УДК 517.946

В. В. Маринець, К. В. Маринець, О. Ю. Питьовка (Ужгородський нац. ун-т, Ужгородський нац. ун-т, Мукачівський держ. ун-т)

ПРО ОДНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ТЕОРІЇ ДРЧП ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ В ОБЛАСТІ ІЗ СКЛАДНОЮ СТРУКТУРОЮ КРАЮ

We investigate one constructive modification of the two–sided method of approximate integration of the boundary–value problem for system of non–linear second–order differential equations of the hyperbolic type on the plain when the bound of the domain of change of the independent variables conciistes of the pair of "free"curves and the characteristics of the given system.

Досліджується одна конструктивна модифікація двостороннього методу наближеного інтегрування крайової задачі для систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку гіперболічного типу на площині, коли край області зміни незалежних змінних складається із пари "вільних"кривих та характеристик заданої системи.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених в [1, 2].

В $\mathbb{R}^2$ розглянемо область $D = D_1 \cup D_2$, де

$$D_1 = \{(x, y)|x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, g_1(x)))\},$$

$$D_2 = \{(x, y)|x \in [x_1, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\},$$

а $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_r(x)$ $(x = k_r(y))$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2$ — "вільні"криві [3], причому $g'_r(x) > 0$, $g_1(x_{r-1}) = y_r$, $g_2(x_r) = y_{r-1}$.

Дослідимо задачу [4]: в просторі вектор–функцій $C^*(\bar{D}) := C^{(1.1)}(D) \cap C(\bar{D})$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$L_2U(x, y) = f(x, y, U(x, y)) := f[U(x, y)], \tag{1}$$

$$L_2U(x, y) := U_{xy}(x, y) + A_1(x, y)U_x(x, y) + A_2(x, y)U_y(x, y),$$

$U(x, y) := (u_i(x, y))$, $f[U(x, y)] := (f_i[U(x, y)])$, $i = \overline{1, n}$ — вектор–функції, $A_r(x, y) := (\delta_{i,j}a^{(r)}_{i,j}(x, y))$, $r = 1, 2$, $j = \overline{1, n}$ — задані матриці, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера,який задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} U(x_0, y) = \Psi(y), \Psi(y) \in C^1[y_0, y_1], \\ U(x, y_0) = \Phi(x), \Phi(x) \in C^1[x_0, x_1], \\ \Psi(y_0) = \Phi(x_0), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} U(x, g_r(x)) = \Omega_r(x), x \in [x_{r-1}, x_r], \Omega_r(x) \in C^1[x_{r-1}, x_r], r = 1, 2, \\ \Omega_1(x_0) = \Psi(y_1), \Omega_2(x_1) = \Phi(x_1), \end{gathered} \tag{3}$$

де $\Psi(y) := (\psi_i(y))$, $\Phi(x) := (\phi_i(x))$, $\Omega_r(x) := (\omega_{i,r}(x))$, $i = \overline{1, n}$, $r = 1, 2$ — задані вектор–функції.

Розіб'ємо область D_1 на дві підобласті $D_{1,r}$, де

$$D_{1,1} = \{(x, y)|x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1)\}, \ D_{1,2} = \{(x, y)|x \in [x_0, x_1], y \in [y_1, g_1(x))\}.$$

Очевидно, розв'язок крайової задачі (1)–(3) $U(x,y) = U_s(x,y)$, $s = 1,2,3$, де $U_1(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса (1), (2) при $(x,y) \in \bar{D}_{1,1}$, а $U_s(x,y)$, $s = 2,3$ — розв'язки задач Дарбу (1), (3) відповідно при $(x,y) \in \bar{D}_{1,2}$, $(r = 1)$ і $(x,y) \in \bar{D}_2$, $(r = 2)$, причому $U_2(x,y_1) = U_1(x,y_1)$, $U_3(x_1,y) = U_1(x_1,y)$, $U_s(x,y) = (u_{s,i}(x,y))$ — вектор–функції.

