УДК 519.21

О. О. Синявська (Ужгородський національний університет)

БАКСТЕРІВСЬКА ОЦІНКА ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО НЕГАУССОВОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

In this paper the strong consistent estimate for the unknown parameter of the covariance function of one non-Gaussian stochastic processes by using Baxter statistics is obtained and the non-asymptotic confidence intervals are found.

В даній роботі за допомогою бакстерівських статистик отримано сильно консистентну оцінку невідомого параметра коваріаційної функції одного негауссового випадкового процесу та знайдено неасимптотичні довірчі інтервали.

Вступ. Бакстерівськими сумами називають послідовності сум нелінійних функцій від приростів випадкових процесів або полів. За певних умов послідовності бакстерівських сум збігаються у тому чи іншому сенсі до невипадкової сталої. Теореми, в яких встановлюється така збіжність, називаються теоремами Леві-Бакстера або теоремами бакстерівського типу.

Для гауссових випадкових процесів та випадкових процесів з гауссовими приростами такі теореми розглядались в роботах П. Леві [1], Г. Бакстера [2], Є. Г. Гладишева [3], І. А. Ібрагімова і Ю. А. Розанова [4] та інших. Збіжність послідовностей бакстерівських сум для гауссових випадкових полів вивчали С. М. Берман [5], С. М. Краснитський [6], Т. В. Арак [7], О. О. Курченко [8] та інші.

В останні десятиліття поряд з класичними методами оцінювання невідомих параметрів застосовують метод бакстерівських сум. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримати сильно консистентні оцінки та побудувати неасимптотичні довірчі області.

Оцінки для невідомих параметрів випадкових функцій за допомогою бакстерівських сум досліджувались, наприклад, у роботах О. В. Бесклінської та Р. Є. Майбороди [9], Ж.-М. Барде [10], Ю. В. Козаченка та О. О. Курченка [11]. О. О. Курченко [12] застосував бакстерівський підхід до побудови сильно консистентної оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху. Ж.-К. Бретон, І. Нурден та Дж. Пеккаті [13] за допомогою нерівностей концентрацій побудували довірчі інтервали для параметра Хюрста одновимірного дробового броунівського руху.

У 2011 році Ю. В. Козаченко та О. О. Курченко [14] отримали теореми бакстерівського типу для певного класу негауссових випадкових процесів, — випадкових процесів з приростами класу K. Це створило можливість застосування бакстерівських сум до оцінювання параметрів у моделях без припущення гауссовості.

Постановка задачі. Нехай (Ω, Σ, P) - стандартний ймовірнісний простір.

Означення 1. *[14] Випадковий вектор* $(\xi, \eta) \in L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$ *має властивість* K, *якщо*

1) $E\xi = E\eta = 0,$

2) $E(\xi \pm \eta)^4 \leq 3\left(E\left(\xi \pm \eta\right)^2\right)^2.$

Клас усіх двовимірних векторів з властивістю K позначимо K. Підклас K_1 класу K визначимо як набір усіх векторів класу K, для яких $E(\xi \pm \eta)^4 = 3\left(E\left(\xi \pm \eta\right)^2\right)^2$.

Означення 2. *Випадковий процес* $\{X(t), t \in [0,1]\}$ *з нульовим середнім значенням називається випадковим процесом з приростами p–го порядку класу K (відповідно K_1), якщо для довільних* $[t, t + p\Delta t], [s, s + p\Delta t] \subset [0, 1]$, $\Delta t, \Delta s > 0$ *випадковий вектор* $(\xi^{(p)}, \eta^{(p)})$, *де*

$$\xi^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i X\left(t + (p-i)\,\Delta t\right),$$

$$\eta^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i X\left(s + (p-i)\,\Delta s\right), p = 2, 3,$$

має властивість K (відповідно K_1).

Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією:

$$r(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ t, s \in [0,1],\ H \in (0,1), \tag{1}$$

і приростами другого та третього порядків класу K_1.

У роботі [15] наведений приклад негауссового випадкового процесу з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами першого порядку класу K_1, який ґрунтується на розкладі в ряд дробового броунівського руху [16]. Аналогічно, обґрунтовується існування негауссового випадкового процесу з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами другого та третього порядків класу K_1.

