

УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський національний університет)

**УМОВА “Н” ДЛЯ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА
ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ**

The conditions under which for Orlicz spaces of exponential type the condition **H** is carried out are found.

Знаходяться умови при яких для просторів Орліча експоненціального типу виконується умова **H**.

Вступ. Ю. В. Козаченко та Є. І. Островський в роботі [1] ввели поняття банахових просторів типу субгауссових, а саме просторів $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та процесів, які є узагальненнями просторів субгауссових випадкових величин [2]. Простори φ -субгауссових випадкових величин – це простори центрованих випадкових величин із певним ростом експоненціальних моментів. Властивості таких просторів, оцінки та умови збіжності сум незалежних випадкових величин із цих просторів, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом, розглянуті в монографії В. В. Булдігіна та Ю. В. Козаченка [3]. Властивості φ -субгауссових просторів вивчалися також у роботі А. Р. Джуліано, Ю. В. Козаченка та Т. Нікітіної [4].

Ширшим класом випадкових величин, ніж гауссові, є φ -субгауссові та передгауссові випадкові величини з просторів Орліча. У монографії В. В. Булдігіна та Ю. В. Козаченка [3] викладена теорія просторів Орліча випадкових величин та теорія випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин. Простори Орліча експоненціального типу досліджувалися при розв’язанні різних задач теорії випадкових процесів, зокрема в роботі Є. І. Островського [5].

В даній роботі знаходяться умови при яких для просторів Орліча експоненціального типу виконується умова **H**.

Означення 1 (див. [3]). *Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C -функцією, якщо $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$ і $U(0) = 0$.*

Означення 2 (див. [3]). *Нехай U – довільна C -функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім’я випадкових величин, якщо для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що*

$$EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0 : EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Означення 3 (див. [3]). *Скажемо, що C -функція U задовольняє g -умову, якщо існують константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ і $A > 0$ такі, що при $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ має місце нерівність:*

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Означення 4 (див. [3]). *C-функція Орліча* $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча (N-функцією)*, якщо виконуються такі умови:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Означення 5 (див. [3]). Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – N-функція. Функція φ^* , яка визначається умовою

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$$

називається *перетворенням Юнга-Фенхеля відносно φ* .

Означення 6 (див. [6]). Для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова **Н**, якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ із простору $L_U(\Omega)$ має місце нерівність:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_U^2,$$

де C_U – деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, для яких виконується умова **Н** [6]:

- простори $L_p(\Omega), p \geq 2$, де $C_U = C_p = \sqrt{2} (\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi})^{1/p}$;
- простори $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ такі C-функції, що існують $p > q \geq 2$, для яких $U(\sqrt[q]{x})$ – опукла, а $U(\sqrt[p]{x})$ – увігнута і $C_U = 2B_p$, де $B_p = 2k^{\frac{1}{2}}$, а $2k$ – найменше парне число, не менше, ніж p ;
- простори Орліча породжені C-функцією $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, де $1 \leq \alpha \leq 2$. При $\alpha \geq 2$ для цих просторів умова **Н** не виконується.

Означення 7 (див. [3]). Нехай ψ – довільна N-функція. Простір Орліча породжений N-функцією

$$U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

називається *простором Орліча експоненціального типу*.

Позначимо цей простір $Exp_\psi(\Omega)$, а норму $\|\cdot\|_{U(\psi)}$.

Означення 8 (див. [4]). Скажемо, що для N-функції ψ виконується умова **Q**, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{x^2} = C > 0,$$

де C може дорівнювати $+\infty$.

Прикладами N-функції, для яких виконується умова **Q**, є такі:

- 1) $\psi(x) = C|x|^\alpha, C > 0, 1 < \alpha \leq 2$;

$$2) \psi(x) = \begin{cases} C|x|^2, & |x| \leq 1, \\ C|x|^\alpha, & |x| > 1, \alpha > 2. \end{cases}$$

Означення 9 (див. [4]). Нехай φ – N -функція, для якої виконується умова Q . Випадкова величина ξ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$ (φ -субгауссова), якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує константа $a > 0$ така, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується наступна нерівність:

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

У роботах [1, 4] доведено, що простір $Sub_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf(a \geq 0 : E \exp \lambda\xi \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Нехай $L_U(\Omega)$ – простір Орліча експоненціального типу, породжений N -функцією $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, де $\psi(x)$ така N -функція, що для N -функції $\psi^*(x)$ виконується умова Q .

Приклад 1. Якщо $\psi(x) = C|x|^\alpha$, $\alpha \geq 2$, тоді $\psi^*(x) = C_\beta|x|^\beta$, де $C_\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\frac{1}{C\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\beta > 1$ таке число, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Причому, коли $C = \frac{1}{\alpha}$, тоді $C_\beta = \frac{1}{\beta}$.