Надалі вважатимемо, що $A_1(x,y) \in C(D) \cap C^{(1.0)}(D_{1,1} \cup \bar{D}_2)$, $A_2(x,y) \in C(D) \cap C^{(0.1)}(D_1)$, $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$, $f : \bar{B} \to \mathbb{R}^n$, $\bar{B} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Використовуючи позначення роботи [1] подамо задачі Гурса (1), (2) та Дарбу (1), (3) в еквівалентній інтегральній формі

$$U_s(x,y) = \Gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F[U_1(\xi,\eta)] + T_s F[U_s(\xi,\eta)], \tag{4}$$

$(x,y) \in \bar{D}_{1,s}$ при $s = 1,2$ і $(x,y) \in \bar{D}_2$ при $s = 3$, де

$$\epsilon_s = \begin{cases} 0, s = 1, \\ 1, s = 2,3, \end{cases} \quad F[U(x,y)] := \begin{cases} F^*[U(x,y)], (x,y) \in \bar{D}_1 \\ F^{**}[U(x,y)], (x,y) \in \bar{D}_2, \end{cases}$$

$$F^*[U(x,y)] := f[U(x,y)] + [A_{2y}(x,y) + A_1(x,y)A_2(x,y)]U(x,y),$$

$$F^{**}[U(x,y)] := F^*[U(x,y)] + [A_{1x}(x,y) - A_{2y}(x,y)]U(x,y),$$

$$T_1 F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} K(x,y;\xi,\eta) F[U_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi, (x,y) \in \bar{D}_{1,1},$$

$$T_2 F[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x} \int\limits_{y_1}^{y} K(x,y;\xi,\eta) F[U_2(\xi,\eta)] d\eta d\xi, (x,y) \in \bar{D}_{1,2},$$

$$T_3 F[U_3(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y} \int\limits_{x_1}^{x} K^{-1}(\xi,\eta;x,y) F[U_3(\xi,\eta)] d\xi d\eta, (x,y) \in \bar{D}_2,$$

$K(x,y;\xi,\eta) = (\delta_{i,j} k_{i,j})(x,y;\xi,\eta)$, $K^{-1}(\xi,\eta;x,y) = (\delta_{i,j} k_{i,j}^{-1})(\xi,\eta;x,y)$ — матриці,

$$k_{i,i}(x,y;\xi,\eta) := exp\left(\int\limits_{x}^{\xi} a_{i,i}^{(2)}(\tau,y) d\tau + \int\limits_{y}^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(\xi,\tau) d\tau \right),$$

$\Gamma_s(x,y) = (\gamma_{s,i}(x,y))$, $s = 1,2,3$ — вектор–функції,

$$\gamma_{1,i} := \psi_i(y) exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y) d\xi \right) +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} k_{i,i}(x,y;\xi,y_0)[\phi_i'(\xi) + a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_0)\phi_i(\xi)] d\xi, (x,y) \in \bar{D}_{1,1},$$

$$\gamma_{2,i} := \omega_{i,1}(k_1(y))exp\left(\int\limits_{x}^{k_1(y)} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y)d\xi\right) +$$
$$+\int\limits_{k_1(y)}^{x} k_{i,i}(x,y;\xi,y_0)[\phi_i'(\xi)+a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_0)\phi_i(\xi)]d\xi, (x,y)\in\bar{D}_{1,2},$$

$$\gamma_{3,i} := \omega_{i,2}(x)exp\left(\int\limits_{y}^{g_2(x)} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) +$$
$$+\int\limits_{g_2(x)}^{y} k_{i,i}^{-1}(x_0,\eta;x,y)[\psi_i'(\eta)+a_{i,i}^{(1)}(x_0,\eta)\psi_i(\eta)]d\eta, (x,y)\in\bar{D}_{2},$$

$$T_{1,2}F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1} K(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi, (x,y)\in\bar{D}_{1,2},$$

$$T_{1,3}F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x_1} K^{-1}(\xi,\eta;x,y)F[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta, (x,y)\in\bar{D}_{2},$$

Зауваження 1. *Якщо* $A_{1x}(x,y) = A_{2y}(x,y)$, $(x,y)\in D$, *то* $F^*[U(x,y)] \equiv F^{**}[U(x,y)]$ *і* $K(x,y;\xi,\eta)\equiv K^{-1}(\xi,\eta;x,y)$.

