$ – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 13 группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. Пусть

$$G \cong H \times C_2 : a^8 = b^2 = c^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^3, ac = ca,\ bc = cb.$$

Из [8] и предложения 5 вытекает, что

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

– единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$, изоморфная группе $H \times C_2$. Поскольку всякая 2-подгруппа группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе этой группы, то из вышедоказанного легко получить описание всех несопряженных 2-подгрупп группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$.

Хорошо известно [11], что группа $C_3 = (a)$ обладает с точностью до эквивалентности двумя точными $\mathbb{Z}_3$-представлениями степени 3:

$$\Delta_1 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix};\ \Delta_2 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $V_i = I_m\Delta_i$ $(i = 1,2)$. Так как V_2 неразложима, а V_1 – вполне приводима, то V_1 и V_2 не сопряжены в $GL(3,\mathbb{Z}_3)$. Предложение доказано.

Следствие 2. *Если W – конечная подгруппа группы $GL(3,\mathbb{Z}_3)$, то*

$$|W| \mid 2^3 \cdot 3 \cdot 13. \tag{8}$$

Предложение 7. *Конечные подгруппы порядков $2^m \cdot 3$ $(1 \le m \le 5)$ группы $GL(3,\mathbb{Z}_3)$ с точностью до сопряженности исчерпываются группами $W_1,\dots,W_{21}$, где*

1) $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$; $W_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$; $W_3 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$W_4 = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ *–подгруппы, изоморфные группе C_6;*

2) $W_5 = \left\{V_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \{V_1, B_2\}$; $W_6 = \left\{V_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \{V_1, B_3\}$;

$W_7 = \{V_1, -B_2\}$; $W_8 = \{V_1, -B_3\}$; $W_9 = \{A_2, B_4\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$;

$W_{10} = \{A_2, -B_4\}$ *– подгруппы, изоморфные группе S_3;*

3) $W_{11} = \{W_3, -E\}$ *– подгруппа, изоморфная группе $C_6 \times C_2$;*

4) $W_{12} = \{A_1^4, -E\}$ *– подгруппа, изоморфная группе A_4;*

5) $W_{13} = \{W_3, B_2\}$; $W_{14} = \{W_4, B_3$; $W_{15} = \{W_2, B_2\}$; $W_{16} = \{W_1, B_4\}$ *– подгруппы, изоморфные группе D_6;*

6) $W_{17} = \{W_{12}, -E\}$ *– подгруппа, изоморфная группе $A_4 \times C_2$;*

7) $W_{18} = \{W_{13}, -E\}$ *– подгруппа, изоморфная группе $D_6 \times C_2$;*

8) $W_{19} = \left\{A_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{i} \end{pmatrix}\right\}$; $W_{20} = \left\{A_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \widetilde{i} \end{pmatrix}\right\}$ *– подгруппы, изоморфные группе S_4;*

9) $W_{21} = \{W_{19}, -E\}$ *– подгруппа, изоморфная группе $S_4 \times C_2$.*

Доказательство. Из предложения 7 нетрудно получить, что группами $W_1,\dots,W_4$ исчерпываются с точностью до сопряженности циклические группы порядка 6 группы $GL(3,\mathbb{Z}_3)$. Описание разложимых точных $\mathbb{Z}_3$-представлений степени 3 группы S_3 получаем, используя предложения 5, 7 и определяющие соотношения группы S_3. Пусть Γ – неразложимое точное $\mathbb{Z}_3$-представление степени 3 группы S_3. Представим S_3 в виде $S_3 = H\lambda N$, где $H = (a)$, $N = (b)$. Как известно, неэквивалентные неразложимые $\mathbb{Z}_3$-представления группы H исчерпываются представлениями:

$$\Delta_1 : a \to 1;\ \Delta_2 : a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \widetilde{\varepsilon};\ \Delta_3 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через M_i модуль представления Δ_i $(i = 1, 2, 3)$. Групповое кольцо $\mathbb{Z}_3N$ представимо в виде

$$\mathbb{Z}_3N = \mathbb{Z}_3Ne_1 \oplus \mathbb{Z}_3Ne_2 = I_1 \oplus I_2, \tag{9}$$

где $e_1 = \frac{1}{2}(1 + b)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1 - b)$ – полная система минимальных попарно ортогональных идемпотентов кольца $\mathbb{Z}_3N$.

