УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря(Мукачів. держ. ун-т)

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ В КВАЗІ–ОБЕРНЕНИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ ТИПУ ТІЛЕ

For functions of one complex variable introduced the concept of reciprocal derivative of 2–type and Thiele type formula for functions expansion in a quasi–inverse continued fraction. Proved properties of reciprocal derivatives of 2–type and obtained some functions expansions by the Thiele type formula.

Для функції однієї комплексної змінної введено поняття оберненої похідної 2–го типу та формули типу Тіле для розвинення функцій в квазі–обернений ланцюговий дріб. Доведені властивості обернених похідних 2–го типу та отримані розвинення деяких функцій за формулою типу Тіле.

Вступ. Функція однієї комплексної змінної може бути наближена багаточленом [1], узагальненим багаточленом, дробово–раціональною функцією [2], апроксимацією Паде [3] або ланцюговим дробом [4–6]. Задача розвинення функцій в ланцюговий дріб належить до важливих задач теорії ланцюгових дробів, яка має крім теоретичного ще і практичне значення, оскільки такі розвинення використовуються при обчислені значень функцій [7, 8].

В роботах [9, 10] досліджувалася задача розвинення функцій однієї дійсної змінної в ланцюговий дріб типу Тіле. Дана робота присвячена узагальненню цих результатів на випадок розвинення функцій комплексної змінної в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле.

1. Квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле. Нехай функція $f(z) \in \mathbf{C}[\mathrm{Z}]$, де $\mathrm{Z} \subset \mathbb{C}$— компакт, та визначена значеннями в точках множини

$$W = \{z_i : z_i \in \mathrm{Z},\ z_i \neq z_j,\ \text{коли}\ i \neq j,\ i, j = 0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Розглянемо послідовності $\{v_k(z) : z \in \mathrm{Z},\ k = 0, 1, 2, \dots\}$, елементи якої визначаються наступним чином:

$$f(z) = \frac{1}{v_0(z)},\ v_k(z) = v_k(z_k) + \frac{z - z_k}{v_{k+1}(z)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Вкладаючи елементи послідовності один в другий через $n+1$ крок отримаємо

$$f(z) = \left(v_0(z_0) + \frac{z - z_0}{v_1(z_1)} + \frac{z - z_1}{v_2(z_2)} + \dots + \frac{z - z_{n-1}}{v_n(z_n)} + \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)}\right)^{-1}.$$

Позначимо через $b_k = v_k(z_k)$ та підставимо нуль замість $(z - z_n)/v_{n+1}(z)$. Маємо скінчений ланцюговий дріб

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \left(b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \frac{z - z_1}{b_2} + \dots + \frac{z - z_{n-1}}{b_n}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Якщо ланцюговий дріб (1) задовольняє інтерполяційну умову $D_n(z_i) = w_i$, де $w_i = f(w_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, то він називається квазі–оберненим інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле (Т–КІЛД), а його коефіцієнти визначаються за рекурентною формулою у вигляді ланцюгового дробу аналогічно як і у випадку функції дійсної змінної [11, 12]

$$b_0 = \frac{1}{w_0}, \quad b_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{-b_{k-1}} + \cdots + \frac{z_k - z_1}{-b_1} + \frac{z_k - z_0}{1/w_k - b_0}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Вводиться в розгляд послідовність обернених поділених різниць 2–го типу

$$\Phi_k^{(2)}[z_0, \ldots, z_{k-1}, z] = \frac{z - z_{k-1}}{\Phi_{k-1}^{(2)}[z_0, \ldots, z_{k-2}, z] - \Phi_{k-1}^{(2)}[z_0, \ldots, z_{k-2}, z_{k-1}]}, \tag{2}$$

де $\Phi_0^{(2)}[z] = 1/f(z), k = 1, 2, \ldots$.

Коефіцієнти ланцюгового дробу (1) визначаються через обернені поділені різниці 2–го типу $b_k = \Phi_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2. Обернені різниці 2–го типу. Обернена поділена різниця 2–го типу k–го порядку $\Phi_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k]$ залежить від інтерполяційних вузлів $z_0, z_1, \ldots, z_k$ та значень функції $f(z)$ в цих вузлах, в той же час є симетрична відносно тільки двох останніх своїх аргументів z_{k-1} та z_k. Введемо в розгляд співвідношення вигляду

$$\rho_k^{(2)}[z_0, \ldots, z_k] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \Phi_{k-2i}^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_{k-2i}], \tag{3}$$

яке назвемо оберненою різницею 2–го типу. Із (3) випливає, що коефіцієнти Т–КІЛД (1) визначаються через обернені різниці 2–го типу наступним чином

$$b_0 = \rho_0^{(2)}[z_0], \quad b_1 = \rho_1^{(2)}[z_0, z_1], \quad b_k = \rho_k^{(2)}[z_0, \ldots, z_k] - \rho_{k-2}^{(2)}[z_0, \ldots, z_{k-2}], \tag{4}$$

де $k = 2, 3, \ldots, n$, а тоді ланцюговий дріб запишеться у вигляді

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \left(\rho_0^{(2)} + \frac{z - z_0}{\rho_1^{(2)}} + \frac{z - z_1}{\rho_2^{(2)} - \rho_0^{(2)}} + \cdots + \frac{z - z_{n-1}}{\rho_n^{(2)} - \rho_{n-2}^{(2)}}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Обернена різниця 2–го типу $\rho_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k]$ симетрична відносно всіх своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Доведення. Легко бачити, що обернені різниці 2–го типу

$$\rho_1^{(2)}[z_0, z_1] = \frac{(z_1 - z_0)w_0 w_1}{w_0 - w_1},$$

$$\rho_2^{(2)}[z_0, z_1, z_2] = \frac{z_0(w_1 - w_2) + z_1(w_2 - w_0) + z_2(w_0 - w_1)}{z_0 w_0(w_1 - w_2) + z_1 w_1(w_2 - w_0) + z_2 w_2(w_0 - w_1)}$$

симетричні відносно своїх аргументів.