Згідно постановки задачі $U_{1x}(x,y_1) = U_{2x}(x,y_1)$ і $U_{1y}(x_1,y) = U_{3y}(x_1,y)$ при $x\in[x_0,x_1]$ та $y\in[y_0,y_1]$, а

$$\begin{aligned} u_{1,iy}(x,y_1) - u_{2,iy}(x,y_1) &= \rho_{1,i}exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_1)d\xi\right), x\in[x_0,x_1],\\ u_{1,ix}(x_1,y) - u_{3,ix}(x_1,y) &= \rho_{2,i}exp\left(\int\limits_{y}^{y_0} a_{i,i}^{(1)}(x_1,\eta)d\eta\right), y\in[y_0,y_1], \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$\rho_{1,i} := \psi'(y_1) - k_1'(y_1)\Big\{\omega_{i,1}'(x_0) + a_{i,i}^{(2)}(x_0,y_1)\omega_{i,1}(x_0) - \Big[\phi_i'(x_0) + a_{i,i}^{(2)}(x_0,y_0)\phi_i(x_0)\Big]\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_{i,i}^{(1)}(x_0,\eta)d\eta\right) - \int\limits_{y_0}^{y_1}[f_i(x_0,\eta,\psi_1(\eta),\ldots,\psi_n(\eta))+$$
$$+\Big(a_{i,i\eta}^{(2)}(x_0,\eta) + a_{i,i}^{(1)}(x_0,\eta)a_{i,i}^{(2)}a_{i,i}^{(2)}(x_0,\eta)\Big)\times\psi_i(\eta)\Big]\exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(x_0,\tau)d\tau\right)d\eta\Big\},$$

$$\rho_{2,i} := \phi'(x_1) - \omega'_{i,2}(x_1) - g'_2(x_1)\Big\{ a^{(1)}_{i,i}(x_1, y_0)\omega_{i,2}(x_1) - \Big[\phi'_i(y_0) + a^{(1)}_{i,i}(x_0, y_0)\phi_i(y_0)\Big] \times$$

$$\times \exp\left(\int\limits_{x_1}^{x_0} a^{(2)}_{i,i}(\xi, y_0)d\xi\right) - \int\limits_{x_0}^{x_1} [f_i(\xi, y_0, \phi_1(\xi), \dots, \phi_n(\xi)) +$$

$$+ a^{(1)}_{i,i\xi}(\xi, y_0) + a^{(1)}_{i,i}(\xi, y_0)a^{(2)}_{i,i}(\xi, y_0)\phi_i(\xi)\Big] \exp\left(\int\limits_{x_1}^{\xi} a^{(2)}_{i,i}(\tau, y_0)d\tau\right) d\xi\Big\}.$$

Таким чином, справедлива наступна

Лема 1. *Нехай* $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$, $A_r(x,y) \in C(D)$, $r = 1, 2$, $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D_1 \cup D_3)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D_1 \cup D_2)$ *і крайова задача (1)–(3) має розв'язок.*

Тоді для регулярності розв'язку крайової задач (1)–(3) (тобто, щоб $U(x,y) \in C^*(\bar{D})$*) необхідно і досить виконання умов* $\rho_{r,i} = 0$ *для всіх* $r = 1, 2$ *та* $i = \overline{1,n}$*. У супротивному випадку мають місце рівності (5) і розв'язок задачі (1)–(3) буде іррегулярним.*

Означення 1. *Будемо говорити, що* $F[U(x,y)] \in C^*_1(\bar{B})$, *якщо вектор–функція* $F[U(x,y)]$ *задовольняє наступні умови [5]:*