За спостереженнями випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ в точках

$$\left\{ \frac{k}{a_n}, \frac{k+1/3}{a_n}, \frac{k+1/2}{a_n}, \frac{k+2/3}{a_n}, \frac{k+1}{a_n} \middle| 0 \le k \le a_n - 1,\ n \ge 1 \right\},$$

де $(a_n) \subset \mathbf{N}, a_n \to +\infty, n \to \infty$, потрібно побудувати сильно консистентну оцінку параметра H та знайти неасимптотичні довірчі інтервали для параметра, що оцінюється. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ збіжний.

Сильно консистентна оцінка параметра H. Для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ введемо такі позначення:

$$\xi_{k,n}^{(2)} = \xi\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - 2\xi\left(\frac{k+1/2}{a_n}\right) + \xi\left(\frac{k}{a_n}\right),$$

$$\xi_{k,n}^{(3)} = \xi\left(\frac{k+1}{a_n}\right) - 3\xi\left(\frac{k+2/3}{a_n}\right) + 3\xi\left(\frac{k+1/3}{a_n}\right) - \xi\left(\frac{k}{a_n}\right),\ 0 \le k \le a_n - 1.$$

Розглянемо послідовності бакстерівських сум:

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)^2,\ \hat{S}_n^{(p)} = a_n^{2H-1} S_n^{(p)},\ p = 2, 3,\ n \ge 1.$$

Лема 1. *[14] Нехай випадковий вектор (ξ,η) належить класу K. Тоді виконується наступна нерівність:*

$$E\left(\xi^2\eta^2\right)\leq 2\left(E\xi\eta\right)^2+E\xi^2E\eta^2+\frac{1}{2}\left(\left(E\xi^2\right)^2-\frac{1}{3}E\xi^4\right)+\frac{1}{2}\left(\left(E\eta^2\right)^2-\frac{1}{3}E\eta^4\right).$$

Із цієї леми випливає, що для випадкового процесу $\{\xi(t),t\in[0,1]\}$ з приростами другого та третього порядків класу K_1 випадкові вектори $(\xi^{(p)},\eta^{(p)}),p=2,3$ введені в означенні 2, задовольняють таку нерівність:

$$E\left(\left(\xi^{(p)}\right)^2\left(\eta^{(p)}\right)^2\right)\leq 2\left(E\left(\xi^{(p)}\eta^{(p)}\right)\right)^2+E\left(\xi^{(p)}\right)^2E\left(\eta^{(p)}\right)^2,\quad p=2,3. \qquad (2)$$

Лема 2. *Нехай $\{\xi(t),t\in[0,1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) та приростами p–го порядку класу K_1, $p=2,3$. Тоді виконується нерівність:*

$$\sup_{H\in(0,1)}\mathrm{Var}\hat{S}_n^{(p)}\leq\frac{N_p}{a_n},$$

де

$$N_p=2\left(R_p+2L_p+2M_p^2\zeta(4p-4)\right),$$

$$V_p(m,H)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j\left|m+\frac{i-j}{p}\right|^{2H},0\leq m\leq a_n-1,$$

$$R_p=\sup_{H\in(0,1)}V_p^2(0,H),\ L_p=\sup_{H\in(0,1)}V_p^2(1,H),$$

$$M_p=\sup_{H\in(0,1)}\left|\frac{2H(2H-1)\cdots(2H-(2p-1))}{p^{2p}}\right|,\ p=2,3,$$

$\zeta(\cdot)$ — дзета-функція Рімана.

Доведення. Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_n^{(p)},p=2,3$, за допомогою нерівності 2:

$$\mathrm{Var}S_n^{(p)}=E\left(S_n^{(p)}-ES_n^{(p)}\right)^2=E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)^2-\sum_{k=0}^{a_n-1}E\left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2\leq$$

$$=\sum_{k,l=0}^{a_n-1}\left(E\left(\left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)^2\left(\xi_{l,n}^{(p)}\right)^2\right)-E\left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)^2E\left(\xi_{l,n}^{(p)}\right)^2\right)\leq$$

$$\leq 2\sum_{k,l=0}^{a_n-1}\left(E\left(\xi_{k,n}^{(p)}\xi_{l,n}^{(p)}\right)\right)^2.$$