Застосуємо формулами Валліса [13] для знаходження значень чисельника $P_k(z)$ та знаменника $Q_k(z)$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
P_{2m}(z) &= A_0 + A_1 z + \cdots + A_{m-1} z^{m-1} + A_m z^m, && A_m = 1,\\
Q_{2m}(z) &= B_0 + B_1 z + \cdots + B_{m-1} z^{m-1} + B_m z^m, && B_m = \rho^{(2)}_{2m},\\
P_{2m+1}(z) &= C_0 + C_1 z + \cdots + C_{m-1} z^{m-1} + C_m\, z^m, && C_m = \rho^{(2)}_{2m+1},\\
Q_{2m+1}(z) &= E_0 + E_1 z + \cdots + E_m z^m + E_{m+1} z^{m+1}, && E_{m+1} = 1,
\end{aligned}$$

де $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m, C_0, \ldots, C_m, E_0, \ldots, E_{m+1}$ деякі коефіцієнти. В силу того, що ланцюговий дріб (5) інтерполяційний, то $w_i = D_k(z_i) = P_k(z_i)/Q_k(z_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Розглянемо два випадки: а) $k = 2m$; б) $k = 2m + 1$.
а) При $k = 2m$ маємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases}
A_0 - w_0 B_0 + z_0 A_1 - z_0 w_0 B_1 + \cdots + z_0^{m-1} A_{m-1} - z_0^{m-1} w_0 B_{m-1} - z_0^m w_0 B_m = -z_0^m,\\
A_0 - w_1 B_0 + z_1 A_1 - z_1 w_1 B_1 + \cdots + z_1^{m-1} A_{m-1} - z_1^{m-1} w_1 B_{m-1} - z_1^m w_1 B_m = -z_1^m,\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
A_0 - w_n B_0 + z_n A_1 - z_n w_n B_1 + \cdots + z_n^{m-1} A_{m-1} - z_n^{m-1} w_n B_{m-1} - z_n^m w_n B_m = -z_n^m\,.
\end{cases}$$

відносно $2m+1$ невідомого $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}, B_m = \rho^{(2)}_{2m}$. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix}
1 & -w_0 & z_0 & -z_0\, w_0 & z_0^2 & -z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & -z_0^{m-1}\, w_0 & -z_0^m\, w_0\\
1 & -w_1 & z_1 & -z_1\, w_1 & z_1^2 & -z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & -z_1^{m-1}\, w_1 & -z_1^m\, w_1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & -w_n & z_n & -z_n\, w_n & z_n^2 & -z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & -z_n^{m-1}\, w_n & -z_n^m\, w_n
\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix}
1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m\, w_0\\
1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m\, w_1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m\, w_n
\end{vmatrix}.$$

В свою чергу визначник

$$\Delta_{2m+1} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix}
1 & w_0 & z_0 & z_0\, w_0 & z_0^2 & z_0^2\, w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\, w_0 & z_0^m\\
1 & w_1 & z_1 & z_1\, w_1 & z_1^2 & z_1^2\, w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\, w_1 & z_1^m\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & w_n & z_n & z_n\, w_n & z_n^2 & z_n^2\, w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\, w_n & z_n^m
\end{vmatrix}.$$

Тоді згідно із правилом Крамера

$$\rho_{2m}^{(2)} = B_m = \frac{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\,w_0 & z_0^m \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\,w_1 & z_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\,w_n & z_n^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & z_0^2 & z_0^2\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1} & z_0^{m-1}\,w_0 & z_0^m \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & z_1^2 & z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}\,w_1 & z_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & z_n^2 & z_n^2\,w_n & \cdots & z_n^{m-1} & z_n^{m-1}\,w_n & z_n^m \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Із формули (6) безпосередньо випливає, що обернена різниця 2-го типу $2m$–го порядку $\rho_{2m}^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_{2m}]$ симетрична відносно всіх своїх аргументів.
б) При $k = 2m+1$ аналогічно отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_0 \;-\; w_0E_0 \;+\; z_0C_1 \;-\; z_0w_0E_1 \;+\; \cdots \;+\; z_0^mC_m \;-\; z_0^mw_0E_m \;=\; z_0^{m+1}w_0, \\ C_0 \;-\; w_1E_0 \;+\; z_1C_1 \;-\; z_1w_1E_1 \;+\; \cdots \;+\; z_1^mC_m \;-\; z_1^mw_1E_m \;=\; z_1^{m+1}w_1, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ C_0 \;-\; w_nE_0 \;+\; z_nC_1 \;-\; z_nw_nE_1 \;+\; \cdots \;+\; z_n^mC_m \;-\; z_n^mw_nE_m \;=\; z_n^{m+1}w_n\,. \end{cases}$$

відносно $2m+2$ невідомих $C_0, C_1, \ldots, C_m = \rho_{2m+1}^{(2)}, E_0, E_1, \ldots, E_m$. Тоді:

$$\rho_{2m+1}^{(2)} = C_m = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & \cdots & z_0^{m-1}\,w_0 & z_0^m\,w_0 & z_0^{m+1}\,w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & \cdots & z_1^{m-1}\,w_1 & z_1^m\,w_1 & z_1^{m+1}\,w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & \cdots & z_n^{m-1}\,w_n & z_n^m\,w_n & z_n^{m+1}\,w_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & w_0 & z_0 & z_0\,w_0 & z_0^2 & z_0^2\,w_0 & \cdots & z_0^m & z_0^m\,w_0 \\ 1 & w_1 & z_1 & z_1\,w_1 & z_1^2 & z_1^2\,w_1 & \cdots & z_1^m & z_1^m\,w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & w_n & z_n & z_n\,w_n & z_n^2 & z_n^2\,w_n & \cdots & z_n^m & z_n^m\,w_n \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Із формули (7) маємо, що обернена різниця 2-го типу $\rho_{2m+1}^{(2)}[z_0, \ldots, z_{2m+1}]$ також симетрична відносно всіх своїх аргументів.