1) $F[U(x,y)] \in C(\bar{B})$,

2) *у просторі вектор–функцій* $C(\bar{B}_1)$, $\bar{B}_1 \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $Пр_{xOy}\bar{B}_1 = \bar{D}$, *існує така вектор–функція* $H(x,y,U(x,y);V(x,y)) := H[U(x,y);V(x,y)]$, *що*

   - $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$,
   - *для довільної з простору* $C(\bar{D})$ *пари вектор–функцій* $U(x,y)$, $V(x,y) \in \bar{B}_1$, *які задовольняють умову* $U(x,y) \geq V(x,y)$, $(x,y) \in \bar{D}$, *в області* $\bar{B}_1$ *виконується нерівність*

$$H[U(x,y);V(x,y)] - H[V(x,y);U(x,y)] \leq 0, \qquad (6)$$

3) *вектор–функція* $H[U(x,y);V(x,y)]$ *в області* $\bar{B}_1$ *задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору* $C(\bar{D})$ *вектор–функцій* $U_r(x,y)$, $V_r(x,y) \in \bar{B}_1$, $r = 1, 2$, *виконується умова*

$$|H[U_1(x,y);U_2(x,y)] - H[V_1(x,y);V_2(x,y)]| \leq L(|W_1(x,y)| + |W_2(x,y)|),$$

   $W_r(x,y) := U_r(x,y) - V_r(x,y)$, $r = 1, 2$, *де* $L = (\delta_{i,j}l_{i,j})$ *— матриця Ліпшиця,* $l_{i,j} \geq 0$, $i, j = \overline{1,n}$.

Очевидно, якщо вектор–функція $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $F[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C^*_1(\bar{B})$. Обернене твердження несправедливе.

Встановимо достатні умови існування та єдиності регулярного або іррегулярного розв'язку задачі (1)–(3) при $(x,y) \in \bar{D}$.

Нехай вектор–функції $Z_{s,p}(x,y) := (z_{s,i,p}(x,y))$, $V_{s,p}(x,y) := (v_{s,i,p}(x,y)) \in C(\bar{D})$ належать області $\bar{B}_1$, $s = 1, 2, 3$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$
\begin{gathered}
W_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y), \\
(x,y) \in \bar{D}_s, \bar{D}_s := \begin{cases} \bar{D}_{1,s}, s = 1,2, \\ \bar{D}_2, s = 3, \end{cases} \\
f_s^p(x,y) := H[Z_{s,p}(x,y); V_{s,p}(x,y)], \\
f_{s,p}(x,y) := H[V_{s,p}(x,y); Z_{s,p}(x,y)], \\
\alpha_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta), \\
\beta_{s,p}(x,y) := V_{s,p}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_{1,p}(\xi,\eta) - T_s f_{s,p}(\xi,\eta).
\end{gathered} \tag{7}
$$

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$ згідно формул [5, 6]

$$
\begin{gathered}
Z_{s,p+1}(x,y) = \Gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) + T_s f_s^p(\xi,\eta), \\
V_{s,p+1}(x,y) = \Gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} f_{1,p}(\xi,\eta) + T_s f_{s,p}(\xi,\eta) \\
(x,y) \in \bar{D}_s,
\end{gathered} \tag{8}
$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$ вибираємо довільні вектор–функції з простору $C(\bar{D}_s)$, які задовольняють відповідно умови (2), (3) та нерівності

$$
\begin{gathered}
W_{s,0}(x,y) \geq 0, \alpha_{s,0}(x,y) \geq 0, \beta_{s,0}(x,y) \geq 0, \\
(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Надалі вектор–функції $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in C(\bar{B}_i)$, які задовольняють відповідно умови (2), (3), нерівності (10) і належать області $\bar{B}_1$ будемо називати *функціями порівняння* крайової задачі (1)– (3).

Справедлива наступна

Лема 2. *Нехай $F[U(x,y)] \in C_1^*(\bar{B})$ і інтегральні рівняння (4) в просторі функцій $C(\bar{D}_r), r = 1,2$, мають розв'язки, які при $(x,y) \in (\bar{D}_r)$ задовольняють умови*

$$
V_{s,0}(x,y) \leq U_s(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3. \tag{10}
$$

Тоді в області $\bar{B}_1$ справедливі нерівності (9).