Тоді, обчислюючи математичне сподівання добутку приростів p–го порядку класу K_1 випадкового процесу $\{\xi(t),t\in[0,1]\}$ з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією (1), одержимо:

$$E\left(\xi_{k,n}^{(p)}\xi_{l,n}^{(p)}\right)=E\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^iC_p^i\xi\left(\frac{k}{a_n}+(p-i)\frac{1}{a_n}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j \xi\left(\frac{l}{a_n}+(p-j)\frac{1}{a_n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}a_n^{-2H}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j\left|(k-l)+\frac{i-j}{p}\right|^{2H},\ 0\le l\le k\le a_n-1, \tag{3}$$

де $C_p^i=\frac{p!}{i!(p-i)!}, p=2,3.$

Позначимо

$$V_p(k-l,H)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j\left|(k-l)+\frac{i-j}{p}\right|^{2H}, H\in(0,1). \tag{4}$$

При $k=l$ маємо

$$E\left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)=a_n^{-2H}V_p(0,H).$$

Покладемо $k-l=m, 0\le m\le a_n-1$. Тоді із формул (3)–(4) випливає наступна нерівність:

$$\mathrm{Var}S_n^{(p)}\le 2\left(a_n^{1-4H}V_p^2(0,H)+2a_n^{-4H}\sum_{\substack{k,l=0,\\ l<k}}^{a_n-1}V_p^2(k-l,H)\right)=$$

$$=2\left(a_n^{1-4H}V_p^2(0,H)+2a_n^{-4H}\sum_{m=1}^{a_n-1}(a_n-m)V_p^2(m,H)\right)\le$$

$$\le 2a_n^{1-4H}\left(V_p^2(0,H)+2V_p^2(1,H)+2\sum_{m=2}^{a_n-1}V_p^2(m,H)\right). \tag{5}$$

Зауважимо, що при $p=2$ та $p=3$ із співвідношень (3)–(4) отримаємо, що:

$$V_2(m,H)=6m^{2H}-4\left|m+\frac{1}{2}\right|^{2H}+|m+1|^{2H}-4\left|m-\frac{1}{2}\right|^{2H}+|m-1|^{2H},$$

$$V_3(m,H)=20m^{2H}-15\left|m+\frac{1}{3}\right|^{2H}+6\left|m+\frac{2}{3}\right|^{2H}-|m+1|^{2H}-$$

$$-15\left|m-\frac{1}{3}\right|^{2H}+6\left|m-\frac{2}{3}\right|^{2H}-|m-1|^{2H},\ 0\le m\le a_n-1,\ H\in(0,1).$$

Оскільки, функція $V_p(m,H)$ є приростом $2p$–го порядку функції $f(x)=x^{2H}$, $x\ge 1, H\in(0,1)$, на відрізку $[m-1,m+1]$, то з формули [17, c. 244] для приросту n–го порядку функції $f(x)$:

$$\Delta^{(n)}f(x)=f^{(n)}(\theta_m)\Delta x^n,$$

де $f(x)$ така, що має $n-1$ неперервних похідних $f'(x), f''(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$ на відрізку $[m-1,m+1]$ і скінченну n–ту похідну $f^{(n)}(x)$ на інтервалі $(m-1,m+1)$,

$\Delta^{(n)} f(x)$ — приріст n–го порядку $f(x)$, $\theta_m \in (m-1, m+1)$. Тоді для $n = 2p$, $p = 2, 3$ одержимо, що:

$$V_p(m, H) = f^{(2p)}(\theta_m) \left(\frac{1}{p}\right)^{2p} = \frac{2H(2H-1)\cdots(2H-(2p-1))}{p^{2p}} \theta_m^{2H-2p}.$$

Для $m - 1 < \theta_m, m \geq 2$ маємо:

$$V_p^2(0, H) \leq \frac{M_p^2}{(m-1)^{2(2p-2H)}},$$

де

$$M_p = \sup_{H \in (0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)\cdots(2H-(2p-1))}{p^{2p}} \right|, \; p = 2, 3. \tag{6}$$

