

УДК 512.44

Н. В. Трошкі (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ДЕЯКИХ ДРОБОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

This paper is devoted to construction of models of shot noise processes. The conditions of convergence of the model by probability in the space $C(\mathbf{T})$ are investigated.

Дана робота присвячена побудові моделей дробових випадкових процесів. Також отримано умови збіжності за ймовірністю моделі в просторі $C(\mathbf{T})$.

Вступ.

Дана робота присвячена побудові моделей деяких дробових випадкових процесів, а також питанню точності та надійності побудованих моделей. До цього часу переважна більшість робіт були присвячені моделюванню гауссових випадкових процесів (див. [1], [2], [3] та монографію [4]). В монографії [5] розглядається побудова моделей передгауссових дробових процесів. Основні відомості про дробові випадкові процеси можна знайти в монографії [6].

Робота складається з вступу та трьох розділів. Перший розділ присвячений побудові моделі дробового випадкового процесу. В другому розділі отримані оцінки супремумів норм для $L_2(\Omega)$ -процесу. Питання точності та надійності моделювання випадкового процесу розглянуто в третьому розділі.

1. Побудова моделі дробового випадкового процесу

Означення 1. [6] Дробовим випадковим процесом називається процес вигляду

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \lambda) d\eta(\lambda),$$

де $\eta = (\eta(\lambda), t \in \mathbb{R})$ – сепарабельний дійснозначний однорідний центрований випадковий процес з незалежними приростами, $f = (f(t, \lambda), t, \lambda \in \mathbb{R})$ – дійснозначна функція.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ймовірнісний простір та $\mathbf{T} = [0, T]$ деяка параметрична множина. Нехай $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbf{T}\}$ центрований дробовий випадковий процес, коваріаційна функція якого має вигляд

$$R(t, s) = \int_0^{\infty} f(t, \lambda) f(s, \lambda) dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – це деяка функція розподілу.

За теоремою Карунена (див. [7]) процес $\xi(t)$ може бути зображений так:

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} f(t, \lambda) d\eta(\lambda),$$

де $\eta(\lambda)$ процес з незалежними приростами такий, що $\mathbf{E}\eta(\lambda) = 0$, $\mathbf{E}(\eta(\lambda_1) - \eta(\lambda_2))^2 = F(\lambda_1) - F(\lambda_2)$, $\lambda_1 > \lambda_2$.

Виберемо розбиття $L = \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty, \Lambda > 0$.

Розглянемо модель випадкового процесу $\xi(t)$

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k f(\zeta_k, t),$$

де η_k, ζ_k незалежні випадкові величини, причому $\eta_k = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta(\lambda)$ такі випадкові величини, що $\mathbf{E}\eta_k = 0, \mathbf{E}\eta_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2, \zeta_k$ – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ і якщо $b_k^2 > 0$, тоді

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, тоді $\zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця. Вважатимемо, що $b_k^2 > 0, k = 0, 1, \dots, N$.

Позначимо

$$\theta(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k)) d\eta(\lambda). \quad (1)$$

Для довільних $t, s \in \mathbf{T}$ розглянемо випадковий процес

$$\theta(t) - \theta(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k)) d\eta(\lambda). \quad (2)$$

Припустимо, що для $f(t, \lambda)$ мають місце такі нерівності:

$$|f(t, \lambda) - f(t, u)| \leq S(|\lambda - u|) \cdot Z(t), \quad (3)$$

$$|f(t, \lambda) - f(t, u) - f(s, \lambda) + f(s, u)| \leq S_1(|\lambda - u|) \cdot |Z_1(t) - Z_1(s)|, \quad (4)$$

де $Z(t), Z_1(t), t \in \mathbf{T}$ – деякі неперервні функція, $S(\lambda)$ та $S_1(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$ монотонно неспадні функції, такі що $S(\lambda) \rightarrow 0$ та $S_1(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Приклад 1. Нехай $f(t, \lambda)$ – неперервна, двічі диференційовна функція по t та по λ і нехай $C(t) = \sup_{y \in [0, \Lambda]} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| < \infty$.

Розглянемо такі оцінки:

$$|f(t, \lambda) - f(t, u)| = \left| \int_u^\lambda \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dy \right| \leq \int_u^\lambda \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| dy \leq |\lambda - u| \cdot C(t).$$

Отже, якщо вибрати $Z(t) = C(t)$, то функція $f(t, \lambda)$ задовольнятиме умову (3).