3. Обернені похідні 2–го типу. При побудові оберненої різниці 2–го типу робилося припущення, що параметри, вузли інтерполяції, $z_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$, усі різні. Розглянемо граничний випадок оберненої різниці 2–го типу, коли всі вузли, чи деяка їх частина, прямують до одного і того ж значення.

Означення 1. *Якщо існує границя (скінчене значення або нескінченість) оберненої різниці 2–го типу $\rho_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k]$, коли вузли $z_0, z_1, \ldots, z_k$ прямують до $z \in \mathrm{Z}$, то вона називається оберненою похідною 2–го типу і позначимо через ${}^{[k]}f(z)$.*

З означення випливає, що

$$^{[k]}f(z) = \rho_k^{(2)}[\underbrace{z, \dots, z}_{k+1}] = \lim_{z_0, z_1, \dots, z_k \to z} \rho_k^{(2)}[z_0, z_1, \dots, z_k].$$

При $m = 0$ із (7) маємо

$$^{[1]}f(z) = -\lim_{z_0, z_1 \to z} \frac{\begin{vmatrix} f(z_0) & f(z_0)\, z_0 \\ f(z_1) & f(z_1)\, z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z_0) \\ 1 & f(z_1) \end{vmatrix}} = -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\begin{vmatrix} f(z) & f(z)\, z \\ f(z+\Delta z) & f(z+\Delta z)\,(z+\Delta z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 1 & f(z+\Delta z) \end{vmatrix}} =$$

$$= -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z) f(z+\Delta z) \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & z+\Delta z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 1 & f(z+\Delta z) \end{vmatrix}} = -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)\, f(z+\Delta z) \begin{vmatrix} 1 & z \\ 0 & \Delta z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 0 & f(z+\Delta z) - f(z) \end{vmatrix}}.$$

Розділимо чисельник і знаменник на Δz та перейдемо до границі при $\Delta z \to 0$, маємо

$$^{[1]}f(z) = -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)\, f(z+\Delta z) \begin{vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(z) \\ 0 & \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \end{vmatrix}} = -\frac{f^2(z)}{f'(z)}. \qquad (8)$$

Визначимо рекурентне співвідношення для обчислення обернених похідних 2–го типу. З (2) та (4) випливає, що

$$\rho_k^{(2)}[z_0, \dots, z_k] - \rho_{k-2}^{(2)}[z_0, \dots, z_{k-2}] = \frac{z_k - z_{k-1}}{\rho_{k-1}^{(2)}[z_0, \dots, z_{k-2}, z_k] - \rho_{k-1}^{(2)}[z_0, \dots, z_{k-1}]}.$$

Нехай $z_0 = z_1 = \dots = z_{k-1} = z$, а $z_k = u$. Тоді

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z, \dots, z, z] - \rho_{k-1}^{(2)}[z, \dots, z, u]}{z - u} = \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z, \dots, z, u] - \rho_{k-2}^{(2)}[z, \dots, z, z]}.$$

Аналогічно

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z, \dots, z, u] - \rho_{k-1}^{(2)}[z, \dots, z, u, u]}{z - u} = \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z, \dots, z, u, u] - \rho_{k-2}^{(2)}[z, \dots, z, u]},$$

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z, \dots, z, u, u] - \rho_{k-1}^{(2)}[z, \dots, z, u, u, u]}{z - u} = \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z, \dots, z, u, u, u] - \rho_{k-2}^{(2)}[z, \dots, z, u, u]},$$

. . . .

$$\frac{\rho_{k-1}^{(2)}[z, u \dots, u] - \rho_{k-1}^{(2)}[u, \dots, u]}{z - u} = \frac{1}{\rho_k^{(2)}[z, u, \dots, u] - \rho_{k-2}^{(2)}[u, \dots, u]}.$$

Додавши k співвідношень та перейшовши до границі при u прямуючому до z, маємо

$$\lim_{u\to z}\frac{\rho^{(2)}_{k-1}[z,\dots,z]-\rho^{(2)}_{k-1}[u,\dots,u]}{z-u}=\frac{k}{{}^{[k]}f(z)-{}^{[k-2]}f(z)},\ \left({}^{[k-1]}f(z)\right)'=\frac{k}{{}^{[k]}f(z)-{}^{[k-2]}f(z)}.$$

Кінцеве отримуємо наступне рекурентне співвідношення для знаходження обернених похідних 2–го типу

$$ {}^{[k]}f(z)=\frac{k}{\left({}^{[k-1]}f(z)\right)'}+{}^{[k-2]}f(z), \qquad k=2,3,4,\dots . \tag{9}$$

4. Властивості обернених похідних 2–го типу. Із (8) безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 2. *1) Нехай в точці $z_0\in \mathrm{Z}$ функція $f(z_0)\neq 0$. Тоді: а) ${}^{[1]}f(z_0)=\infty$, якщо $f'(z_0)=0$; б) ${}^{[1]}f(z_0)=0$, якщо $f'(z_0)=\infty$.*
2) Нехай в точці $z_0\in \mathrm{Z}$ похідна функції $f'(z_0)\neq 0$. Тоді ${}^{[1]}f(z_0)=\infty$, якщо $f(z_0)=\infty$.
3) Нехай $C=Const, C\neq 0$, тоді ${}^{[1]}C=\infty$.