Лема 3. *Якщо $F[U(x,y)] \in C_1^*(\bar{B})$, то множина функцій порівняння крайової задачі (1)– (3) непорожня.*

Доведення. Нехай

$$
u^*(x,y) = \Gamma_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F[u_1^*(\xi,\eta)] + T_s F[h(\xi,\eta)],
$$

де $h(x,y) \in C(\bar{D})$ — довільна в області $\bar{B}$ функція. Вважаючи, що $u_s(x,y) \in \bar{B}_1$, позначимо

$$
\alpha_s^*(x,y) = u_s^*(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} F[u_1^*(\xi,\eta)] - T_s F[u_s^*(\xi,\eta)].
$$

Тоді вектор–функції

$$
\begin{gathered}
Z_{s,0}(x,y) = u_s^*(x,y) + |\alpha_s^*(x,y)|, \\
V_{s,0}(x,y) = u_s^*(x,y) - |\alpha_s^*(x,y)|
\end{gathered}
$$

при умові, що $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$ є функціями порівняння крайової задачі (1)– (3).

Дійсно $W_{s,0}(x,y) \geq 0$, а поскільки $K(x,y;\xi,\eta) > 0$, то приймаючи до уваги умову (6), маємо:

$$\alpha_{s,0}(x,y) = |\alpha_s^*(x,y)| + \alpha_s^*(x,y) + \epsilon_s T_{1,s}\{F[U_1^*(\xi,\eta)] - f_1^0(\xi,\eta)\} + \\ + T_s\{F[U_s^*(\xi,\eta)] - f_s^0(\xi,\eta)\} \geq 0,$$

$$\beta_{s,0}(x,y) = -|\alpha_s^*(x,y)| + \alpha_s^*(x,y) + \epsilon_s T_{1,s}\{F[U_1^*(\xi,\eta)] - f_1^0(\xi,\eta)\} + \\ + T_s\{F[U_s^*(\xi,\eta)] - f_{s,0}(\xi,\eta)\} \leq 0, \\ s = 1,2,3, (x,y) \in \bar{D}_s.$$

Із (7) та (8) одержимо

$$\begin{aligned} Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) = \alpha_{s,p}(x,y), \\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) = \beta_{s,p}(x,y), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{s,p}(x,y) + \alpha_{s,p+1}(x,y) = Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y), \\ \beta_{s,p}(x,y) + \beta_{s,p+1}(x,y) = V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y), \end{aligned} \tag{12}$$

$$W_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(f_1^p(\xi,\eta) - f_{1,p}(\xi,\eta)) + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_{s,p}(\xi,\eta)), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(f_1^p(\xi,\eta) - f_{1,p+1}(\xi,\eta)) + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_s^{p+1}(\xi,\eta)), \\ \beta_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(f_{1,p}(\xi,\eta) - f_{1,p+1}(\xi,\eta)) + T_s(f_{s_p}(\xi,\eta) - f_{s,p+1}(\xi,\eta)), \end{aligned} \tag{14}$$

$(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, $p = 0,1,2,\ldots$.

Враховуючи (6), (9), із (11) та (13) при $p = 0$ одержимо

$$Z_{s,0}(x,y) \geq Z_{s,1}(x,y), V_{s,0}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y),$$

$$W_{s,1}(x,y) \leq 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3.$$

Нехай при $(x,y) \in \bar{D}_s$ справедливі нерівності

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, \tag{15}$$

тобто, якщо $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$, то і $Z_{s,1}(x,y)$, $V_{s,1}(x,y) \in \bar{B}_1, s = 1,2,3.$