По теореме Хигмана всякое неразложимое $\mathbb{Z}_3$-представление группы S_3 есть компонента разложения некоторого индуцированного представления силовской 3-подгруппы группы S_3.

Легко видеть, что в индуцированном модуле $M_i^{S_3}$ реализуются $\mathbb{Z}_3$-представления степени i $(i = 1, 2)$. Рассмотрим модуль $M_3^{S_3}$. Очевидно,

$$M_3^{S_3} = \mathbb{Z}_3S_3 \otimes_{\mathbb{Z}_3H} \mathbb{Z}_3H \cong \mathbb{Z}_3S_3 \ \text{ и } M_3^{S_3} = \mathbb{Z}_3S_3e_1 \oplus \mathbb{Z}_3S_3e_2 = N_1 \oplus N_2.$$

Модуль N_1 имеет базис $\{e_1, ae_1, a^2e_1$. Действуя на базисные элементы N_1 элементами группы S_3, получим

$$be_1 = e_1,\ bae_1 = a^2be_1,\ ba^2e_1 = be_1.$$

Таким образом в N_1 реализуется представление

$$\Gamma_1 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем, что в N_2 реализуется представление

$$\Gamma_2 : a \to \Gamma_1(a),\ b \to -\Gamma_1(b).$$

В силу [12] N_1 и N_2 – единственные с точностью до изоморфизма неразложимые $\mathbb{Z}_3S_3$-модули размерности 3. Очевидно группы $I_m\Gamma_1$ $(i = 1, 2)$ не сопряжены в $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. Используя вышедоказанное и результаты [10–12] нетрудно описать с точностью до сопряженности все подгруппы W группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ порядка $|W| = 2^m \cdot 3$ $(m = 2, 3)$.

Опишем подгруппы порядка 48 группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. Из разрешимости W следует, что W содержит подгруппу V порядка $|V| = 2^4$, которая, в силу предложения 6, изоморфна одной из групп: $C_2 \times D_4$, $C_2 \times K_4$ или H.

Покажем, что $W \not\subset SL(3, \mathbb{Z}_3)$. Предположим противное, пусть W – подгруппа порядка 48 группы $SL(3, \mathbb{Z}_3)$. Группа W содержит нормальную подгруппу U, такую что $[W : U] = 2$ или $[W : U] = 3$. В первом случае, как легко видеть,

$U \cong S_4$ и сопряжена с группой W_{19}. Тогда силовская 2-подгруппа P группы W изоморфна группе $C_2 \times D_4$ либо H. Случай $P \cong C_2 \times D_4$ невозможен ввиду предложения 6. Таким образом $P \cong H \triangleleft W$ и $W \cong H \times C_3$. Легко видеть, что случай $[W : U] = 3$ сводится к предыдущему.

Из доказательства предложения 5 вытекает, что тогда W изоморфна одной из групп:

$T_1 : a^8 = b^2 = c^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^3,\ c^{-1}ac = a^k,\ c^{-1}bc = b,\ \ (k, 2) = 1;$

$T_2 : a^8 = b^2 = c^3 = 1,\ b^{-1}ab = a^3,\ c^{-1}ac = c^k,\ c^{-1}bc = a^2b,\ \ (k, 2) = 1.$

В обоих случаях группа W содержит подгруппу, не вложимую в $GL(3, \mathbb{Z}_3)$, что невозможно. Поэтому $W \cap SL(3, \mathbb{Z}_3) = V \neq \{E\}$. Из предложения 6 элемент c порядка 3 группы W принадлежит $SL(3, \mathbb{Z}_3)$ и, значит, $c \in V$. Покажем, что $[W : V] = 2$. По основной теореме о гомоморфизмах имеем

$$SL(3, \mathbb{Z}_3) \cdot W \big/ SL(3, \mathbb{Z}_3) \cong W \big/ SL(3, \mathbb{Z}_3) \cap W \cong W \big/ V.$$