Теорема 3. *Нехай для кожного $z\in \mathrm{Z}$ функції $u=f(z)$ та $v=g(z)$ мають скінчені обернені похідні 2–го типу. Тоді існують обернені похідні 2–го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій і мають місце формули:*

$$ {}^{[1]}(u\pm v)=\frac{(u\pm v)^2\cdot{}^{[1]}u\cdot{}^{[1]}v}{u^2\cdot{}^{[1]}v\pm v^2\cdot{}^{[1]}u},\ {}^{[1]}(u\cdot v)=\frac{uv\cdot{}^{[1]}u\cdot{}^{[1]}v}{u\cdot{}^{[1]}v+v\cdot{}^{[1]}u},\ {}^{[1]}(u/v)=\frac{(u/v)\cdot{}^{[1]}u\cdot{}^{[1]}v}{u\cdot{}^{[1]}v-v\cdot{}^{[1]}u}.$$

Доведення. Із (8) випливає, що

$$ {}^{[1]}\big(u\circ v\big)=-\frac{\big(u\circ v\big)^2}{\big(u\circ v\big)'}, \tag{10}$$

де "$\circ$" одна із операцій "+","−","×",":". З іншого боку з (8) маємо, що $w'=$ $=-w^2/{}^{[1]}w$. Підставивши значення u' та v' у (10) отримуємо твердження теореми.

Теорема 4. *Якщо функції $w_i=f_i(z)$, $i=1,2,3,\dots,n$, мають обернені похідні 2–го типу для кожного $z\in \mathrm{Z}$, то тоді*

$$ {}^{[1]}\Big(\sum_{i=1}^n w_i\Big)=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n w_i\Big)^2\prod\limits_{i=1}^n{}^{[1]}w_i}{\sum\limits_{i=1}^n w_i^2\cdot\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n{}^{[1]}w_j}, \qquad {}^{[1]}\Big(\prod_{i=1}^n w_i\Big)=\frac{\prod\limits_{i=1}^n(w_i\cdot{}^{[1]}w_i)}{\sum\limits_{i=1}^n w_i\cdot\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n{}^{[1]}w_j}\ . \tag{11}$$

Доведення. Співвідношення (11) доводяться за індукцією спираючись на теорему 3.

Теорема 5. *Нехай функція $w=f(z)$ для кожного $z\in \mathrm{Z}$ має обернені похідні 2–го типу до n–го порядку включно і C — стала, тоді виконуються співвідношення*

$$ {}^{[2m]}(Cw)=\frac{1}{C}\cdot{}^{[2m]}w, \qquad {}^{[2m+1]}(Cw)=C\cdot{}^{[2m+1]}w, \qquad m=0,1,2,\dots .$$

Доведення. Теорема доводиться за індукцією. При $m = 0$ з (8) безпосередньо випливає, що ${}^{[0]}(Cw) = \frac{1}{C} \cdot {}^{[0]}w$, ${}^{[1]}(Cw) = C \cdot {}^{[1]}w$. Припустимо, що твердження теореми виконується для $m = 2k$. Тоді при $m = 2k + 1$ із (9) випливає, що

$$ {}^{[2k+1]}(Cw) = \frac{2k+1}{\left({}^{[2k]}(Cw)\right)'} + {}^{[2k-1]}(Cw) = C \cdot \frac{2k+1}{\left({}^{[2k]}w\right)'} + C \cdot {}^{[2k-1]}w = C \cdot {}^{[2k+1]}w \,. $$

Аналогічно при $m = 2k + 2$

$$ {}^{[2k+2]}(Cw) = \frac{2k+2}{\left({}^{[2k+1]}(Cw)\right)'} + {}^{[2k]}(Cw) = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{2k+2}{\left({}^{[2k+1]}w\right)'} + {}^{[2k]}w \right) = \frac{1}{C} \cdot {}^{[2k+2]}w \,. $$

Зауваження 1. *Нехай* ${}^{(n)}w$ *обернена похідна Тіле* [14] *функції* $w = f(z)$ *на компакті* Z. *Аналогічно, як і у випадку функції дійсної змінної* [15], *обернені похідні Тіле для функції комплексної змінної володіють властивостями:*

$$ {}^{(2k)}(w + C) = {}^{(2n)}w + C, \quad {}^{(2k+1)}(w + C) = {}^{(2k+1)}w, \qquad C = const, k = 0, 1, 2, \ldots \,. $$

Але для обернених похідних 2–го типу подібні властивості не мають місця, оскільки

$$ {}^{[0]}(w + C) = \frac{1}{w + C}, \quad {}^{[1]}(w + C) = \left(\frac{C + w}{w}\right)^2 \cdot {}^{[1]}w \,. $$

5. Розвинення деяких функцій комплексної змінної в ланцюговий дріб з формулою типу Тіле. З (4) маємо

$$ b_0(z) = \lim_{z_0 \to z} \rho_0^{(2)}[z_0] = \frac{1}{f(z)}, \; b_1(z) = \lim_{z_0, z_1 \to z} \rho_1[z_0, z_1] = {}^{[1]}f(z), $$

$$ b_k(z) = \lim_{z_0, \ldots, z_k \to z} \rho_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k] - \rho_{k-2}^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k] = \frac{k}{\left({}^{[k-1]}f(z)\right)'}, \; k = 2, 3, 4, \ldots $$

Якщо припустити, що функція $f(z)$ на компакті Z має скінчені обернені похідні 2–го типу довільного порядку, то в околі точки z_* функцію можна розвинути в ланцюговий дріб за формулою типу Тіле

$$ f(z) = \left(\frac{1}{f(z_*)} + \frac{z - z_*}{{}^{[1]}f(z_*) +} \; \frac{z - z_*}{2/\left({}^{[1]}f(z_*)\right)' +} \; \cdots + \; \frac{z - z_*}{n/\left({}^{[n-1]}f(z_*)\right)' +} \; \cdots \right)^{-1} . \qquad (12) $$

Ланцюговий дріб (12) називається квазі–оберненим ланцюговим дробом типу Тіле. Отримаємо розвинення деяких функцій в ланцюговий дріб такого вигляду.

5.1. Функція $\mathbf{w = e^z}$. Доведемо наступне твердження.