Із (14) при $p = 0$ одержимо $\alpha_{s,1}(x,y) \leq 0$, $\beta_{s,1}(x,y) \geq 0$ для $\forall(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, а отже, із (11) та (13) при $p = 2$ і $(x,y) \in \bar{D}_s$ випливає

$$Z_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,2}(x,y), V_{s,1}(x,y) \geq V_{s,2}(x,y), W_{s,2}(x,y) \geq 0.$$

Поскільки в силу умов (6), (15) при $(x,y) \in \bar{D}_s$

$$\alpha_{s,0}(x,y) + \alpha_{s,1}(x,y) = \\ = Z_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) + T_{1,s}(f_{1,0}(\xi,\eta) - f_1^1(\xi,\eta)) + T_s(f_{s,0}(\xi,\eta) - f_s^1(\xi,\eta)) \geq 0,$$

$$\beta_{s,0}(x,y) + \beta_{s,1}(x,y) = \\ = V_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) + T_{1,s}(f_1^0(\xi,\eta) - f_{1,1}(\xi,\eta)) + T_s(f_s^0(\xi,\eta) - f_{s,1}(\xi,\eta)) \leq 0,$$

то із (12) при $p = 0$ і $(x, y) \in \bar{D}_s$ маємо

$$Z_{s,0}(x, y) \geq Z_{s,2}(x, y), V_{s,0}(x, y) \leq V_{s,2}(x, y), s = 1, 2, 3.$$

Але

$$\begin{gathered} Z_{s,p+1}(x, y) - V_{s,p+2}(x, y) = \\ = \epsilon T_{1,s}(f_1^p(\xi, \eta) - f_{1,p+1}(\xi, \eta)) + T_s(f_s^p(\xi, \eta) - f_{s,p+1}(\xi, \eta)), \\ V_{s,p+1}(x, y) - Z_{s,p+2}(x, y) = \\ = \epsilon T_{1,s}(f_{1,p}(\xi, \eta) - f_1^{p+1}(\xi, \eta)) + T_s(f_{s,p}(\xi, \eta) - f_s^{p+1}(\xi, \eta)), \\ (x, y) \in \bar{D}_s, s = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{16}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}$, а отже, враховуючи попередні нерівності, із (16) при $p = 0$ одержимо

$$Z_{s,1}(x, y) \leq V_{s,2}(x, y), V_{s,1}(x, y) \geq Z_{s,2}(x, y), s = 1, 2, 3,$$

тобто мають місце нерівності

$$V_{s,0}(x, y) \leq Z_{s,1}(x, y) \leq V_{s,2}(x, y) \leq Z_{s,2}(x, y) \leq V_{s,1}(x, y) \leq Z_{s,0}(x, y),$$

$$(x, y) \in \bar{D}_s, s = 1, 2, 3.$$

Із (14) при $p = 1$ маємо $\alpha_{s,2}(x, y) \geq 0$, $\beta_{s,2}(x, y) \leq 0$, $(x, y) \in \bar{D}_s$. Таким чином, вектор–функції $Z_{s,2}(x, y)$, $V_{s,2}(x, y) \in \bar{B}_1$ і є функціями порівняння крайової задачі (1)–(3). Повторюючи вище наведені міркування методом математичної індукції переконуємось у справедливості нерівностей

$$\begin{gathered} V_{s,2p}(x, y) \leq Z_{s,2p+1}(x, y) \leq V_{s,2p+2}(x, y) \leq Z_{s,2p+3}(x, y) \leq \\ \leq V_{s,2p+3}(x, y) \leq Z_{s,2p+2}(x, y) \leq V_{s,2p+1}(x, y) \leq Z_{s,2p}(x, y), \\ \alpha_{s,2p}(x, y) \geq 0, \alpha_{s,2p+1}(x, y) \leq 0, \beta_{s,2p}(x, y) \leq 0, \beta_{s,2p+1}(x, y) \geq 0, \\ (x, y) \in \bar{D}_s, s = 1, 2, 3, p \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай вектор–функція*

$$F[U(x, y)] \in C_1^*(\bar{B}), A_1(x, y) \in C(D) \cap C^{(1.0)}(D_{1,1} \cup D_2),$$

$$A_2(x, y) \in C(D) \cap C^{(0.1)}(D_1),$$

а в області $\bar{B}_1$ виконується умова (15).