Покажемо, що якщо існує така стала $C_1(T, \Lambda)$, яка залежить тільки від T та Λ , причому справджується нерівність

$$\left| \frac{\partial^2 f(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \right| \leq C_1(T, \Lambda), \tag{5}$$

то функція $f(t, \lambda)$ задовольняє і умову (4). Розглянемо область $\Delta = \{s \leq l \leq t, u \leq y \leq \lambda\}$, де $s, t \in [0, T]$, $\lambda, u \in [0, \Lambda]$. Для визначеності вважатимемо, що $t > s, u > \lambda$. Тоді з властивостей кратних інтегралів та (5) випливають нерівності

$$| f(t, \lambda) - f(t, u) - f(s, \lambda) + f(s, u) | = \left| \int_{\Delta} \int \frac{\partial^2 f(l, y)}{\partial l \partial y} dl dy \right| \leq C_1(T, \Lambda) |t - s| |u - \lambda|.$$

Приклад 2. Якщо $f(t, \lambda) = e^{-(t+v)^2}$, $0 < t \leq T, 0 < v \leq \Lambda$, то аналогічно як у прикладі 1 маємо, що умова (3) справджується.

Доведемо справедливість умови (4)

$$\begin{aligned} | f(t, \lambda) - f(t, u) - f(s, \lambda) + f(s, u) | &= \left| \int_u^\lambda \frac{\partial f(t, v)}{\partial v} dv - \int_u^\lambda \frac{\partial f(s, v)}{\partial v} dv \right| \leq \\ &\leq \int_u^\lambda \left| \frac{\partial f(t, v)}{\partial v} - \frac{\partial f(s, v)}{\partial v} \right| dv. \end{aligned}$$

Оцінимо підінтегральний вираз

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(t, v)}{\partial v} - \frac{\partial f(s, v)}{\partial v} \right| &= 2 \left| e^{-(t+v)^2} (t+v) - e^{-(s+v)^2} (s+v) \right| = \\ = 2 \left| \left(e^{-(t+v)^2} (t+v) - e^{-(s+v)^2} (t+v) \right) + \left(e^{-(s+v)^2} (t+v) - e^{-(s+v)^2} (s+v) \right) \right| &= \\ = 2 \left| (t+v) \left(e^{-(t+v)^2} - e^{-(s+v)^2} \right) + e^{-(s+v)^2} (t-s) \right| &\leq \\ \leq 2 \left((t+v) e^{-(t+v)^2} \left| 1 - e^{-((s+v)^2 - (t+v)^2)} \right| + e^{-(s+v)^2} |t-s| \right) &\leq \\ \leq 2 \left((t+v) e^{-(t+v)^2} |(s+v)^2 - (t+v)^2| + e^{-(s+v)^2} |t-s| \right) &\leq \\ \leq 2 \left((t+v) |t-s| (s+t+2v) + |t-s| \right) &\leq 2 |t-s| (2(T+\Lambda)^2 + 1). \end{aligned}$$

Отже,

$$| f(t, \lambda) - f(t, u) - f(s, \lambda) + f(s, u) | \leq C_1(T, \Lambda) |\lambda - u| \cdot |t - s|,$$

де $C_1(T, \Lambda) = 2(2(T + \Lambda)^2 + 1)$.

2. Оцінки супремумів норм в $L_2(\Omega)$ для процесів $\theta(t)$ та $\theta(t) - \theta(s)$

Оскільки $\theta(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t) \in L_2(\Omega)$ -процесом, тоді $\| \theta(t) \|_{L_2} = (\mathbb{E} | \theta(t) |^2)^{\frac{1}{2}}$.

Лема 1. Нехай для функції $f(t, \lambda)$ виконується умова (3), $\theta(t)$ визначений в (1) і нехай $\int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) < \infty$, тоді справджується наступне співвідношення

$$\begin{aligned} &\| \theta(t) \|_{L_2} \leq \\ &\leq Z(t) \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки $\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k)) d\eta(\lambda)$ незалежні випадкові величини, причому випадкова селичина ζ_k не залежать від $\eta(\lambda)$, тоді за теоремою Фубіні (E_{ζ_k} – умовне математичне сподівання відносно ζ_k), отримуємо