Теорема 6. *Функція* $y = e^z$ *має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$$ {}^{[2n]}e^z = (-1)^n e^{-z}, \qquad {}^{[2n+1]}e^z = (-1)^{n+1}(n+1)\, e^z, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,. \qquad (13) $$

Доведення. Легко бачити, що ${}^{[0]}e^z = e^{-z}$, ${}^{[1]}e^z = -e^z$, ${}^{[2]}e^z = -e^{-z}$, ${}^{[3]}e^z = 2\,e^z$. Отже, при $n = 0, 1$ (13) мають місце. Припустимо, що вони виконуються для $n = k$. Тоді для $n = k + 1$ із формули (9) маємо

$$ {}^{[2(k+1)]}e^z = \frac{2(k+1)}{\left({}^{[2k+1]}e^z\right)'} + {}^{[2k]}e^z = \frac{2(k+1)}{(-1)^{k+1}(k+1)e^z} + (-1)^k e^{-z} = (-1)^{k+1} e^{-z}\,. $$

$$ {}^{[2(k+1)+1]}e^z = \frac{2k+3}{\left({}^{[2k+2]}e^z\right)'} + {}^{[2k+1]}e^z = \frac{2k+3}{(-1)^{k+2}e^{-z}} + (-1)^{k+1}(k+1)e^z = (-1)^{k+2}(k+2)e^z\,. $$

Отже, формула виконується і в цьому випадку.

Із (13) випливає, що

$$ \frac{2n}{\left({}^{[2n-1]}e^z\right)'} = {}^{[2n]}e^z - {}^{[2n-2]}e^z = (-1)^n\, 2\, e^{-z}, $$

$$ \frac{2n+1}{\left({}^{[2n]}e^z\right)'} = {}^{[2n+1]}e^z - {}^{[2n-1]}e^z = (-1)^{n+1}\,(2n+1)e^z, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,. $$

Отримуємо розвинення функції $w = e^z$ в околі точки $z = z_*$ за формулою типу Тіле (12)

$$ e^z = \frac{1}{e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{-e^{z_*}+}\,\frac{z-z_*}{-2e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{3e^{z_*}+}\,\frac{z-z_*}{2e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{-5e^{z_*}+}\,\frac{z-z_*}{-2e^{-z_*}+}\,\cdots+ $$
$$ +\,\frac{z-z_*}{(-1)^k 2e^{-z_*}+}\,\frac{z-z_*}{(-1)^{k+1}(2k+1)e^{z_*}+}\,\cdots, $$

або після еквівалентних перетворень

$$ e^z = \frac{e^{z_*}}{1+}\,\frac{z-z_*}{-1+}\,\frac{z-z_*}{-2+}\,\frac{z-z_*}{3+}\,\frac{z-z_*}{2+}\,\frac{z-z_*}{-5+}\,\frac{z-z_*}{-2+}\,\cdots+ $$
$$ +\,\frac{z-z_*}{(-1)^k 2+}\,\frac{z-z_*}{(-1)^{k+1}(2k+1)+}\,\cdots\,. $$

Зокрема при $z_* = 0$ маємо розвинення функції e^z в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле

$$ e^z = \frac{1}{1+}\,\frac{z}{-1+}\,\frac{z}{-2+}\,\frac{z}{3+}\,\frac{z}{2+}\,\frac{z}{-5+}\,\frac{z}{-2+}\,\cdots+\frac{z}{(-1)^n 2+}\,\frac{z}{(-1)^{n+1}(2n+1)+}\,\cdots, $$

яке збігається із відомим розвиненням цієї функції , яке отримане за методом Лагранжа знаходження розв'язку диференціального рівняння Ріккаті [4].

5.2. Функція $\mathbf{w = (c + z)^{\alpha}}$. Нехай $c \in \mathbb{C}$, $c = const$. Доведемо теорему.

Теорема 7. ***(A)*** *Якщо $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, то функція $w = (c + z)^{\alpha}$ має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$$ {}^{[2n]}(c+z)^{\alpha} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{n}(m-\alpha)}{\prod\limits_{m=1}^{n}(m+\alpha)}\,(c+z)^{-\alpha}, \tag{14} $$

$$
{}^{[2n+1]}(c+z)^{\alpha} = \frac{(n+1)\prod_{m=2}^{n+1}(m+\alpha)}{\prod_{m=0}^{n}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{15}
$$

(B) *Якщо $\alpha = n$, то функція $w = (c+z)^n$ має обернені похідні 2–го типу до $2n$–го порядку включно, які визначаються за формулами* (14) *та* (15)*, крім того*

$$
{}^{[2n]}(c+z)^{n} = 0. \tag{16}
$$

(C) *Якщо $\alpha = -n$, то функція $w = (c+z)^{-n}$ має обернені похідні 2–го типу до $(2n-1)$–го порядку включно, які визначаються за формулами* (14) *та* (15)*, крім того*

$$
{}^{[2n-1]}(c+z)^{-n} = 0. \tag{17}
$$

Доведення. **(A)** Для доведення формул (14) та (15) скористаємося методом повної математичної індукції. Із означення оберненої похідної 2–го типу та (9) маємо

$$
{}^{[0]}(c+z)^{\alpha} = (c+z)^{-\alpha}, \quad {}^{[1]}(c+z)^{\alpha} = \frac{(c+z)^{2\alpha}}{(-\alpha)(c+z)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(-\alpha)}(c+z)^{1+\alpha},
$$

$$
{}^{[2]}(c+z)^{\alpha} = \frac{2(-\alpha)}{((c+z)^{\alpha+1})'} + \frac{1}{(c+z)^{\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(c+z)^{-\alpha},
$$

$$
{}^{[3]}(c+z)^{\alpha} = \frac{3(1+\alpha)}{(1-\alpha)((c+z)^{-\alpha})'} + \frac{1}{(-\alpha)}(c+z)^{1+\alpha} = \frac{2(2+\alpha)}{(-\alpha)(1-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}.
$$