Поскольку $W = \{c, P\}$ и $c \in V$, то далее можно записать

$$SL(3, \mathbb{Z}_3) \cdot W \big/ SL(3, \mathbb{Z}_3) \cong SL(3, \mathbb{Z}_3) \cdot P \big/ SL(3, \mathbb{Z}_3) \cong P \big/ P_1 \cong W \big/ V,$$

где $P_1 = P \cap SL(3, \mathbb{Z}_3)$. Следовательно, достаточно показать, что $[P : P_1] = 2$. Очевидно, случай $P \cong H$ невозможен. Значит $P \cong C_2 \times D_4$ или $P \cong C_2 \times K_4$. В обоих случаях $-E \in P$ и $[P : P_1] = 2$. Отсюда с очевидностью получаем $[W : V] = 2$ и $-E \in W$. Поскольку S_4 – единственная с точностью до изоморфизма подгруппа порядка 24 группы $SL(3, \mathbb{Z}_3)$, то $W \cong S_4 \times C_2$ и $W = \{W_{19}, -E\}$.

Предположим, что $|W| = 2^5 \cdot 3$. Тогда силовская 2-подгруппа группы W изоморфна группе $H \times C_2$ и, следовательно, $P = \{P, -E\}$, где $P_1 \subset SL(3, \mathbb{Z}_3)$. Тогда группу W можно представить в виде $W = \{-E, V\}$, где V – группа порядка 48 в $SL(3, \mathbb{Z}_3)$, что противоречит лемме 3. Предложение доказано.

Предложение 8. Группа $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ содержит с точностью до сопряженности 3 подгруппы U_1, U_2, U_3 порядка $2^m \cdot 3^k \cdot 13$ $(0 \leq m \leq 5;\ k = 0, 1)$:

1) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & -\gamma \end{pmatrix} \right\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* C_{26};

2) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta \\ 0 & -\beta & \gamma - 1 \\ 0 & \gamma & \beta - 1 \end{pmatrix} \right\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $C_4 : a^{17} = b^3 = 1, bab^{-1} = a^3$;

3) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 - \gamma \\ 0 & -\gamma & 1 - \beta \end{pmatrix} \right\}$ – *подгруппа, изоморфная группе* $C_5 : a^{13} = b^6 = 1, bab^{-1} = a^3$;

Доказательство. Пусть W – подгруппа порядка $|W| = 2^m \cdot 3^k \cdot 13$ группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. Тогда $0 \leq m \leq 5$ и $k = 0, 1$. Рассмотрим следующие случаи:

1) $|W| = 2^m \cdot 13$. Очевидно, что при $m > 1$ W нециклична. Пусть G – абстрактная группа порядка $2^m \cdot 13$, обладающая точным $\mathbb{Z}_3$-представлением

степени 3 и P – силовская 13-подгруппа группы W. Если G – неприводима, то G либо абсолютно неприводима, либо циклична. Поскольку $\Gamma|_P$ неприводимо, то и Γ неприводимо. Поскольку G – нециклична, то Γ – абсолютно неприводимо, откуда $3 \mid |G|$, что абсурдно. Поэтому $m \leq 1$ и G – циклическая группа порядка 26. Из предложения 6 и леммы 3 получим, что U_1 – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 26 группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$.

2) Пусть G – абстрактная группа порядка 39. Легко видеть, что если G вложима в $GL(3, \mathbb{Z}_3)$, то G нециклична. Тогда G – метациклическая группа, порожденная двумя образующими a и b с определяющими соотношениями

$$G : a^{13} = b^3 = 1,\ bab^{-1} = a^3.$$

Предположим, что Γ – точное $\mathbb{Z}_3$-представление степени 3 группы G. Согласно предложению 6 и лемме 3 можно считать, что:

$$\Gamma : a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix},\ b \to \Gamma_b.$$

Покажем, что Γ реализуется в модуле $\mathbb{Z}_3[\omega]$, где ω – первообразный корень степени 13 из 1,

$$\gamma = \omega + \omega^3 + \omega^9,\ \beta = \omega^{-1} + \omega^{-3} +^{-9}.$$