При $H \in (0, 1)$ маємо

$$\sum_{m=2}^{a_n - 1} \frac{1}{2^{2(2p-2H)}} = \zeta\left(2(2p-2H)\right) \leq \zeta\left(4p-4\right)),$$

де $\zeta(\cdot)$ — дзета-функція Рімана. З останньої нерівності та нерівності (5) випливає, що:

$$\mathrm{Var} S_n^{(p)} \leq 2a_n^{1-4H} \left(R_p + 2L_p + 2M_p^2 \sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{(m-1)^{2(2p-2H)}} \right) \leq$$

$$\leq 2a_n^{1-4H} \left(R_p + 2L_p + 2M_p^2 \zeta\left(4p-4\right)\right), \tag{7}$$

де

$$R_p = \sup_{H \in (0,1)} V_p^2(0, H), L_p = \sup_{H \in (0,1)} V_p^2(1, H). \tag{8}$$

Покладемо

$$N_p = 2\left(R_p + 2L_p + 2M_p^2 \zeta\left(4p-4\right)\right), p = 2, 3. \tag{9}$$

Тоді з нерівності (7) та формул (8)–(9) отримаємо:

$$\sup_{H \in (0,1)} \mathrm{Var} S_n^{(p)} \leq a_n^{1-4H} N_p\,,$$

а для випадкової величини $\hat{S}_n^{(p)} = a_n^{2H-1} S_n^{(p)}$, $p = 2, 3$ маємо

$$\sup_{H \in (0,1)} \mathrm{Var} \hat{S}_n^{(p)} \leq \frac{N_p}{a_n}\,,$$

де $N_p, p = 2, 3$ визначено в (9). Лема доведена.

З леми 2 та рівностей (3)–(4) для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами другого та третього порядків класу K_1 одержимо:

$$V_2(0, H) = 2^{2-2H} - 1,\; V_3(0, H) = 1 + \frac{15}{3^{2H}} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^{2H},$$

та

$$V_2(1,H) = \frac{6\cdot 2^{2H} - 4 - 4\cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}},$$

$$V_3(1,H) = \frac{20\cdot 3^{2H} - 15\cdot 4^{2H} + 6\cdot 5^{2H} - 6^{2H} - 15\cdot 2^{2H} + 6}{3^{2H}}, H \in (0,1).$$

За допомогою програми Wolfram Mathematica 7.0 з формул (6) та (8) при $p = 2$ та $p = 3$ знайдено, що:

$$R_2 = \sup_{H\in(0,1)} V_2^2(0,H) = 9,\ L_2 = \sup_{H\in(0,1)} V_2^2(1,H) = 1, \tag{10}$$

$$M_2 = \sup_{H\in(0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4} \right| \approx \frac{9}{256}, \tag{11}$$

$$R_3 = \sup_{H\in(0,1)} V_3^2(0,H) = 100, L_3 = \sup_{H\in(0,1)} V_3^2(1,H) = 1, \tag{12}$$

$$M_3 = \sup_{H\in(0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)(2H-4)(2H-5)}{3^6} \right| \approx 0.007, \tag{13}$$

Далі, з нерівностей (5), (7), рівності (10) і наближеної рівності (11) та враховуючи, що $\zeta(8-4H) \le \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ [18, с. 1086] для $H \in (0,1)$, отримаємо наступну низку нерівностей при $p = 2$:

$$\mathrm{Var} S_n^{(2)} \le 2a_n^{1-4H} \left(R_2 + 2L_2 + 2M_2^2 \sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{(m-1)^{8-4H}} \right) \le$$

$$\le 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{9}{256}\right)^2 \frac{\pi^4}{90} \right) \le 22a_n^{1-4H}.$$

Тоді, з рівності (9) одержимо, що $N_2 \approx 22$ та для $\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} S_n^{(2)}$ маємо:

$$\sup_{H\in(0,1)} \mathrm{Var}\hat{S}_n^{(2)} \le \frac{N_2}{a_n}.$$

Аналогічно, з нерівностей (5), (7), співвідношень (12)–(13) та беручи до уваги, що $\zeta(12-4H) \le \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$ [18, с. 1086] для $H \in (0,1)$, отримаємо:

$$\mathrm{Var} S_n^{(3)} \le 2a_n^{1-4H} \left(R_3 + 2L_3 + 2M_3^2 \sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{(m-1)^{12-4H}} \right) \le$$

$$\le 2a_n^{1-4H} \left(100 + 2 + 2\,(0,007)^2 \frac{\pi^8}{9450} \right) \le 204a_n^{1-4H}.$$