Отже, при $n = 0, 1$ формули (14) та (15) виконуються. Зробимо припущення, що вони мають місце при $n = k$. Тоді при $n = k+1$ із (9) маємо

$$
{}^{[2(k+1)]}(c+z)^{\alpha} = \frac{2\prod_{m=0}^{k}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{k+1}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha} + \frac{\prod_{m=1}^{k}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{k}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha} = \frac{\prod_{m=1}^{k+1}(m-\alpha)}{\prod_{m=1}^{k+1}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha},
$$

$$
{}^{[2(k+1)+1]}(c+z)^{\alpha} = \frac{(2k+3)\prod_{m=1}^{k+1}(m+\alpha)}{\prod_{m=0}^{k+1}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1} + \frac{(k+1)\prod_{m=2}^{k+1}(\alpha+m)}{\prod_{m=0}^{k}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1} =
$$

$$
= \frac{(k+2)\prod_{m=2}^{k+2}(\alpha+m)}{\prod_{m=0}^{k+1}(\alpha-m)}(c+z)^{\alpha+1}.
$$

Формули (14) і (15) виконуються і в цьому випадку, а тоді вони виконуються при довільному n.

Твердження теореми у випадках **(B)**, **(C)**, а також формули (16), (17) безпосередньо випливають із **(A)** відповідно при $\alpha = n$ та $\alpha = -n$.

Із (14)–(15) отримуємо, що при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{2n}{\left({}^{[2n-1]}(c+z)^{\alpha}\right)'} = {}^{[2n]}(c+z)^{\alpha} - {}^{[2n-2]}(c+z)^{\alpha} = \frac{2\prod\limits_{m=0}^{n-1}(m-\alpha)}{\prod\limits_{m=1}^{n}(m+\alpha)}(c+z)^{-\alpha}, \quad (18)$$

$$\frac{2n+1}{\left({}^{[2n]}(c+z)^{\alpha}\right)'} = {}^{[2n+1]}(c+z)^{\alpha} - {}^{[2n-1]}(c+z)^{\alpha} = \frac{(2n+1)\prod\limits_{m=1}^{n}(m+\alpha)}{\prod\limits_{m=0}^{n}(m-\alpha)}(c+z)^{\alpha+1}. \quad (19)$$

Після еквівалентних перетворень отримуємо розвинення функції $w = (c+z)^{\alpha}$ в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб

$$(c+z)^{\alpha} = \frac{\vartheta^{\alpha}}{1+}\,\frac{(-\alpha)(z-z_*)}{\vartheta\quad+}\,\frac{(1+\alpha)(z-z_*)}{2\quad+}\,\frac{(1-\alpha)(z-z_*)}{3\vartheta\quad+}\,\frac{(2+\alpha)(z-z_*)}{2\quad+}$$

$$+\,\frac{(2-\alpha)(z-z_*)}{5\vartheta\quad+}\cdots+\frac{(n+\alpha)(z-z_*)}{2\quad+}\,\frac{(n-\alpha)(z-z_*)}{(2n+1)\vartheta\quad+}\cdots, \quad (20)$$

де $\vartheta = c + z_*$.

З (20) випливає розвинення функції $w = (1+z)^{\alpha}$ в околі точки $z_* = 0$

$$(1+z)^{\alpha} = \frac{1}{1+}\,\frac{(-\alpha)z}{1\quad+}\,\frac{(1+\alpha)z}{2\quad+}\,\frac{(1-\alpha)z}{3\quad+}\cdots+\frac{(n+\alpha)z}{2\quad+}\,\frac{(n-\alpha)z}{(2n+1)+}\cdots.$$

В книзі [4] розвинення отримано за допомогою методу Лагранжа відшукання розв'язку диференціального рівняння Ріккаті.

5.3. Функції $\mathbf{w} = \sqrt{\mathbf{c}+\mathbf{z}}$, $\mathbf{w} = \mathbf{1}/\sqrt{\mathbf{c}+\mathbf{z}}$. Із теореми 7 та (18)–(19) випливає наступне твердження.

Теорема 8. *Обернені похідні 2–го типу функції $w = \sqrt{c+z}$ знаходяться за формулами*

$${}^{[2n]}\left(\sqrt{c+z}\,\right) = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{c+z}},$$

$${}^{[2n+1]}\left(\sqrt{c+z}\,\right) = -\frac{2(n+1)(2n+1)(2n+3)}{-3}\left(\sqrt{c+z}\right)^{3}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

коефіцієнти розвинення цієї функції в квазі–обернений ланцюгового дробу типу Тіле (12) *в околі точки $z = z_*$ рівні*

$${}^{[0]}\left(\sqrt{c+z_*}\right) = \frac{1}{\sqrt{c+z_*}}, \qquad {}^{[1]}\left(\sqrt{c+z_*}\right) = -2\left(\sqrt{c+z_*}\right)^{3},$$

$$\frac{2n}{\left({}^{[2n-1]}\left(\sqrt{c+z_*}\right)\right)'} = \frac{-2}{(2n-1)(2n+1)\sqrt{c+z_*}},$$

$$\frac{2n+1}{\left({}^{[2n]}\left(\sqrt{c+z_*}\right)\right)'} = -2(2n+1)^{2}\left(\sqrt{c+z_*}\right)^{3}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Після еквівалентних перетворень з (20) маємо розвинення функції $w = \sqrt{c+z}$ в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб за формулою типу Тіле

$$\sqrt{c+z} = \frac{\sqrt{\vartheta}}{1} \underset{-}{} \frac{z-z_*}{2\vartheta} \underset{+}{} \frac{3(z-z_*)}{2} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{6\vartheta} \underset{+}{} \frac{5(z-z_*)}{2} \underset{+}{} \frac{3(z-z_*)}{10\vartheta} \underset{+}{} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(2n+1)(z-z_*)}{2} \underset{+}{} \frac{(2n-1)(z-z_*)}{2(2n+1)\vartheta} \underset{+}{} \cdots, \quad \vartheta = c + z_* . \tag{21}$$