Розглянемо простір Орліча експоненціального типу $L_U(\Omega)$, де $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, такий що для $\psi^*(x)$ виконується умова Q , а також простір $Sub_{\psi^*}(\Omega)$.

Теорема 1 (див. [4]). Для того, щоб випадкова величина ξ , $E\xi = 0$, належала простору $Exp_\psi(\Omega)$, необхідно й достатньо, щоб ξ належала простору $Sub_{\psi^*}(\Omega)$, причому норми $\|\xi\|_{U(\psi)}$ та $\tau_{\psi^*}(\xi)$ еквівалентні, тобто справджуються нерівності

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{U(\psi)} &\leq 3\tau_{\psi^*}(\xi), \\ \tau_{\psi^*}(\xi) &\leq R_\psi \|\xi\|_{U(\psi)}, \end{aligned}$$

де $R_\psi = S_{\psi^*} e^{\frac{49}{48}}$, $S_{\psi^*} = \max_{i=1,3} \gamma_i^{-1}$, а $\gamma_i = \gamma_i(\lambda_0)$ визначаються у такий спосіб: γ_1 – корінь рівняння $\gamma = \lambda_0 \sqrt{c_0(1-\gamma)}$, де $\lambda_0 > 0$, $c_0 = \inf_{0 < |\lambda| \leq \lambda_0} \frac{\psi^*(\lambda)}{\lambda^2}$, γ_2 – корінь рівняння $\gamma^3 - 2(1-\gamma) = 0$, γ_3 – корінь рівняння $\gamma = \psi^{*(-1)}(2) \sqrt{c_0(1-\gamma)}$.

Приклад 2. Якщо функція $\psi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $1 < \beta \leq 2$, тоді з теореми 1 маємо, що $c_0 = \frac{1}{\beta} |\lambda_0|^{\beta-2}$ і $\gamma_1 = \lambda_0^{\frac{\beta}{2}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sqrt{1-\gamma}$, $\gamma_2 = 0,770917$, $\gamma_3 = 2^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}} \lambda_0^{\frac{\beta}{2}-1} \sqrt{1-\gamma}$. Вибіримо λ_0 таке, щоб $\gamma_1 > \gamma_2$ і $\gamma_3 > \gamma_2$, тоді $S_{\psi^*} = \frac{1}{\gamma_2} = 1,2972$.

Теорема 2 (див. [4]). Нехай простір $Sub_{\psi^*}(\Omega)$ такий, що функція $\psi^*(\sqrt{x})$, $x > 0$ опукла і $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $Sub_{\psi^*}(\Omega)$, тоді має місце нерівність:

$$\tau_{\psi^*}^2\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \tau_{\psi^*}^2(\xi_k).$$

З теорем 1-2 випливає, що має місце така теорема.

Теорема 3. Нехай $Exp_\psi(\Omega)$ такий простір, що функція $\psi^*(\sqrt{x})$, $x > 0$, опукла і $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з цього простору. Тоді справджується нерівність

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_{U(\psi)}^2 \leq 9R_\psi^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\psi)}^2,$$

тобто для цього простору виконується умова **Н** з константою $9R_\psi^2$, де R_ψ визначена в теоремі 1.

Доведення. Згідно теорем 1 і 2 маємо, що

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_{U(\psi)}^2 \leq 9\tau_{\psi^*}^2 \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) \leq 9 \sum_{k=1}^n \tau_{\psi^*}^2(\xi_k) \leq 9R_\psi^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\psi)}^2.$$

Таким чином, твердження теореми доведено.

Теорема 3 має місце для просторів Орліча $Exp_\psi(\Omega)$, коли

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \frac{|x|^2}{\alpha}, & |x| \leq 1; \\ \frac{|x|^\alpha}{\alpha}, & |x| > 1, \alpha > 2, \end{cases} \quad (1)$$

оскільки

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\beta|x|^2}{4(\beta-1)}, & x \leq 2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right); \\ |x| - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right), & 2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) < x < 1; \\ \frac{|x|^\beta}{\beta}, & x \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

де $\beta > 1$ таке число, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Зауважимо, що при $\alpha \geq 2$ маємо $1 < \beta \leq 2$.