Отже, з формули (9) заключаємо, що $N_3 \approx 204$. Тоді для $\hat{S}_n^{(3)} = a_n^{2H-1} S_n^{(3)}$ отримаємо

$$\sup_{H\in(0,1)} \mathrm{Var}\hat{S}_n^{(3)} \le \frac{N_3}{a_n}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ *— випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) та приростами p–го порядку класу* K_1, $p = 2, 3$. *Тоді*

$$\frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}} \to \frac{2^{2H}\left(3^{2H} + 16 - 6 \cdot 2^{2H}\right)}{3^{2H}\left(4 - 2^{2H}\right)}, \ H \in (0,1)$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Доведення. Обчислимо $E\hat{S}_n^{(2)}$ та $E\hat{S}_n^{(3)}$, застосовуючи лему 2:

$$E\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(2)}\right)^2 = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} a_n^{-2H} V_2(0,H) = 2^{2-2H} - 1, \tag{14}$$

$$E\hat{S}_n^{(3)} = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(3)}\right)^2 = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} a_n^{-2H} V_3(0,H) =$$

$$= 1 + \frac{15}{3^{2H}} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^{2H}. \tag{15}$$

Із леми 2 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ випливає, що для довільного $H \in (0,1)$ ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\hat{S}_n^{(p)}$, $p = 2, 3$ збігаються. Тому $\hat{S}_n^{(p)} - E\hat{S}_n^{(p)} \to 0$, $p = 2, 3$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ [19, с. 24]. Враховуючи рівності (14)-(15), отримаємо твердження теореми.

Розглянемо функцію

$$\theta(H) = \frac{2^{2H}\left(3^{2H} + 16 - 6 \cdot 2^{2H}\right)}{3^{2H}\left(4 - 2^{2H}\right)}, \ H \in (0,1). \tag{16}$$

Ця функція є неперервною та спадною на проміжку (0, 1), причому

$$\theta(0+) = \frac{10}{3}, \theta(1-) = \frac{1}{3}\frac{8\ln 2 - 3\ln 3}{\ln 2} \approx 1.$$

Нехай $\varphi(\theta), \theta \in \left(1, \frac{10}{3}\right)$— функція, обернена до функції $\theta(H), H \in (0,1)$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді статистика*

$$\hat{H}_n = \varphi(\hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n = \frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}}, \ n \geq 1,$$

є сильно консистентною оцінкою параметра H.

Доведення. Оскільки, функція $\varphi(\theta), \theta \in \left(1, \frac{10}{3}\right)$, обернена до функції (16), то із збіжності $\hat{\theta}_n \to \theta(H)$, $n \to \infty$ випливає, що має місце збіжність $\hat{H}_n \to H$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Довірчі інтервали. З теореми 4.1 статті [15] випливає така теорема.

Теорема 3. *Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) та приростами другого та третього порядків класу K_1, а також $\frac{9p}{2} - \lambda_n > 0$. Тоді інтервал $(l_n(p), r_n(p))$, де*

$$l_n(p) = \varphi\left(\min\left(\hat{\theta}_n + \gamma_n(p), \frac{10}{3}\right)\right), r_n(p) = \varphi\left(\max\left(1, \hat{\theta}_n - \gamma_n(p)\right)\right),$$

$$\hat{\theta}_n = \frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}}, \gamma_n(p) = \frac{12\lambda_n + 2\sqrt{D_n}}{9p - 2\lambda_n},$$

$D_n = 18p\,(9\lambda_n + \mu_n) - 4\lambda_n\mu_n > 0$ *для достатньо великих* $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \frac{22}{a_n}$, $\mu_n = \frac{204}{a_n}$, $\varphi(\theta)$ — *функція, оберенена до функції (16), є довірчим інтервалом для параметра H з рівнем довіри $1 - p, p \in (0,1)$.*