З (21) при $z_* = 0$, $c = 1$ випливає розвинення функції $w = \sqrt{1+z}$ в околі нуля:

$$\sqrt{1+z} = \frac{1}{1} \underset{-}{} \frac{z}{2} \underset{+}{} \frac{3z}{2} \underset{+}{} \frac{z}{6} \underset{+}{} \frac{5z}{2} \underset{+}{} \frac{3z}{10} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(2n+1)z}{2} \underset{+}{} \frac{(2n-1)z}{2(2n+1)} \underset{+}{} \cdots .$$

Теорема 9. *Обернені похідні 2–го типу функції $w = 1/\sqrt{c+z}$ обчислюються за формулою*

$$^{[n]}\big(1/\sqrt{c+z}\big) = (n+1)\sqrt{c+z}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб за формулою типу Тіле в околі точки $z = z_*$ рівні

$$^{[0]}(1/\sqrt{c+z}) = \sqrt{c+z}, \quad ^{[1]}(1/\sqrt{c+z}) = 2\sqrt{c+z},$$

$$\frac{n}{\left(^{[n-1]}(1/\sqrt{c+z})\right)'} = 2\sqrt{c+z}, \qquad n = 2, 3, \dots .$$

З теореми 9 випливає, що в околі точки $z = z_*$ функція $w = 1/\sqrt{c+z}$ розвивається в квазі–обернений ланцюговий дріб Тіле наступним чином

$$\frac{1}{\sqrt{c+z}} = \left(\frac{1}{\vartheta} + \frac{z-z_*}{2\vartheta} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{2\vartheta} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{z-z_*}{2\vartheta} \underset{+}{} \cdots \right)^{-1}, \qquad \vartheta = \sqrt{c+z_*}.$$

В частинному випадку при $c = 1, z_* = 0$ маємо розвинення функції $w = 1/\sqrt{1+z}$ в околі нуля

$$1/\sqrt{1+z} = \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{z}{2} \underset{+}{} \frac{z}{2} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{z}{2} \underset{+}{} \cdots .$$

5.4. Функція $\mathbf{w} = \ln(\mathbf{c} + \mathbf{z})$. Нехай задана псі–функція

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{d z} = -\gamma + (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+z)},$$

де γ— стала Ойлера. Покажемо, що має місце наступне співвідношення для цілочислових значень псі–функції:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)(w_0 + \psi(k+1))(1 + w_0 + \psi(k+1)) = n^2 (w_0 + \psi(n))(w_0 + \psi(n+1)), \tag{22}$$

де $w_0 = const$.

Доведення. Співвідношення (22) доведемо за індукцією. При $n = 0$ співвідношення тривіальне. При $n = 2$ маємо

$$(w_0 + \psi(1))(1 + w_0 + \psi(1)) + 3(w_0 + \psi(2))(1 + w_0 + \psi(2)) =$$

$$= (w_0 + \psi(2) - 1)(w_0 + \psi(2)) + 3(w_0 + \psi(2))(1 + w_0 + \psi(2)) =$$
$$= (w_0 + \psi(2))(4(w_0 + \psi(2)) + 2)) = 2^2(w_0 + \psi(2))(w_0 + \psi(3)).$$

Припустимо, що (22) виконується при $n = s$. Тоді при $n = s + 1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{s}(2k+1)(w_0+\psi(k+1))(1+w_0+\psi(k+1)) = \sum_{k=0}^{s-1}(2k+1)(w_0+\psi(k+1))(1+w_0+$$

$$+\psi(k+1))+(2s+1)(w_0+\psi(s+1))(1+w_0+\psi(s+1)) = s^2(w_0+\psi(s))(w_0+\psi(s+1))+$$
$$+(2s+1)(w_0+\psi(s+1))(1+w_0+\psi(s+1)) = (w_0+\psi(s+1))(s^2(w_0+\psi(s+1)-\tfrac{1}{s})+$$
$$+(2s+1) + (2s+1)(w_0 + \psi(s+1))) = (s+1)^2(w_0 + \psi(s+1))(w_0 + \psi(s+2)).$$

Отже, (22) виконується і в цьому випадку.

Теорема 10. *Функція $w = \ln(c + z)$, де $c = const, z \neq -c$, має обернені похідні 2–го типу довільного порядку, які обчислюються за формулами*

$$^{[2n]}\ln(c+z) = \frac{1}{2\,S_n + \ln(c+z)}, \tag{23}$$

$$^{[2n+1]}\ln(c+z) = -(c+z)\sum_{m=0}^{n}(2m+1)\big(2\,S_m + \ln(c+z)\big)^2, \tag{24}$$

де $S_0 = 0, S_n = \gamma + \psi(n+1), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції. При $n = 0, 1$ з (8) та (9) маємо

$$^{[0]}\ln(c+z) = \frac{1}{2S_0 + \ln(c+z)}, \quad ^{[1]}\ln(c+z) = -(c+z)(2S_0 + \ln(c+z))^2,$$

$$^{[2]}\ln(c+z) = \frac{1}{2S_1 + \ln(c+z)}, \quad ^{[3]}\ln(c+z) = -(c+z)\sum_{m=0}^{1}(2n+1)\big(2S_m + \ln(c+z)\big)^2.$$

Формули вірні. Зробимо припущення, що при $n = l$ формули (23)–(24) виконуються. Тоді

$$^{[2l+2]}\ln(c+z) = \frac{2l+2}{\left(^{[2l+1]}\ln(c+z)\right)'} + {}^{[2l]}\ln(c+z) =$$

$$= \frac{-2(l+1)}{\sum_{m=0}^{l}(2m+1)(2S_m + \ln(c+z))(2S_m + \ln(c+z) + 2)} + \frac{1}{2S_l + \ln(c+z)}.$$

До знаменника першого дробу застосуємо (22), маємо

$$^{[2l+2]}\ln(c+z) = \frac{-2/(l+1)}{(2S_l + \ln(c+z))(2S_{l+1} + \ln(c+z))} +$$

$$+\frac{1}{2S_l+\ln(c+z)}=\frac{1}{2S_{l+1}+\ln(c+z)}\,.$$

В свою чергу

$$^{[2l+3]}\ln(c+z)=\frac{2l+3}{\left(^{[2l+2]}\ln(c+z)\right)'}+{}^{[2l+1]}\ln(c+z)=-(c+z)(2l+3)\big(2S_{l+1}+\ln(c+z)\big)^2-$$

$$-(c+z)\sum_{m=0}^{l}(2m+1)\big(2S_m+\ln(c+z)\big)^2=-(c+z)\sum_{m=0}^{l+1}(2m+1)\big(2S_m+\ln(c+z)\big)^2.$$

Формули (23)–(24) виконуються і при $n=l+1$.