Действительно, пусть $x = \alpha_0 + \alpha_1\omega^2$ $(\alpha_i \in \mathbb{Z}_3;\ 0 \leq i \leq 2)$ – элемент кольца $\mathbb{Z}_3[\omega]$, записанный в базисе $1, \omega, \omega^2$ над кольцом $\mathbb{Z}_3$. Зададим действие a, b на элементе x, положив: $ax = \omega x$, $bx = \varphi(x)$, где φ – образующий группы Галуа поля $\mathbb{Q}_3(\omega)$ над $\mathbb{Q}_3$. Тогда $bab^{-1} = a^3$. Поэтому

$$\omega^3 = \gamma\omega^2 - \beta\omega + 1,\ \omega^6 = -\beta + (\alpha - 1)\omega + (\beta - 1)\omega^2$$

и Γ_b имеет вид:

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta \\ 0 & -\beta & \gamma - 1 \\ 0 & \gamma & \beta - 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя лемму 4, получим, что U_2 – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 39 группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$.

3) Пусть $|W| = 2^m \cdot 3 \cdot 13$ $(0 \leq m \leq s)$. Покажем, что в этом случае $m \leq 1$. Предположим противное, пусть $m \geq 1$ и

$$1 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_s = W \tag{10}$$

– композиционный ряд группы W. Тогда все факторы ряда (10) – простые группы. Заметим, что в силу [13] все факторы (10) цикличны. Тогда W – разрешимая группа и W содержит подгруппу порядка $2^m \cdot 13$, что невозможно. Таким образом $|W| \leq 2 \cdot 3 \cdot 13$. Пусть G – абстрактная группа порядка $|G| = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Очевидно, |G| – неабелева группа. Поскольку все силовские подгруппы группы G цикличны, то G – метациклическая группа. Отсюда и из вышедоказанного легко получить, что группу G можно представить в виде:

1) $a^{13} = b^6 = 1,\ bab^{-1} = a^3$ или 2) $a^3 = b^{26} = 1,\ bab^{-1} = a^{-1}$.

В случае 1) из предложения 6 следует, что U_3 – единственная с точностью до сопряженности подгруппа, изоморфная группе 1). Легко видеть также, что группа 2) не вложима в $GL(3, \mathbb{Z}_3)$. Предложение доказано.

Из предложений 6–8 вытекает описание с точностью до сопряженности всех конечных подгрупп группы $GL(3, \mathbb{Z}_3)$.

1. *Фёдоров Е. С.* Начало учения о фигурах. – С.-Петербург, 1885.
2. *Brown H., Neubuser J., Zassenhaus H.* On integral groups I. The reducible case // Numer. Math., 1972. – V. 19. – P. 386–399.
3. *Кирилюк А. А.* // В сб. "Материалы 2-й конф. молодых ученых Зап. научн. центра АН УССР. Секция матем. н. – Ужгород, 1975 (№ 1734–76 Деп.).
4. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. – М., 1972.
5. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М., 1969.
6. *Mitchel H.* Determination of the ordinaty and modular ternary linear groups // Trans. A.M.S., 1911.–V. 12. – P. 207–242.
7. *Hartley R.* Determination of ternary colliineation groups, whose coefficients lie in $GF(2^n)$ // Ann. of Math., 1925. – V. 27. – P. 140–158.
8. *Bloom D.* The subgroups of $PSL_3(q)$ for odd q // Trans. A.M.S., 1967. – V. 127. – P. 150–173.
9. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы над полем // Изв. АН СССР, сер. матем., 1963. – Т. 27, № 5. – С. 1031–1054.
10. *Ройтер А. В.* О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленинград. ун-та, 1960. – № 19. – С. 65–74.
11. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР, сер. матем., 1964. – Т. 28, № 4. – С. 875–910.
12. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных P-адических представлениях прямого произведения групп // УМЖ. – 1977. – Т. 29, № 5.– С. 580–588.
13. *Mason G.* A characterization of $SL(3, 3)$ II // J. of Algebra, 1976. – V. 39. – P. 235–249.
14. *О'Мира Р. Т.* Сб. Автоморфизмы классических групп. – М., 1976.

Одержано 16.10.2014