Тоді для вектор–функцій $Z_{s,p}(x, y)$, $V_{s,p}(x, y)$, які побудовані згідно формул (8), де за нульове наближення $Z_{s,0}(x, y)$, $V_{s,0}(x, y) \in \bar{B}_1$ вибираються функції порівняння крайової задачі (1)–(3), в області $\bar{B}_1$ справедливі нерівності (17).

Як і в роботі [2] легко переконатись у справедливості оцінок

$$||W_{s,p}(x, y)|| \leq \frac{1}{p!}(lK\gamma n(y - y_0 + x - y_0))^p d, \tag{18}$$

а отже,

$$\lim_{p\to\infty} Z_{s,p}(x, y) = \lim_{p\to\infty} V_{s,p}(x, y) = U_s(x, y), (x, y) \in \bar{D}_s, s = 1, 2, 3.$$

Перейшовши у формулах (8) до границі, коли $p \to \infty$ переконуємось, що граничні вектор–функції $U_s(x, y)$ є розв'язками відповідних систем інтегральних рівнянь (4) при $(x, y) \in \bar{D}_s$, $s = 1, 2, 3$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$, *побудовані згідно формул (8), де за нульове наближення* $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$ *вибираються функції порівняння крайової задачі (1)–(3):*

- *збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідної системи інтегральних рівнянь (4) при* $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,$
- *мають місце оцінки (18),*
- *в області* $\bar{B}_1$ *виконуються нерівності*

$$\begin{gathered} V_{s,2p}(x,y) \leq Z_{s,2p+1}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq \\ \leq U_s(x,y) \leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq V_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y), \\ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}. \end{gathered} \quad (19)$$

Доведення. Єдиність розв'язку систем інтегральних рівнянь (4) при $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, доводиться методом від супротивного.

Для доведення справедливості нерівностей (19) припустимо, що для деякого номера p в деякій точці $(x,y) \in \bar{D}_s$ $Z_{s,2p}(x,y) < U_s(x,y)$. Тоді на підставі нерівностей (17) для всіх $m \in \mathbb{N}$ $U_s(x,y) > Z_{s,2p}(x,y) \geq Z_{s,2(p+m)}(x,y)$ в розглядуваній точці $(x,y) \in \bar{D}_s$, тобто в даній точці послідовність $\{Z_{s,2(p+m)}(x,y)\}$ при $m \to \infty$ не збігається до розв'язку $U_s(x,y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводиться справедливість всіх інших нерівностей в (19).

Наслідок 1. *Нехай в області* $\bar{B}$ *виконуються умови Теорем 1 і для всіх* $r = 1,2$ *та* $i = \overline{1,n}$ $\rho_{r,i} = 0$. *Тоді крайова задача (1)–(3) в області* $\bar{D}$ *має єдиний регулярний розв'язок, у супротивному випадку — іррегулярний.*

1. V. V. Marynets and K. V. Marynets. On Goursat–Darboux boundary–value problem for systems of non–linear differential equations of hyperbolic type// Miskolc Mathematical Notes. — 2013. — V.14, No.3. — P. 1009–1020.
2. В. В. Маринець, К. В. Маринець. Крайова задача Гурса–Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу// Доповіді НАНУ. — 2013. — №10. — С. 23–28.
3. R. Courant. Partial differential equations. NEW YORK–LONDON:1962.
4. L. Collatz. Funktionalanalysis und numerische mathematic. Berlin–*G*öttingen–Heidelberg: Springlerverlag, 1964.
5. Marynets V. V. and Dobryden A. V. About one characteristic initial value problem// Nonlinear Oscillations. — 2001. — V.4, No.4. — P. 487–499.
6. Маринець В. В., Маринець Т. Й., Добридень А. В. Про одну некласичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу// Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень". — К.: Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ. — 2009. — Т.2. — С. 79–84.

Одержано 13.11.2014