Приклад. Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами другого та третього порядків класу K_1, який спостерігається в точках $\{\frac{k}{2^n}, \frac{k+1/3}{2^n}, \frac{k+1/2}{2^n}, \frac{k+2/3}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \big| 0 \le k \le 2^n - 1,\ n \ge 1\}$. Розглянемо послідовності бакстерівських сум для $n \ge 1$:

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - 2\xi\left(\frac{k+1/2}{2^n}\right) + \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2,$$

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - 3\xi\left(\frac{k+2/3}{2^n}\right) + 3\xi\left(\frac{k+1/3}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2,$$

$\hat{S}_n^{(p)} = 2^{n(2H-1)} S_n^{(p)}$, $p = 2, 3$.

За теоремою 1 одержимо, що з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$:

$$\frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}} \to \frac{2^{2H}\left(3^{2H} + 16 - 6 \cdot 2^{2H}\right)}{3^{2H}\left(4 - 2^{2H}\right)},\ H \in (0,1).$$

Побудуємо довірчий інтервал для параметра H з рівнем довіри $1 - p = 0.9$. Нехай $n = 20$. Тоді з теореми 3 для значень $\lambda_{20} \approx 2.098 \cdot 10^{-5}, \mu_{20} \approx 1.945 \times 10^{-4}, D_{20} \approx 6.901 \cdot 10^{-4}, \gamma_{20}(p) \approx 0.059$ отримаємо:

$$P\left\{H \in \left(\hat{H}_n - l_{20}(p), \hat{H}_n + r_{20}(p)\right)\right\} \ge 0.9,$$

де

$$\hat{H}_n = \varphi(\hat{\theta}_n),\ \hat{\theta}_n = \frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}},$$

$$l_{20}(p) = \varphi\left(\min\left(\hat{\theta}_n + 0.059, \frac{10}{3}\right)\right), r_n(p) = \varphi\left(\max\left(1, \hat{\theta}_n - 0.059\right)\right).$$

Висновки. В роботі за допомогою методу бакстерівських сум побудовано сильно консистентну оцінку параметра, що входить показником до коваріаційної функції випадкового процесу з приростами другого та третього порядків класу K_1. А також визначено неасимптотичні довірчі області для параметра, що оцінюється.

1. *Levy P.* Le mouvement Brownian plan // Amer J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 487–550.
2. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. –1956. – No. 3. – P. 522–527.
3. *Гладышев Е Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – Том. 1. – С. 57–66.
4. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
5. *Berman S. M.* A version of the Levy-Baxter theorem for the increments of Brownian motion of several parameters // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. –Vol. 18. – P. 1051–1055.
6. *Краснитский С. М.* О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика. – 197. – Вып. 5. – С. 71–80.
7. *Арак Т. В.* О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Том 17, Вып. 1. – С. 153–160.
8. *Курченко А. А.* Теорема бакстеровского типа для векторного гауссовского случайного поля // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1984. – Вып. 30. – С. 107–113.
9. *Бесклинская Е П., Майборода Р. Е.* О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 43. – С. 13–19.
10. *Bardet J-M.* Un test d'auto-similarite pour les processus gaussiens a accroissements stationnaires // C. R. Acad. Sci. Paris – 1999. –Vol. 328. – P. 521–526.
11. *Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O.* An estimate for the multiparameter FBM // Theory Stoch. Process. – 1999. – Vol. 5 (21). – P. 113–119.
12. *Курченко О. О.* Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей та матемтична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 88–96.
13. *Breton J-C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics – 2009. –No. 3. – P. 416–425.
14. *Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O.* Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes // Random Oper. Stoch. Equ. – 2011. – Vol. 4. – P. 313–326.
15. *Синявська О. О.* Бакстерівська оцінка невідомого параметра коваріаційної функції у негауссовому випадку // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. – Вип. 88. – С. 155–164.
16. *Dzhaparidze K., Van Zanten J. H.* A series expansion of fractional Brownian motion // Probability Theory and Related Fields. – 2004. – Vol. 130, Issue 1. – P. 39–55.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1. – М.:Наука, 1969. – 616 с.
18. *Градштейн И. С., Рыжсык И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1000 с.
19. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. Обзор математической теории. – К.: Вища школа, 1983. – 224 с.

Одержано 08.11.2014