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\|_{L_2} &= (\mathbb{E} |\theta(t)|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k)) d\eta(\lambda) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k)| d\eta(\lambda) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \mathbb{E}_{\zeta_k} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t, \lambda) - \right. \right. \\ &- \left. \left. f(t, \zeta_k)|^2 d\eta(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k)|^2 dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S^2(|\lambda - \zeta_k|) Z^2(t) dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S^2(|\lambda - u|) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. Z^2(t) dF(\lambda) \right) dF_k(u) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{b_k^2} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) dF(\lambda) \right) dF(u) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot Z(t) = Z(t) \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Лема 2. Нехай для функції $f(t, \lambda)$ виконується умова (3), різниця $\theta(t) - \theta(s)$ визначена в (2) і нехай $\int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) < \infty$, тоді справедливе наступне співвідношення

$$\begin{aligned} \|\theta(t) - \theta(s)\|_{L_2} &\leq |Z_1(t) - Z_1(s)| \times \\ &\times \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S_1^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Доведення.

Оскільки $\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k)) d\eta(\lambda)$ незалежні випадкові величини і випадкові величини ζ_k не залежать від $\eta(\lambda)$, тоді за теоремою Фубіні

(E_{ζ_k} – умовне математичне сподівання відносно ζ_k), отримаємо

$$\begin{aligned} & \| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2} = (\mathbb{E} | \theta(t) - \theta(s) |^2)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k)) d\eta(\lambda) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k)| d\eta(\lambda) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \mathbb{E}_{\zeta_k} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k)|^2 d\eta(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |f(t, \lambda) - f(t, \zeta_k) - f(s, \lambda) + f(s, \zeta_k)|^2 dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Використавши умову (4) матимемо

$$\begin{aligned} & \| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S_1^2(|\lambda - \zeta_k|) |Z_1(t) - Z_1(s)|^2 dF(\lambda) \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S_1^2(|\lambda - u|) |Z_1(t) - Z_1(s)|^2 dF(\lambda) \right) dF_k(u) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{b_k^2} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} S_1^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) |Z_1(t) - Z_1(s)|^2 dF(\lambda) \right) dF(u) + \right. \\ & \left. + \frac{|Z_1(t) - Z_1(s)|^2}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} = |Z_1(t) - Z_1(s)| \times \\ & \times \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S_1^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Позначимо $\sigma_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \| \theta(t) \|_{L_2}$ та $\sigma(h) = \sup_{|t-s| \leq h} \| \theta(t) - \theta(s) \|_{L_2}$.

Теорема 1. Для випадкового процесу $\theta(t)$, визначеного в (1) при умові збіжності інтегралу

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) < \infty,$$

має місце нерівність

$$\sigma_0 \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq t \leq T} Z(t).$$

Доведення. Доведення теореми 1 випливає з леми 1.

Наслідок 1. Нехай виконуються умови теореми 1 і нехай розбиття $L = \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty, \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N-1}$, тоді

$$\sigma_0 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} Z(t) \times \left(S^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. Для випадкового процесу $\theta(t) - \theta(s)$, визначеного в (2), при умові збіжності інтегралу $\int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) < \infty$, справедлива наступна нерівність:

$$\sigma(h) \leq \left(\sum_{k=0}^{N-2} b_k^2 S_1^2(|\lambda_{k+1} - \lambda_k|) + \frac{1}{b_{N-1}^2} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \times \sup_{|t-s| \leq h} |Z_1(t) - Z_1(s)|.$$

Доведення. Доведення теореми 2 випливає з леми 2.

Наслідок 2. Нехай виконуються умови теореми 2 і нехай розбиття $L = \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_{N-1} = \Lambda, \lambda_N = \infty, \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N-1}$, тоді

$$\sigma(h) \leq \left(S_1^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \times \sup_{|t-s| \leq h} |Z_1(t) - Z_1(s)|.$$

3. Точність та надійність побудованої моделі

Означення 2. [4] Скажемо, що випадковий процес $\hat{\xi}(t)$ наближує процес $\xi(t)$ з надійністю $1 - \beta, 0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C(\mathbf{T})$, якщо існує таке розбиття L , що справедлива нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \in \mathbf{T}} |\xi(t) - \hat{\xi}(t)| > \delta \right\} \leq \beta.$$

Оскільки $\theta(t), t \in \mathbf{T} \in L_2(\Omega)$ -процесом, то псевдометрика ρ породжена процесом $\theta(t)$ на \mathbf{T} має вигляд

$$\rho(t, s) = \|\theta(t) - \theta(s)\|_{L_2}, t, s \in \mathbf{T}.$$

Означення 3. [6] Позначимо через $N_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon)$ число куль у найменшому ε -покритті множини \mathbf{T} . Покладаємо $N_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon) = +\infty$ якщо не існує скінченного ε -покриття множини \mathbf{T} . Функція $N_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon), \varepsilon > 0$ називається метричною масивністю множини \mathbf{T} відносно псевдометрики ρ .