Із (23)–(24) безпосередньо випливає, що коефіцієнти розвинення функції $w=\ln(c+z)$ в ланцюговий дріб (12) в околі точки $z=z_*$ будуть рівні

$$^{[0]}\ln(c+z_*)=\frac{1}{\ln(c+z_*)},\ ^{[1]}\ln(c+z_*)=-(c+z_*)\ln^2(c+z_*),$$

$$\frac{2k}{\left(^{[2k-1]}\ln(c+z_*)\right)'}=\frac{-2/k}{\big(2S_{k-1}+\ln(c+z_*)\big)\big(2S_k+\ln(c+z_*)\big)},$$

$$\frac{2k+1}{\left(^{[2k]}\ln(c+z_*)\right)'}=-(c+z_*)(2k+1)\big(2S_k+\ln(c+z_*)\big)^2.$$

Маємо розвинення функції $\ln(c+z)$ в ланцюговий дріб

$$\ln(c+z)=\Bigg(\frac{1}{\ln(c+z_*)}+\frac{z-z_*}{-(c+z_*)\ln^2(c+z_*)+}\ \frac{z-z_*}{\frac{-2}{\ln(c+z)(2S_1+\ln(c+z))}+}$$

$$+\ \frac{z-z_*}{-(c+z_*)(2S_1+\ln(c+z_*))^2+}\ \frac{z-z_*}{\frac{-1}{(2S_1+\ln(c+z_*))(2S_2+\ln(c+z_*))}+}\ \cdots+$$

$$+\ \frac{z-z_*}{\frac{-2/k}{(2S_{k-1}+\ln(c+z_*))(2S_k+\ln(c+z_*))}+}\ \frac{z-z_*}{-(c+z_*)(2k+1)(2S_k+\ln(c+z_*))^2+\ \cdots}\Bigg)^{-1}.$$

Зробимо позначення $a=c+z_*, H_n=2S_n+\ln(c+z_*), n=0,1,2,\ldots,H_{-1}=1$. Тоді після еквівалентних перетворень розвинення запишеться у вигляді

$$\ln(c+z)=\frac{H_0}{1-}\ \frac{(z-z_*)H_{-1}}{aH_0+}\ \frac{(z-z_*)H_1}{2+}\ \frac{(z-z_*)H_0}{3aH_1+}\ \frac{(z-z_*)H_2}{1+}$$

$$+\ \frac{(z-z_*)H_1}{5aH_2+}\ \cdots+\frac{(z-z_*)H_k}{2/k+}\ \frac{(z-z_*)H_{k-1}}{(2k+1)aH_k+\ \cdots}.$$

У випадку $z_*=0, c=e$ маємо

$$\ln(c+z)=\frac{1}{1-}\ \frac{z}{e+}\ \frac{3z}{2+}\ \frac{z}{9e+}\ \frac{4z}{1+}\ \frac{3z}{20e+}\ \cdots+\frac{H_k^{(0)}z}{2/k+}\ \frac{H_{k-1}^{(0)}z}{(2k+1)eH_k^{(0)}+\ \cdots}.$$

Висновки. Для функції однієї комплексної змінної заданої на компакті $Z \subset \mathbb{C}$ розглядалися обернені похідної 2–го типу. Встановлені властивості таких похідних, зокрема отримані формули для знаходження обернених похідних 2–го типу для суми, різниці, добутку та частки двох функцій. Отримано аналог формули Тіле у випадку розвинення функції в квазі–обернений ланцюговий дріб. Розглянута формула типу Тіле не передбачає використання ані основного диференціального рівняння Ріккаті, ані подання функції через гіпергеометричні функції або відношення гіпергеометричних функцій, ані обчислення коефіцієнтів відповідного ланцюгового дробу через відношення ганкелевих визначників, які складені із коефіцієнтів розвинення функції в степеневий ряд. В роботі побудовані формальні розвинення деяких функцій за допомогою формули типу Тіле в квазі–обернений ланцюговий дріб, оскільки питання збіжності таких розвинень та встановлення областей рівномірної збіжності в цій роботі не розглядалися.

1. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1. Power Series–Integration–Conformal Mapping–Location of Zeros. – New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley–Interscience publication, 1974. – XV+682 p.
2. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. – 508 с.
3. *Бейкер(мл.) Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
4. *Khovanskii A. N.* The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
5. *Cuyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbooks of Continued Fractions for Special Functions. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2008. —XVI+431 p.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Под ред.й М. Абрамовица и И. Стиган. — Москва, Наука, Глав. ред. физ.–мат. литературы, 1979. – 832 с.
8. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
9. *Пагіря М. М.* Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — Вип. 17. — 2008. — С. 179–192.
10. *Пагіря М. М.* Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 99–105.
11. *Pahirya M.* Interpolation Function of Non–Thiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2002. – Vol. X, Summer 2002. – P. 59–62.
12. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. **46**, № 4. – С. 57–64.
13. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
14. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 S.
15. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Властивості обернених похідних // Український математичний журнал. – 2010. – **62**, № 5. – С. 708–713.

Одержано 08.12.2014