Означення 10 (див. [3]). Нехай $f_1 = (f_1(x), x \in \mathbf{R})$ і $f_2 = (f_2(x), x \in \mathbf{R})$ парні дійсні функції. Будемо говорити, що f_1 підпорядкована f_2 ($f_1 \prec f_2$), якщо існують сталі $x_0 \geq 0$ і $k > 0$, такі, що для всіх $x \geq x_0$

$$f_1(x) \leq f_2(kx).$$

Означення 11 (див. [3]). Нехай $f_1 = (f_1(x), x \in \mathbf{R})$ і $f_2 = (f_2(x), x \in \mathbf{R})$ парні дійсні функції. Якщо $f_1 \prec f_2$ і $f_2 \prec f_1$, тоді будемо говорити, що функції f_1 і f_2 еквівалентні ($f_1 \sim f_2$).

Теорема 4. Нехай $Exp_{\tilde{\psi}}(\Omega)$ такий простір, де $\tilde{\psi}(x) = C|x|^\beta$, $1 < \beta \leq 2$ і $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з цього простору. Тоді справджується нерівність

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_{U(\psi)}^2 \leq 9R_\psi^2 \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\psi)}^2,$$

тобто для цього простору виконується умова **Н** з константою $9R_\psi^2 \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4$, де R_ψ визначена в теоремі 1.

Доведення. Очевидно, що функція $\tilde{\psi}(x) = C|x|^\beta$ еквівалентна функції (2). Отже, простори $Exp_\psi(\Omega)$ та $Exp_{\tilde{\psi}}(\Omega)$ містять одні й ті ж елементи і їх норми – еквівалентні. Дійсно, нехай ξ належить простору $Exp_{\tilde{\psi}}(\Omega)$. Для простоти покладемо $C = \frac{1}{\beta}$, тобто $\tilde{\psi}(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$. Отже, $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $|x| \geq 1$. При $r > 0$ маємо

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ \psi \left(\frac{|\xi|}{r} \right) \right\} - 1 &= E \mathbb{I} \left\{ \frac{|\xi|}{r} \leq 1 \right\} \exp \left\{ \psi \left(\frac{|\xi|}{r} \right) \right\} + \\ &+ E \mathbb{I} \left\{ \frac{|\xi|}{r} > 1 \right\} \exp \left\{ \psi \left(\frac{|\xi|}{r} \right) \right\} - 1 \leq \exp \{ \psi(1) \} + \\ &+ E \mathbb{I} \left\{ \frac{|\xi|}{r} > 1 \right\} \exp \left\{ \tilde{\psi} \left(\frac{|\xi|}{r} \right) \right\} - 1 \leq e^{\frac{1}{\beta}} + E \exp \left\{ \tilde{\psi} \left(\frac{|\xi|}{r} \right) \right\} - 1. \end{aligned}$$

Якщо покласти $r = \|\xi\|_{U(\tilde{\psi})}$, тоді отримаємо, що $E \exp \left\{ \psi \left(\frac{|\xi|}{\|\xi\|_{U(\tilde{\psi})}} \right) \right\} - 1 \leq e^{\frac{1}{\beta}} + 1$.

Отже, $\|\xi\|_{U(\psi)} \leq \|\xi\|_{U(\tilde{\psi})} \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}} \right)$.

Аналогічно дістанемо, що

$$\|\xi\|_{U(\tilde{\psi})} \leq \|\xi\|_{U(\psi)} \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}} \right).$$

З теореми 3 випливає, що

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_{U(\tilde{\psi})}^2 &\leq \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}} \right)^2 \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_{U(\psi)}^2 \leq \\ &\leq 9R_\psi^2 \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}} \right)^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\psi)}^2 \leq 9R_\psi^2 \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}} \right)^4 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_{U(\tilde{\psi})}^2. \end{aligned}$$

Тобто, для простору $Exp_{\tilde{\psi}}(\Omega)$ виконується умова **H** з константою $C_{\tilde{\psi}} = 9R_\psi^2 \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}} \right)^4$.

Висновки. В роботі на основі властивостей просторів Орліча експоненціально-го типу знайдені достатні умови за яких для цих просторів виконується умова **H**. Ці результати можна використати для підрахунку методом Монте-Карло кратних інтегралів із заданою точністю і надійністю.

1. Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – Т. 32. – С. 42–53.
2. Kahane J. P. Propriétés locales des fonctions à series de Fourier aléatoires // Studia Math. – 1960. – Vol. 19, no. 1. – P. 1–25.
3. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko Metric Characterization of Random Variables and Random Processes, AMS, Providence, RI, 2000.
4. R. Giuliani Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina Spaces of φ -subgaussian random variables // Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni. – 2003. – no. 121. – P. 95–124.
5. Островский Е. И. Обобщение нормы Булдыгина-Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее применен. – 1982. – Т. 27, № 3. – С. 618–623.
6. Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space // Monte Carlo Methods Appl. – 2011. – Vol. 17. – P. 155–168.

Одержано 14.10.2014