Доведення. Застосовуючи до $L_2(\Omega)$ -процесу $\theta(t)$ теорему 3, а також враховуючи, що для метричної масивності виконується умова $N(\varepsilon) \leq \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, отримаємо

$$P \left\{ \sup_{t \in \mathbf{T}} |\theta(t)| > \delta \right\} \leq \frac{B_2^2}{\delta^2},$$

де

$$\begin{aligned} B_2^2 &= \left(\inf_{t \in \mathbf{T}} \|\theta(t)\|_{L_2} + \inf_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^{x\varepsilon_0} N^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) d\varepsilon \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\inf_{t \in \mathbf{T}} \|\theta(t)\|_{L_2} + \inf_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^{x\varepsilon_0} \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \right)^2. \end{aligned}$$

Нехай $C(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |Z_1(t) - Z_1(s)|$, тоді використовуючи наслідок 2, матимемо

$$\begin{aligned} \sigma(h) &\leq C(h) \times \\ &\times \left(S_1^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отже, обернена функція до оцінки $\sigma(h)$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sigma^{(-1)}(h) &= C^{(-1)} \left(h \left(S_1^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Використовуючи попередню рівність, а також лему 1 отримаємо, що

$$\begin{aligned} B_2^2 &\leq \left(\left(S^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\times \inf_{0 \leq t \leq T} Z(t) + \inf_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^{x\varepsilon_0} \left(\frac{T}{2} \left(C^{(-1)} \left(\varepsilon \left(S_1^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \right. \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \right)^{-1} + 1 \left. \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \left. \right)^2. \end{aligned}$$

Ми завжди можемо вибрати таке розбиття L , що для довільного $\beta \in (0, 1)$

буде виконуватись

$$\frac{1}{\delta^2} \left(\left(S^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \times \inf_{0 \leq t \leq T} Z(t) + \inf_{0 < x < 1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^{x\varepsilon_0} \left(\frac{T}{2} \left(C^{(-1)} \left(\varepsilon \left(S_1^2 \left(\frac{\Lambda}{N-1} \right) F(\Lambda) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{F(+\infty) - F(\Lambda)} \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} S_1^2(|\lambda - u|) dF(\lambda) dF(u) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \right)^{-1} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \left. \right)^2 \leq \beta.$$

Тобто $P \left\{ \sup_{t \in T} |\theta(t)| > \delta \right\} \leq \beta$. Тоді з означення 2 випливає, що модель $\hat{\xi}(t)$ наближає процес $\xi(t)$ з заданою точністю $\delta > 0$ та надійності $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ в просторі $C([0, T])$.

Висновки. В роботі побудовано моделі деяких дробових випадкових процесів. Крім цього отримано оцінки супремумів норм цих випадкових процесів. В даній роботі ці оцінки використовуються при дослідженні умов вибору розбиття так, щоб побудована модель наближала процес із заданими точністю та надійністю.

1. Antonini R.G., Kozachenko Yu.V., Tegza A.M. Accuracy of simulation in L_p Gaussian random processes // Bulletin of the University of Kiev, Series: Physics and Mathem. – 2002. – Vol.5. – p. 7-14.
2. Козаченко Ю.В., Тегза А.М. Застосування теорії $Sub_{\varphi}(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів // Теор. ймовірностей та матем. статист. – 2002. – Вип.67. – p. 71-87.
3. Troshki N. Construction models of Gaussian random processes with a given accuracy and reliability in $L_p(T), p \geq 1$ // Journal of Classical Analysis. –2013. –Volume 3, Number 2. – p. 157-165.
4. Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О., Тегза А.М. Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса. – Уж.:Карпати, 2012.–194 с.
5. Дарійчук І.В., Козаченко Ю.В., Перестюк М.М. Випадкові процеси з просторів Орліча. – Ч.: Золоті литаври, 2011. – 212 с.
6. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. – 257
7. Karhunen K. Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse // Ann. Acad. Sci. Fenn. –1947. – №34. – p. 7.

Одержано 26.09.2014